تدريب ①:

إذا كانت $\text{جا}\theta = \frac{3}{5}$ ، $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$
جد دون استخدام الآلة الحاسبة قيمة $\text{جتا}\theta$ ، $\text{ظا}\theta$

$\therefore \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

$\therefore (\frac{3}{5})^2 + \text{جتا}^2\theta = 1 \Leftarrow \text{جتا}^2\theta = 1 - \frac{9}{25}$

$\therefore \text{جتا}^2\theta = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\therefore \text{جتا}\theta = \pm\frac{4}{5}$ وحيث أن $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ الربع ②

$\therefore \text{جتا}\theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore \text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

تدريب ②:

أثبت أن:

$2\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1 + \text{جا}^2\theta$.

ط. الأيمن : $\because \text{جتا}^2\theta = 1 - \text{جا}^2\theta$ ∴ بالتعويض في الطرف الأيمن

$2\text{جا}^2\theta + (1 - \text{جا}^2\theta) = 2\text{جا}^2\theta + 1 - \text{جا}^2\theta$

$= \text{جا}^2\theta + 1 =$ ط. الأيسر

تدريب ③:

أثبت أن:

$\text{ظا}\theta\,\text{جتا}\theta = \sqrt{1 - \text{جتا}^2\theta}$ ، $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

ط. الأيمن :

$\text{ظا}\theta\,\text{جتا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \times \text{جتا}\theta = \text{جا}\theta$.

ط. الأيسر :

$\sqrt{1 - \text{جتا}^2\theta} = \sqrt{\text{جا}^2\theta}$ لأن $\text{جا}^2\theta = 1 - \text{جتا}^2\theta$

$= +\text{جا}\theta$ لأن θ تقع في الربع ①

$\therefore$ ط. الأيمن = ط. الأيسر .

تدريب ④:

إذا كانت $\text{ظا}\theta = \frac{1}{3}$ ، $\theta \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$
جد دون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من
$\text{جتا}\theta$ ، $\text{جا}\theta$.

$\because 1 + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$.

$\therefore 1 + (\frac{1}{3})^2 = \text{قا}^2\theta$

$1 + \frac{1}{9} = \text{قا}^2\theta \Leftarrow \text{قا}^2\theta = \frac{9}{9} + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$

تابع تدريب ④ :

$\therefore \text{قا}\theta = \pm\sqrt{\frac{10}{9}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$ وحيث أن $\theta \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ ← الربع ③

$\therefore \text{قا}\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3} \Leftarrow \frac{1}{\text{جتا}\theta} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$

$\therefore \text{جتا}\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

جاθ = ؟

$\because \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

$\therefore \text{جا}^2\theta + (-\frac{3}{\sqrt{10}})^2 = 1 \Leftarrow \text{جا}^2\theta + \frac{9}{10} = 1$

$\text{جا}^2\theta = 1 - \frac{9}{10} \Leftarrow \frac{10}{10} - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

$\therefore \text{جا}^2\theta = \frac{1}{10}$

$\therefore \text{جا}\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ وحيث أن

$\theta \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ ∴ جا$\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

تدريب ⑤:

إذا كانت $\text{ظتا}\theta = -\frac{7}{24}$ ، $\theta \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$
جد دون استخدام الآلة الحاسبة قيمة جتاθ ، جاθ

$\because 1 + \text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta$

$\therefore 1 + (-\frac{7}{24})^2 = \text{قتا}^2\theta \Leftarrow 1 + \frac{49}{576} = \text{قتا}^2\theta$

$\therefore \text{قتا}^2\theta = \frac{576}{576} + \frac{49}{576} = \frac{625}{576}$

$\therefore \text{قتا}\theta = \pm\sqrt{\frac{625}{576}} = \pm\frac{25}{24}$

وحيث أن θ تقع في الربع ④ $\therefore \text{قتا}\theta = -\frac{25}{24}$

$\text{قتا}\theta = -\frac{25}{24} \Leftarrow \frac{1}{\text{جا}\theta} = -\frac{25}{24}$

$\therefore \text{جا}\theta = -\frac{24}{25}$

$\therefore$ جتاθ = ؟

$\because \text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta = 1 \Leftarrow \text{جتا}^2\theta + (-\frac{24}{25})^2 = 1$

$\therefore \text{جتا}^2\theta = 1 - \frac{576}{625} = \frac{625}{625} - \frac{576}{625}$

$\therefore \text{جتا}^2\theta = \frac{49}{625}$

$\therefore \text{جتا}\theta = \pm\sqrt{\frac{49}{625}} = \pm\frac{7}{25}$

وحيث أن θ تقع في الربع ④

$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{7}{25}$.

تمارين (١ - ٥) ص ٧٢

رياضيات : (١١١) رقم (٩)

إعداد : أ. عائشة ناصر

أولاً :-

١ إذا كانت $\text{جا}\theta = \frac{٥}{١٣}$ ، $\theta \in]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فأوجدي : $\text{جتا}\theta$ ، $\text{ظا}\theta$.

$\text{جتا}^٢\theta = ١ - \text{جا}^٢\theta = ١ - (\frac{٥}{١٣})^٢$

$= ١ - \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٦٩}{١٦٩} - \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٤٤}{١٦٩}$

$\therefore \text{جتا}\theta = \pm \frac{١٢}{١٣}$.

$\because \theta \in]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ ، $\therefore \text{جتا}\theta = \frac{١٢}{١٣}$

$\therefore \text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\frac{٥}{١٣}}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{٥}{١٢}$

٢ إذا كانت $\text{ظا}\theta = -\frac{٧}{١٥}$ ، $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢}, ٢\pi[$ فأوجدي قيمة $\text{جتا}\theta$ ، $\text{جا}\theta$.

$\text{جتا}^٢\theta = ؟$

$\because ١ + \text{ظا}^٢\theta = \text{قا}^٢\theta \Leftarrow ١ + (-\frac{٧}{١٥})^٢ = \text{قا}^٢\theta$

$\Leftarrow \text{قا}^٢\theta = \frac{٢٢٥}{٢٢٥} + \frac{٤٩}{٢٢٥}$

$\therefore \text{قا}^٢\theta = \frac{٢٧٤}{٢٢٥} \Leftarrow \text{قا}\theta = \pm \frac{١٧}{١٥}$

$\because \theta \in$ الربع الرابع ، $\therefore \text{قا}\theta = \frac{١٧}{١٥} \Leftarrow$

$\frac{١}{\text{جتا}\theta} = \frac{١٧}{١٥} \Leftarrow \text{جتا}\theta = \frac{١٥}{١٧}$.

$\text{جا}\theta = ؟$

$\because \text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \Leftarrow \text{جا}\theta = \text{ظا}\theta \times \text{جتا}\theta$

$= \frac{٨}{١٥} \times \frac{١٥}{١٧} = \frac{٨}{١٧}$

٣ إذا كانت $\text{جتا}\theta = -٠٫٣$ ، $\theta \in]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فأوجدي $\text{جا}\theta$ ، $\text{ظا}\theta$.

$\text{جا}^٢\theta = ١ - \text{جتا}^٢\theta$.

$= ١ - (-\frac{٣}{١٠})^٢ = ١ - \frac{٩}{١٠٠} = \frac{١٠٠}{١٠٠} - \frac{٩}{١٠٠}$

$\text{جا}^٢\theta = \frac{٩١}{١٠٠} \Leftarrow \text{جا}\theta = \pm ٠٫٩٥$

$\therefore \text{جا}\theta = -٠٫٩٥$ لأن θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{-٠٫٩٥}{-٠٫٣} = +٣١٦٩٠$

٤ إذا كانت $\text{قتا}\theta = \frac{١٧}{١٥}$ ، $\theta \in]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فأوجدي قيمة $\text{ظا}\theta$ ، $\text{جتا}\theta$.

$\because \text{قتا}\theta = \frac{١٧}{١٥} \Leftarrow \text{قتا}\theta = \frac{١}{\text{جا}\theta}$ تابع ←

تابع ٤ :

$\frac{١}{\text{جا}\theta} = \frac{١٧}{١٥} \Leftarrow \text{جا}\theta = \frac{١٥}{١٧}$

$\therefore \text{جتا}^٢\theta = ١ - \text{جا}^٢\theta = ١ - (\frac{١٥}{١٧})^٢ = \frac{٢٨٩}{٢٨٩} - \frac{٢٢٥}{٢٨٩}$

$\therefore \text{جتا}^٢\theta = \frac{٦٤}{٢٨٩} \Leftarrow \text{جتا}\theta = \pm \frac{٨}{١٧}$.

$\therefore \text{جتا}\theta = -\frac{٨}{١٧}$ لأن θ تقع في الثاني .

$\text{ظا}\theta = ؟$

$\because \text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\frac{١٥}{١٧}}{-\frac{٨}{١٧}} = -\frac{١٥}{٨}$

ثانياً : - إثبات :

١ $\text{جا}^٣\theta \, \text{قتا}\theta + \text{جتا}^٣\theta \, \text{قا}\theta = ١$

ط. الأيمن :-

$\text{جا}^٣\theta \times \frac{١}{\text{جا}\theta} + \text{جتا}^٣\theta \times \frac{١}{\text{جتا}\theta} = \text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta$

$= ١ =$ ط. الأيسر

٢ $(\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta)^٢ = ١ - ٢\,\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta$

ط. الأيمن :

بفك القوس $(\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta)^٢ = \text{جا}^٢\theta - \text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta$

$+ \text{جتا}^٢\theta = \text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta - \text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta$

$= ١ - \text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta =$ ط. الأيسر

٣ $١ - ٢\,\text{جتا}^٢\theta + \text{جتا}^٤\theta = \text{جا}^٤\theta$

ط. الأيمن :

يمكن وضع المقدار الثلاثي على صورة مربع كامل كالتالي :

$(١ - \text{جتا}^٢\theta)^٢ = (\text{جا}^٢\theta)^٢ = \text{جا}^٤\theta =$ ط. الأيسر

٤ $\frac{\text{جا}^٤\theta - \text{جتا}^٤\theta}{\text{جا}^٢\theta - \text{جتا}^٢\theta} = ١$

$\frac{(\text{جا}^٢\theta - \text{جتا}^٢\theta)(\text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta)}{\text{جا}^٢\theta - \text{جتا}^٢\theta} = \text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta$

$= ١ =$ ط. الأيسر .

تابع ←

إعداد : P. عائشة بافقر

تابع ثانياً : الإثبات :

٥ $\text{قا}^2\theta\,(1-\text{جا}^2\theta) = 1$

ط. الأيمن :- $\because 1-\text{جا}^2\theta = \text{جتا}^2\theta$

$\therefore \text{قا}^2\theta \times \text{جتا}^2\theta = \frac{1}{\text{جتا}^2\theta} \times \text{جتا}^2\theta = 1 =$ ط. الأيسر

٦ $\text{جا}^2\theta\,(1+\text{ظتا}^2\theta) = 1 \quad ,\ \text{جا}\theta \neq 0$

ط. الأيمن :-

$\because 1+\text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta$ بالتعويض عند القوس في الطرف الأيمن ينتج :-

$\therefore \text{جا}^2\theta \times \text{قتا}^2\theta =$

$\frac{1}{\text{جا}^2\theta} \times \text{جا}^2\theta = 1 =$ ط. الأيسر

٧ $\text{ظتا}\theta\,(1+\text{ظا}^2\theta) = \text{ظا}\theta + \text{ظتا}\theta$

ط. الأيمن :- باستخدام التوزيع

$\text{ظتا}\theta + \text{ظتا}\theta\,\text{ظا}^2\theta =$

$\text{ظتا}\theta + \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} \times \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \text{ظتا}\theta + \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$= \text{ظتا}\theta + \text{ظا}\theta$

$=$ ط. الأيسر

٨ $\text{جتا}\theta\,\text{ظتا}\theta + \text{جا}\theta = \text{قتا}\theta \quad ,\ \text{جا}\theta \neq 0$

ط. الأيمن :-

$\text{جتا}\theta \times \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} + \text{جا}\theta$ باستخدام التعريف

$= \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}\theta} + \text{جا}\theta =$ بتوحيد المقامات .

$= \frac{\text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{1}{\text{جا}\theta} = \text{قتا}\theta$

$=$ ط. الأيسر

٩ $(\text{جا}\theta + \text{قتا}\theta)^2 = 3 + \text{جا}^2\theta + \text{ظتا}^2\theta \quad ,\ \text{جا}\theta \neq 0$

ط. الأيمن :- بفك القوس .

$\text{جا}^2\theta + 2\,\text{جا}\theta\,\text{قتا}\theta + \text{قتا}^2\theta$

$\text{جا}^2\theta + 2\,\text{جا}\theta \times \frac{1}{\text{جا}\theta} + 1 + \text{ظتا}^2\theta$

$\text{جا}^2\theta + 2 + 1 + \text{ظتا}^2\theta$

$= \text{جا}^2\theta + 3 + \text{ظتا}^2\theta =$ ط. الأيسر

تابع

١٠ $\text{جتا}\theta\,(\text{قا}^2\theta - 1) = \text{جا}^2\theta \quad ,\ \text{جتا}\theta \neq 0$

ط. الأيمن :-

$\because 1+\text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta \Leftarrow \text{قا}^2\theta - 1 = \text{ظا}^2\theta$ بالتعويض ينتج :-

$\therefore \text{جتا}\theta \times \text{ظا}^2\theta = \text{جتا}\theta \times \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \text{جا}^2\theta$

$=$ ط. الأيسر

١١ $\frac{\text{جا}\theta}{\text{قتا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{\text{قا}\theta} = 1 \quad ,\ \text{قتا}\theta \neq 0 \ ,\ \text{قا}\theta \neq 0$

ط. الأيمن :-

$\frac{\text{جا}\theta}{\frac{1}{\text{جا}\theta}} + \frac{\text{جتا}\theta}{\frac{1}{\text{جتا}\theta}} = \text{جا}\theta \times \text{جا}\theta + \text{جتا}\theta \times \text{جتا}\theta$

$= \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta$

$= 1 =$ ط. الأيسر

١٢ $(1+\text{جا}\theta)(1-\text{جا}\theta) = \frac{1}{\text{قا}^2\theta} \quad ,\ \text{قا}\theta \neq 0$

ط. الأيمن :

$1 - \text{جا}^2\theta = \text{جتا}^2\theta$

ط. الأيسر : $\frac{1}{\text{قا}^2\theta} = \text{جتا}^2\theta$

$\therefore$ ط. الأيمن $=$ ط. الأيسر .

١٣ $(1-\text{جا}^2\theta)(1+\text{ظا}^2\theta) = 1$

ط. الأيمن :

$\text{جتا}^2\theta \times \text{قا}^2\theta = \text{جتا}^2\theta \times \frac{1}{\text{جتا}^2\theta} = 1$

$=$ ط. الأيسر

١٤ $\text{قا}\theta - \text{جتا}\theta = \text{ظا}\theta\,\text{جا}\theta$

ط. الأيمن :-

$\frac{1}{\text{جتا}\theta} - \text{جتا}\theta$

بتوحيد المقامات ينتج :-

$= \frac{1}{\text{جتا}\theta} - \frac{1}{1} \times \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$= \frac{1}{\text{جتا}\theta} - \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{1-\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\theta}$

$= \frac{\text{جا}\theta \times \text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \text{ظا}\theta \times \text{جا}\theta$

$=$ ط. الأيسر .