

I.P.A.

20 de setiembre de 2000

Análisis I

1. .

(a) Sea $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n e^{\frac{1}{2}-t} dt$.

i. Hallar $\lim I_n$.

ii. Clasificar $\sum I_n$, en caso de convergencia hallar una cota superior para su suma.

(b) E.A. y R.G. de $f : R \rightarrow R/f(x) = \begin{cases} \int_0^x t^3 e^{\frac{1}{2}-t} dt & \text{si } x \geq 0 \\ xL(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$, en particular continuidad y derivabilidad de f en $x = 0$.

(c) Clasificar las series:

i. $\sum (6\sqrt{e} - f(n))$

ii. $\sum (f(\frac{1}{n^\alpha}))$. (se sugiere hallar un equivalente de f en 0^+ de la forma Ax^β)

iii. $\sum ((-1)^n f(\frac{1}{n^\alpha}))$, $\alpha > 0$.

iv. $\sum (f(-\frac{1}{e^{\alpha n}}))$, $\alpha > 0$.

2. Se considera la función $f : R \rightarrow R$ dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Sea $F : R \rightarrow R$ dada por $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

(a) Determinar una expresión para F que no dependa del símbolo de integral. ¿Es F una primitiva de f en R ?. Justificar.

(b) Estudio analítico y representación gráfica de F .

(c) Encontrar el desarrollo de Taylor de F de orden 3 en $x = 1$.

(d) Clasificar las series:

i. $\sum F(1 + \frac{1}{n^\alpha})$, $\alpha > 0$.

ii. $\sum (-1)^n F(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha})$, $\alpha > 0$.

iii. $\sum G(-n^\alpha)$, $\alpha > 0$ con $G(x) = F(x) - (mx + k)$, donde $y = mx + k$, es la ecuación de la asíntota de F en $-\infty$.

iv. $\sum (-1)^n G(-n^\alpha)$, $\alpha > 0$.

3. (libres)

(a) E.A. y R.G. de $f : f(x) = \frac{L|x+1|}{1+x^2}$, si f'' .

(b) Hallar el área encerrada entre el gráfico de f y el eje x entre $x = 0$ y $x = 1$ (se sugiere realizar el cambio de variable $x = \frac{1-t}{1+t}$).