Clase # 21

Análisis de decisiones. Conceptos generales y Teorema de Bayes

Todos los días las personas nos vemos enfrentadas a innumerables situaciones en las cuales debemos tomar determinadas decisiones y seguir cursos de acción.

Los procesos de toma de decisiones los podemos clasificar principalmente en:

Decisiones bajo certidumbre

Decisiones bajo incertidumbre

Antes de explicar en que se diferencian los dos procesos de tomas de decisiones es importante aclarar que es una decisión y que pasos se siguen cuando esta se toma:

Decisión: El proceso de elegir la solución para un problema suponiendo que existen varias alternativas.

Pasos:

1. Definición del problema.

2. Recolección de datos sobre el problema.

3. Planteamiento de un modelo.

4. Obtención de soluciones utilizando el modelo.

5. Selección de la mejor de las soluciones

Toma de decisiones bajo certidumbre
- Los parámetros son constantes conocidas y ciertas
- Dentro de estos modelos encontramos la Programación lineal

Toma de decisiones bajo incertidumbre
- Los parámetros varían con el tiempo y obedecen a procesos estocásticos

Sigue

Los procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre serán los que analizaremos en esta parte del curso, y nos enfocaremos principalmente en el corto plazo, en el cual tendremos que preocuparnos de tomar quizá solo una decisión

En los procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre es posible disminuir la mencionada incertidumbre con el uso de algunas pruebas.

Sigue

Decisiones bajo incertidumbre

Toma de decisiones sin experimentación

Toma de decisiones con experimentación

Toma de decisiones sin experimentación

- No se dispone de datos previos.
- Las circunstancias varían constantemente.
- La decisión no se toma en forma repetida

Toma de decisiones con experimentación

- Se dispone de datos previos.
- Las circunstancias no varían constantemente.
- La decisión se toma en forma repetida

Toma de decisiones sin experimentación

Toma de decisiones con experimentación

La experimentación tiene un costo
¿ Utilizar la experimentación con el fin de reducir la incertidumbre o tomar la decisión sin usar ninguna de estas pruebas ?

Los modelos de toma de decisiones utilizan algunos conceptos de la estadística. Por ello es necesario que recordemos algunos de estos conceptos, y en especial el Teorema de Bayes.

Sea E un experimento que se repite n veces

- n_A : # de veces que se da el evento A.
- n_B : # de veces que se da el evento B.
- $n_{A \cap B}$: # de veces que se da el evento $A \cap B$

$\frac{n_A}{n}$: Frecuencia relativa de A

$\frac{n_B}{n}$: Frecuencia relativa de B

$\frac{n_{A \cap B}}{n}$: Frecuencia relativa de $A \cap B$

$\frac{n_{A \cap B}}{n_A}$: Frecuencia relativa o condicional de B dado que se dio A

Cuando $n \rightarrow \infty$ $\quad \frac{n_{A \cap B}}{n_A} \longrightarrow P(B|A)$

$$\frac{\frac{n_{A \cap B}}{n}}{\frac{n_A}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Entonces

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo.

Sea E un experimento consistente en tirar un dado.

Definamos los eventos:
A: Que aparezca un número par.
B: Que aparezca el número dos.

$\Rightarrow$ ¿P(B |A)?

$P(A \cap B) = 1/6$

$P(A) = 1/2$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

Definición

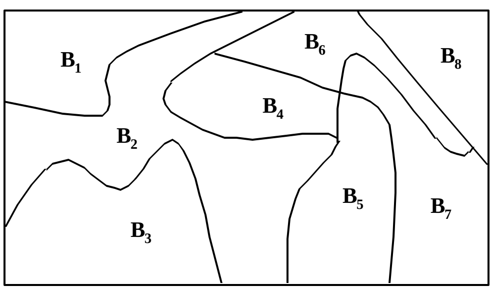
Los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$, se dice que son una partición del espacio muestral S si se cumplen:

$B_i \cap B_j = \emptyset$ (para $i \neq j$)

$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

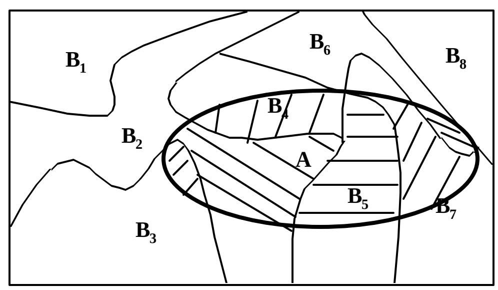
$P(B_i) > 0$

Gráficamente se puede ver el espacio muestral S como la partición de $B_1, B_2, \ldots, B_k$



Sea $A = A \cap (B_1, B_2, \ldots, B_k)$

$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$



Propiedad

Los eventos $(A \cap B_i)$ son mutuamente excluyentes por parejas.

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

Teorema de la probabilidad total

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_k)P(B_k)$$

Teorema de Bayes

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i)\,P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)\,P(B_i)}$$

Ejemplo.

En una planta de producción se tienen 3 máquinas que producen un mismo artículo.

Las máquinas 2 y 3 producen a la misma velocidad, mientras que la máquina 1 tiene una velocidad de producción igual a la de la 2 y 3 juntas.

Además las máquinas producen un determinado número de artículos defectuosos. Los porcentajes de artículos defectuosos por máquina son:

Sigue

Diseño: Andrés Gómez 21-19

% de artículos defectuosos M1 $\longrightarrow$ 2 %

% de artículos defectuosos M2 $\longrightarrow$ 2 %

% de artículos defectuosos M3 $\longrightarrow$ 4 %

Se recoge la producción de un día y se escoge un artículo al azar.

¿ Cual es la probabilidad de que sea defectuoso?

Diseño: Andrés Gómez 21-20

Definamos los siguientes eventos:

- B_1 : Artículo producido en la máquina 1.
- B_2 : Artículo producido en la máquina 2.
- B_3 : Artículo producido en la máquina 3.
- A : Artículo defectuoso.

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \qquad P(B_2) = \frac{1}{4} \qquad P(B_3) = \frac{1}{4}$$

Diseño: Andrés Gómez 21-21

$$\left.\begin{array}{l} P(A \mid B_1) = 0.02 \\ P(A \mid B_2) = 0.02 \\ P(A \mid B_3) = 0.04 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \dots + P(A \mid B_k)P(B_k)}$$

$$P(A) = 0.02*\frac{1}{2} + 0.02*\frac{1}{4} + 0.04*\frac{1}{4}$$

$$P(A) = 0.025$$

La probabilidad de que un artículo sea defectuoso es 0.025

Diseño: Andrés Gómez 21-22

¿Si tomo un artículo al azar y resulta defectuoso , que probabilidad tiene de venir de la máquina 1?

Esto es

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_1)\,P(B_1)}{\sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)\,P(B_i)}$$

Diseño: Andrés Gómez 21-23

$$P(B_1 \mid A) = \frac{0.02*\frac{1}{2}}{0.02*\frac{1}{2} + 0.02*\frac{1}{4} + 0.04*\frac{1}{4}}$$

$$P(B_1 \mid A) = 0.4$$

La probabilidad de que un artículo defectuoso venga de la máquina 1 es 0.4, o la máquina 1 produce el 40% de los artículos defectuosos de la planta

Diseño: Andrés Gómez 21-24

Terminología.

Acción (a) : Alternativa elegida por el tomador de decisiones del conjunto que contiene todas las alternativas factibles bajo consideración para las distintas formas de proceder del problema en cuestión.

Estado de la naturaleza (θ) : Cada una de las situaciones posibles en que se encontrará el tomador de decisiones y está determinado por efectos aleatorios.

Pago {p(a,θ)} : Medida cuantitativa del valor de las consecuencias del resultado para el tomador de decisiones.

Por ejemplo muchas veces el pago se representa por la ganancia monetaria neta (utilidad), aunque también se pueden usar otras medidas.

p(a,θ) ⟶ Pago al tomar la acción a cuando el estado de la naturaleza es θ

En general, se usa una tabla de pagos para dar p(a,θ) para cada combinación de a y θ

θ / a	θ_1	θ_2	.... θ_n
a_1	p(a_1,θ_1)	p(a_1,θ_2)	.... p(a_1,θ_n)
a_2	p(a_2,θ_1)	p(a_2,θ_2)	.... p(a_2,θ_n)
⋮	⋮	⋮	⋮
a_m	p(a_m,θ_1)	p(a_m,θ_2)	.... p(a_m,θ_n)

Ejemplo.

La GOFERBROKE COMPANY es dueña de unos terrenos donde puede haber petróleo.

Según un geólogo la probabilidad que exista petróleo en estos terrenos es 1/4 .

La compañía puede o bien perforar o vender los terrenos a otra compañía petrolera por $90000 independientemente de que haya o no petróleo. Si la compañía decide perforar y existe petróleo ganará $700000. Pero si no hay petróleo perderá $100000.

Veamos ⟶

θ / a	Petróleo	Seco
Perforar	**$700000**	**-$100000**
Vender	**$90000**	**$90000**
Probabilidad	**0.25**	**0.75**

Dada esta tabla de pagos, el tomador de decisiones eligirá una acción. Más adelante se verán los criterios para la toma de decisiones sin experimentación.

Ejemplo.

Los principales clientes de la pizzería Comini son los estudiantes que viven en las residencias de la Universidad Nacional.

Existe la probabilidad que estos estudiantes se muden a unos apartamentos que va a arrendar la universidad o que factiblemente se trasladen a los nuevos apartamentos que se están construyendo.

Ante la posibilidad de la mudanza, la pizzería ha considerado la opción de trasladarse a otro lugar

Sigue ⟶

Actualmente la pizzería está ubicada cerca al puente de carabineros.

Las opciones de traslado que tienen los dueños de la pizzería son ubicarse en la carrera 65 o bien trasladarse a la avenida Colombia.

Trasladarse a la carrera 65 sería la opción más adecuada dado que los estudiantes se mudaran a los apartamentos que la universidad piensa arrendar. Por otro lado trasladarse a la calle Colombia sería lo mejor si los estudiantes se mudaran a los apartamentos en construcción.

Veamos

Estudiantes

Pizzería

q / *a*	No mudanza	Arrendar Apartamentos	Construir Apartamentos
No trasladarse	100	50	20
Cra 65	40	150	25
Calle Colombia	-20	20	200
Probabilidad	1/3	1/3	1/3

Como en el ejemplo de la petrolera, acá el tomador de decisiones deberá elegir una acción y de allí tendrá un pago según el estado de la naturaleza.