Modelos de Eleccion Binaria

Walter Sosa Escudero

wsosa@udesa.edu.ar

Universidad de San Andrés

Introduccion

- Y variable aleatoria que puede tomar solo dos valores, uno o cero, y que puede ser asociada a la ocurrencia de un evento (1 si ocurre y 0 si no). Ejemplo: admision a un posgrado, asistir al secundario, etc.
- x vector de K variables explicativas.

Un *modelo de elección binaria* es un modelo de la probabilidad de ocurrencia del evento denotado por Y condicional en x:

$$p \equiv Pr(Y = 1|x)$$

Ejemplo: probabilidad de que a una persona la admitan a un posgrado, dadas sus calificaciones, que un banco quiebre dada su situacion financiera, etc.

Es importante notar que dado x, y toma solo los valores (0-1): y condicional en x tiene distribucion de *Bernoulli*.

Entonces:

$$E(y|x) = 1\ p + 0\ (1-p) = p$$

y

$$V(y|x) = p\ (1-p)$$

El modelo lineal de probabilidad

Un primer modelo podria ser:

$$y = x'\beta + u \qquad \text{con} \qquad E[u|x] = 0$$

Este es el *modelo lineal de probabilidad (LPM)*. Los parametros pueden ser estimados consistentemente por MCO, regresando y en x.

Tres razones para descartar LPM

- *1) Genera predicciones inconsistentes con una probabilidad:*

  Notar que:

  $$E(y|x) = x'\beta$$

  Problema: en nuestro caso $E(y|x) = p$ de modo que $-1 < E(y|x) = p < 1$. Pero en el modelo lineal general $-\infty < x'\hat{\beta} < \infty$. Consecuentemente, el LPM puede generar predicciones cuyos valores caen fuera del rango admisible para una probabilidad.

- *2) u es heterocedastico.*

  La especificacion lineal implica:

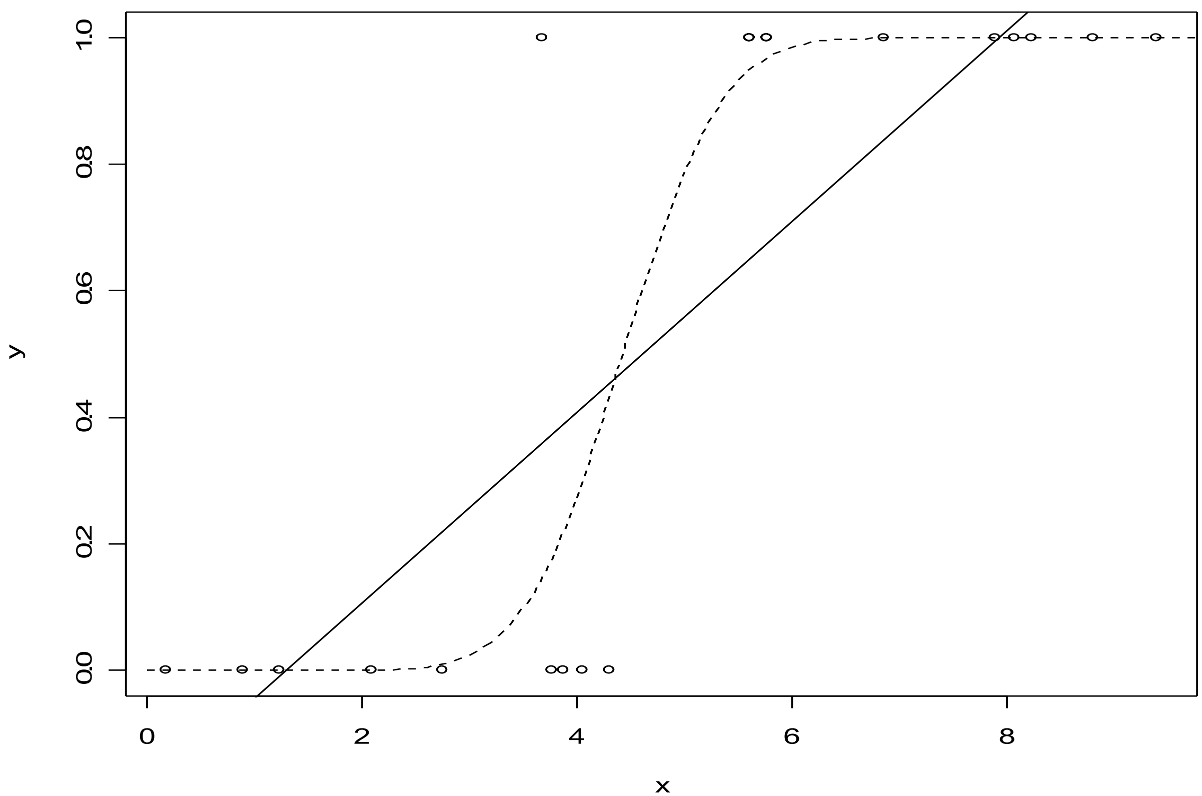
$$V(u_i|x_i) = V(y_i|x_i) = p_i(1-p_i) = x_i'\beta(1-x_i'\beta)$$

  que, claramente, no es constante. Esta es una razon para abandonar MCO, es facil de arreglar.

- *3) LPM implica derivadas parciales constantes:*

$$\frac{\partial p}{\partial x_k} = \beta_k$$

  que es una constante. Pero, intuitivamente, en la mayoria de los casos relevantes no queremos esto. Efectos 'debiles en las puntas'. Ejemplos: asistencia al secundario, admision a posgrado.


y
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x
0
2
4
6
8

Logits y Probits

El modelo *no-lineal* que propondremos es:

$$p = F(x'\beta)$$

en donde $F(.)$ tiene las siguientes propiedades:

$$F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1,\ f(x) = dF(x)/dx > 0$$

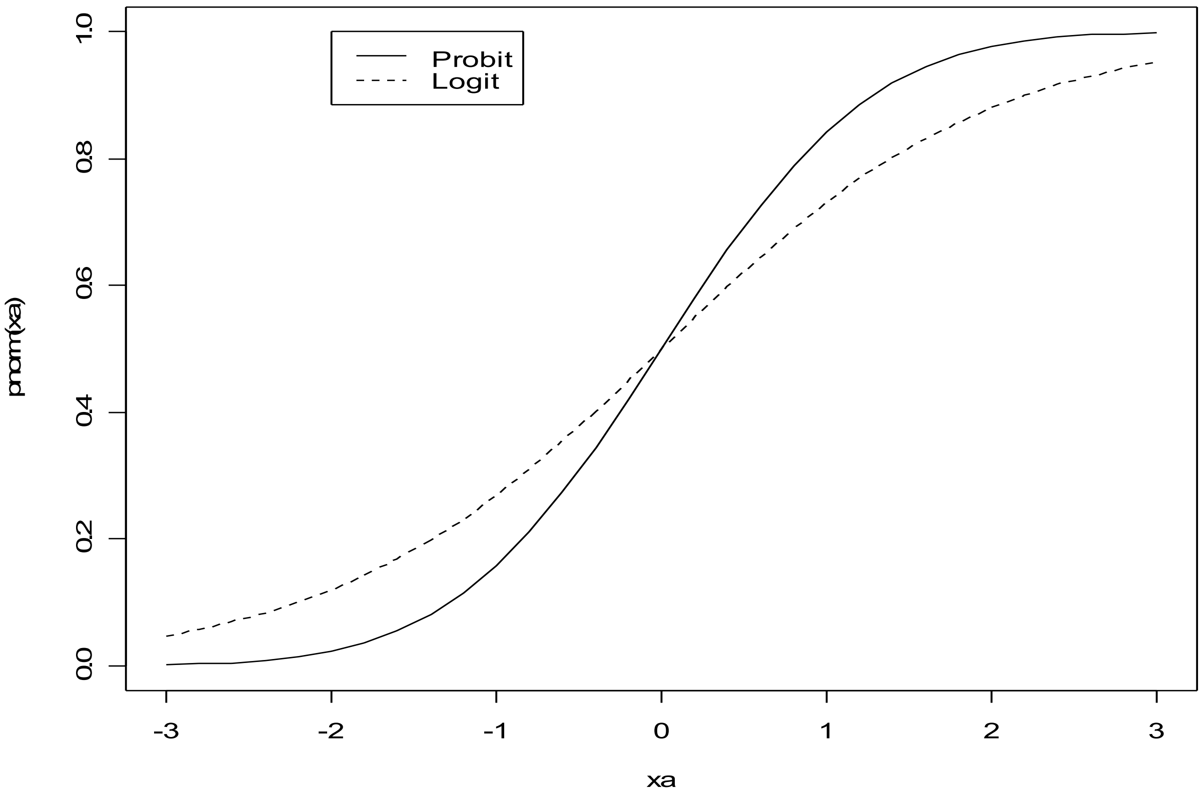
- Probit:

$$F(x'\beta) = \int_{-\infty}^{x'\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{s^2}{2}} ds$$

- Logit:

$$F(x'\beta) = \frac{e^{x'\beta}}{1 + e^{x'\beta}}$$

Notar que LMP corresponde a $F(z) = z$.


Probit
Logit
pnorm(xa)
xa
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-3
-2
-1
0
1
2
3

Interpretaciones

$$\frac{\partial p}{\partial x_k} = \beta_k \ f(x_i'\beta)$$

,que no es constante. Notar que:

$$\text{sgn}\,(\partial p / \partial x_k) = \text{sgn} \ \beta_k$$

de modo que el signo de la derivada es interpretable, pero no su valor ya que la derivada depende de *donde* se la evalue. Alternativa: derivadas en las medias:

$$\frac{\partial p}{\partial x_k}_{x=\bar{x}} = \beta_k f(\bar{x}'\beta_k)$$

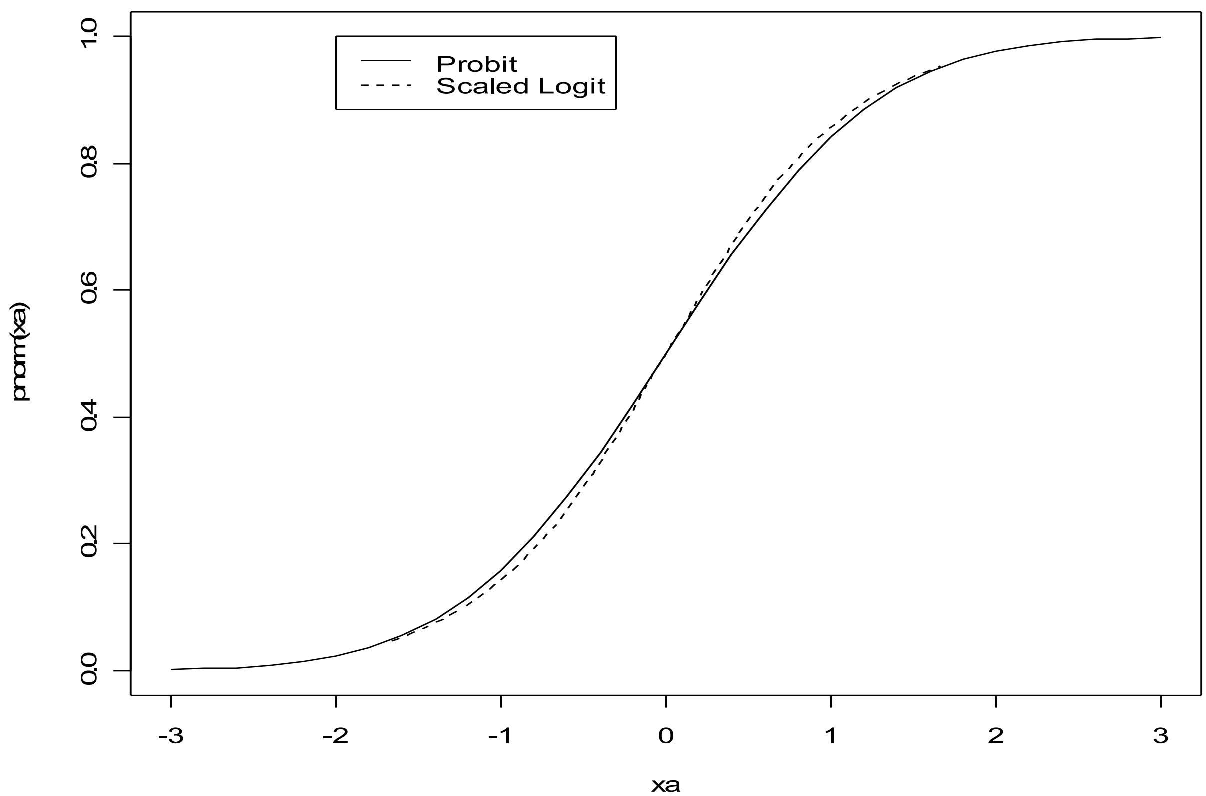
que es el *efecto marginal en las medias*. Tambien podriamos hacerlo en cualquier punto. O graficar esta derivada moviendo solo una variable y fijando las restantes en algun punto interesante.

Logits o probits?

- Si X es logistica, $V(X) = \pi^2/3$, entonces $V(Z = X\sqrt{3}/\pi) = 1$. Se puede mostrar que la distribucion de Z (logistica re-escalada) es *muy* similar a la normal estandar.

- En general, los coeficientes del logit exceden a los de probit en $\pi/\sqrt{3}$.

- Utilizar cualquier especificacion.


Probit
Scaled Logit
pnorm(xa)
xa
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-3
-2
-1
0
1
2
3

Estimacion e inferencia

$(y_i, x_i), i = 1, \ldots, n$, muestra iid. Y_i tiene distribucion de Bernoulli con $p_i = Pr(y_i = 1)$

La funcion de verosimilitud sera:

$$L(\beta) = \prod_{y_i=1} p_i \prod_{y_i=0} (1 - p_i) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i}$$

y su logaritmo:

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[y_i \ln p_i + (1 - y_i) \ln(1 - p_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[y_i \ln F(x_i'\beta) + (1 - y_i) \ln(1 - F(x_i'\beta)) \right] \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - F_i) f_i \, x_{ki}}{F_i(1 - F_i)} = 0, \qquad\qquad k = 1, \ldots, K$$

con $F_i \equiv F(x_i'\hat{\beta})$, $f_i \equiv f(x_i'\hat{\beta})$.

- Es un sistema de K ecuaciones *no-lineales* con K incognitas.
- No satisface las condiciones del teorema de la funcion implicita: es imposible 'despejar' $\hat{\beta}$.
- Existe una solucion siempre que los regresores sean linealmente independientes y no haya un *clasificador perfecto*. Ver notas de clase.

Tests de especificacion

Habiendo estimado los parametros por maxima verosimilitud:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{MV} - \beta_0\right) \xrightarrow{d} N(0, V_{MV})$$

- *Significatividad individual:* $H_0 : \beta_k = \beta_{0k}$ vs. $H_A : \beta_k \neq \beta_{0k}$

$$t_k = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_{k0}}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_k)/n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

• *Significatividad de un grupo de coeficientes:* $H_0 : r$ coeficientes del modelo son cero, H_A : alguno de ellos es $\neq 0$

$$LR = -2[\ln \hat{L}_r - \ln \hat{L}_{nr}] \sim \chi^2(r)$$

En donde $\hat{L}$ y $\hat{L}_r$ son, respectivamente, el valor de la verosimilitud en el el modelo restringido y sin restringir. Este estadístico tiene distribución asintótica χ^2 con r grados de libertad, en donde r es el número de restricciones.

Bondad del Ajuste

- *Pseudo-R^2:*

$$LR = 1 - \frac{\ln L}{lnL_0}$$

L es el valor máximo de la función de verosimilitud bajo el modelo original y L_0 es el valor correspondiente al modelo con solo una constante. Mide el incremento en la capacidad explicativa por considerar un modelo mas completo que solo una constante.

- *Porcentaje de predicciones correctas:*

$\hat{p}_i \equiv x_i'\hat{\beta}$

$\hat{y}_i \equiv 1[\hat{p}_i > c]$ (generalmente, $c = 0.5$)

$y_i^c \equiv 1[\hat{y}_i = y_i]$ (1 si prediccion correcta)

El porcentaje de predicciones correctas es:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^c}{n}$$

- Sensible a la eleccion de c. Errores simetricos.
- Un modelo trivial tiene $H \geq 0.5$