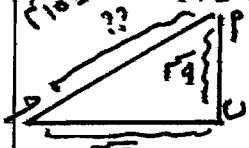
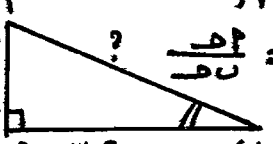
١ $\triangle أ ب حـ$ قائم في ب ، $أ ب = ٩$ سم ، $ب حـ = ١٢$ سم فأوجد:
جا $حـ$ ، جتا $حـ$ ، ظا $حـ$ ، جا $أ$ ، جتا $أ$ ، ظا $أ$.



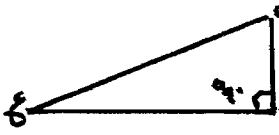
$(أ حـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢$
$= ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥ \Leftarrow$
$أ حـ = ١٥$ سم ، جا $حـ = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٩}{١٥}$
جتا $حـ = \frac{\text{ض. المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{١٢}{١٥}$ ، ظا $حـ = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{ض. المجاور}} = \frac{٩}{١٢}$
جا $أ = \frac{١٢}{١٥}$ ، جتا $أ = \frac{٩}{١٥}$ ، ظا $أ = \frac{١٢}{٩}$.

٢ $\triangle أ ب حـ$ قائم في $حـ$ ، $أ حـ = ٢٤$ سم ، ظا $ب = \frac{٨}{١٥}$ فأوجد
$ب حـ$ ، $أ ب$ ، جا $ن$ ، جتا $ب$ ، ظا $أ$.



$\therefore$ ظا $ب = \frac{٨}{١٥} = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{ض. المجاور}} = \frac{أ حـ}{ب حـ}$
$\frac{٨}{١٥} = \frac{٢٤}{ب حـ} \Leftarrow$
$٨ ب حـ = ١٥ \times ٢٤ \Leftarrow ب حـ = \frac{١٥ \times ٢٤}{٨} = ٤٥$ سم
$\therefore (أ ب)^٢ = (أ حـ)^٢ + (ب حـ)^٢$
$= (٢٤)^٢ + (٤٥)^٢ = ٥٧٦ + ٢٠٢٥ = ٢٦٠١$
$\therefore أ ب = \sqrt{٢٦٠١}$ سم
$\therefore$ جا $ب = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٢٤}{\sqrt{٢٦٠١}}$ ، جتا $ب = \frac{\text{ض. المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤٥}{\sqrt{٢٦٠١}}$
ظا $أ = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{ض. المجاور}} = \frac{٤٥}{٢٤} = \frac{١٥}{٨}$

٣ $\triangle س ص ع$ قائم في ص ، ٦١ جا $س = ٦٠$ فأوجد:
قيمة ٢ جا $س - ٥$ جتا $س$

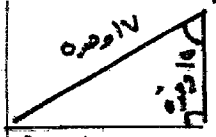


$\therefore$ ٦١ جا $س - ٦٠ = ٠$
$\therefore$ جا $س = \frac{٦٠}{٦١} = \frac{\text{ص ع}}{\text{س ع}}$
نرسم مثلث $س ص ع$ القائم في ص حيث ص ع $= ٦٠$ وحدة
$س ع = ٦١$ وحدة.
$\therefore (س ص)^٢ = (س ع)^٢ - (ص ع)^٢$
$= (٦١)^٢ - (٦٠)^٢ = ٣٧٢١ - ٣٦٠٠ = ١٢١$
$\therefore س ص = ١١$ وحدة.
$\therefore$ جتا $س = \frac{\text{ض. المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{١١}{٦١}$
$\therefore ٢$ جا $س - ٥$ جتا $س$
$= ٢ \times \frac{٦٠}{٦١} - ٥ \times \frac{١١}{٦١} = \frac{١٢٠ - ٥٥}{٦١} = \frac{٦٥}{٦١}$

٤ إذا كان ١٥ جا $أ = ٨$ جتا $أ$ ، $أ \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فأوجد
قيمة $٣ (قا أ + ظا أ)$.

يتبع ←

تابع **٤**:

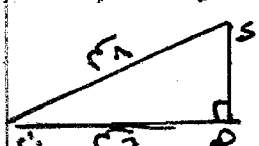


$\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = \frac{٨}{١٥} \Leftarrow$ ظا $أ = \frac{٨}{١٥}$
نرسم مثلث $أ ب حـ$ قائم في ب
ظا $أ = \frac{٨}{١٥} = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{ض. المجاور}} = \frac{ب حـ}{أ ب}$
حيث $ب حـ = ٨$ وحدات طولية ، $أ ب = ١٥$ وحدة طولية
$\therefore (أ حـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢$
$(أ حـ)^٢ = (٨)^٢ + (١٥)^٢ = ٦٤ + ٢٢٥$
$(أ حـ)^٢ = ٢٨٩ \Leftarrow أ حـ = ١٧$ وحدة طولية.
$\therefore ٣ (قا أ + ظا أ) = ٣ (\frac{١}{\text{جتا أ}} + \text{ظا أ}) =$
$٣ (\frac{١٧}{١٥} + \frac{٨}{١٥}) = ٣ \times \frac{(٢٥)}{١٥} = ٥$

٥ إذا كان ٧ ظا $أ - ٢٤ = ٠$ ، $أ \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فأوجد قيمة
أ) $١ - ٢$ ظا $أ$ جتا $أ$
ب) $\frac{\text{جا أ} + \text{جتا أ}}{\text{جا أ} - \text{جتا أ}}$

٧ ظا $أ = ٢٤ \Leftarrow$ ظا $أ = \frac{٢٤}{٧} = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{ض. المجاور}} = \frac{ب حـ}{أ ب}$
نرسم مثلث قائم الزاوية في ب ، حيث $ب حـ = ٢٤$ وحدة ، $أ ب = ٧$ وحدات.
$\therefore (أ حـ)^٢ = (ب حـ)^٢ + (أ ب)^٢ \Leftarrow (أ حـ)^٢ = (٧)^٢ + (٢٤)^٢$
$\therefore (أ حـ)^٢ = ٤٩ + ٥٧٦ = ٦٢٥$
$\therefore أ حـ = ٢٥$ وحدة طولية. ومن الرسم نجد أن جتا $أ = \frac{٧}{٢٥}$
$\therefore ١ - ٢ \times \frac{٢٤}{٢٥} \times \frac{٧}{٢٥} = ١ - \frac{٤٨}{٢٥} = \frac{٢٥}{٢٥} - \frac{٤٨}{٢٥}$
$= \frac{-٢٣}{٢٥}$

٦ دهن مثلث قائم في هـ ، ك د ن $= ٩٠°$ ،
ظتا $ك = \frac{٤}{٣}$ فأوجد قيمة كل مما يلي: هـ ن ، ك هـ ،
جا$^٢ ك + ٢$ جتا $ك$.



نرسم مثلث ك هـ ن قائم في هـ
$\therefore$ ظتا $ك = \frac{٤}{٣} \Leftarrow$ ظا $ك = \frac{٣}{٤}$
ظا $ك = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{ض. المجاور}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{هـ ن}}{٨}$
$\therefore ٤$ هـ ن $= ٣ \times ٨ \Leftarrow$ هـ ن $= \frac{٢٤}{٤} = ٦$
$\therefore (ك هـ)^٢ = (ك ن)^٢ - (هـ ن)^٢$
$(ك هـ)^٢ = (٨)^٢ - (٦)^٢ \Leftarrow ك هـ = \sqrt{٢٨} = \sqrt{٤ \times ٧} = ٢\sqrt{٧}$ سم

جا$^٢ ك + ٢$ جتا $ك$
$= \frac{٩}{١٦} + ٢ \times \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣٣}{١٦}$

جتا $ك = ١ - \frac{٩}{١٦} = \frac{٧}{١٦}$
جا$^٢ ك = \frac{٩}{١٦}$

إعداد: أ.م. عائشة بامقر

١ إذا كانت قاهـ = $\frac{١٣}{١٢}$ ، هـ زاوية حادة موجبة
وجد قيمة ظاهـ + قاهـ ثم أثبت أن:
$(\text{ظاهـ} + \text{قاهـ})^{٢} = \frac{١ + \text{جاهـ}}{١ - \text{جاهـ}}$.

∵ قاهـ = $\frac{١٣}{١٢}$ ، ∴ جتاهـ = $\frac{١٢}{١٣} = \frac{\text{ض. المجاور}}{\text{الوتر}}$

∴ جاهـ = $\frac{٥}{١٣} = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{الوتر}}$

نرسم مثلث أ ب حـ قائم في ب حيث ب حـ = ١٢ وحدة ،
أ حـ = ١٣ وحدة

∴ $(\text{أ ب})^{٢} = (\text{أ حـ})^{٢} - (\text{ب حـ})^{٢}$

$= ١٦٩ - ١٤٤ = ٢٥$ ، ∴ أ ب = $\sqrt{٢٥} = ٥$

∴ قيمة ظاهـ + قاهـ = $\frac{٥}{١٢} + \frac{١٣}{١٢} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

ب ٧ البرهان :-

ط. الأيمن = $(\text{ظاهـ} + \text{قاهـ})^{٢} = \left(\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} + \frac{١}{\text{جتاهـ}}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{\text{جاهـ} + ١}{\text{جتاهـ}}\right)^{٢} = \frac{(\text{جاهـ} + ١)^{٢}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$

ط. الأيسر : $\frac{١ + \text{جاهـ}}{١ - \text{جاهـ}}$ × المرافق

$\frac{١ + \text{جاهـ}}{١ - \text{جاهـ}} \times \frac{١ + \text{جاهـ}}{١ + \text{جاهـ}} = \frac{(١ + \text{جاهـ})^{٢}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{هـ}}$

وحيث أن ١ - جا^{٢}هـ = جتا^{٢}هـ

∴ $\frac{(١ + \text{جاهـ})^{٢}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$

∴ الطرفان متساويان

٨ إذا كان د هـ ن مثلث قائم الزاوية في هـ ، د هـ = ٤٠ سم ،
د ن = ٤١ سم أوجد: قيمة قاء - ظاء

(هـ ن)^{٢} = (د ن)^{٢} - (د هـ)^{٢}

(هـ ن)^{٢} = (٤١)^{٢} - (٤٠)^{٢}

= ١٦٨١ - ١٦٠٠ = ٨١

∴ هـ ن = ٩ سم

∴ قيمة قاء - ظاء = $\frac{٤١}{٤٠} - \frac{٩}{٤٠} = \frac{٤ \times ٨}{٤٠ \times ٥} = \frac{٤}{٥}$

$\left.\begin{array}{l} \text{قاء} = \frac{١}{\text{ظاء}} \\ = \frac{٤١}{٤٠} \\ \text{ظاء} = \frac{٩}{٤٠} \end{array}\right\}$

٩ إذا كان جاأ = $\frac{٧}{٢٥}$ ، ظب = $\frac{٩}{٤٠}$ ، أ ، ب قياسا زاويتين حادتين
أوجد: قيمة $\frac{٥ \text{ جتاأ} + ٨ \text{ ظاب}}{٣ \text{ قتاب} + ٨ \text{ قاأ}}$

نرسم مثلث أ ب حـ قائم في ب .

وحيث أن جاأ = $\frac{٧}{٢٥} = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٧ \text{ وحدات}}{٢٥ \text{ وحدة}}$

∴ $(\text{أ ب})^{٢} = (\text{أ حـ})^{٢} - (\text{ب حـ})^{٢}$

$= (٢٥)^{٢} - (٧)^{٢} = ٦٢٥ - ٤٩ = ٥٧٦$

∴ أ ب = $\sqrt{٥٧٦} = ٢٤$ وحدة طولية .

من الرسم نجد أن جتاأ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{٢٤}{٢٥}$

∴ قاأ = $\frac{١}{\text{جتاأ}} = \frac{٢٥}{٢٤}$.

نرسم مثلث آخر أ ب حـ قائم في حـ فيه ظاب = $\frac{٩}{٤٠}$

∵ ظاب = $\frac{٩}{٤٠} = \frac{\text{ض. المقابل}}{\text{ض. المجاور}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ب حـ}}$

وحيث أن ب حـ = ٩ وحدات ،
أ ب = ٤١ وحدة

∴ $(\text{أ ب})^{٢} = (\text{أ حـ})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}$

$= (٩)^{٢} + (٤٠)^{٢} = ٨١ + ١٦٠٠$

∴ $(\text{أ ب})^{٢} = ١٦٨١$ ، ∴ أ ب = $\sqrt{١٦٨١}$
= ٤١ و.ط

من الرسم نجد أن قاب = $\frac{١}{\text{جاب}}$ ⟸

$\frac{١}{\text{جاب}} = \frac{٤١}{٩}$ ⟸ جاب = $\frac{٩}{٤١}$

∴ قيمة $\frac{٥ \text{ جتاأ} + ٨ \text{ ظاب}}{٣ \text{ قتاب} + ٨ \text{ قاأ}} = \frac{٥ \times \left(\frac{٢٤}{٢٥}\right) + ٨ \times \left(\frac{٩}{٤٠}\right)}{٣ \times \left(\frac{٤١}{٩}\right) + ٨ \times \left(\frac{٢٥}{٢٤}\right)}$

∴ قيمة = $\frac{\frac{٢٤}{٥} + \frac{٩}{٥}}{\frac{٤١}{٣} + \frac{٢٥}{٣}} = \frac{\frac{٣٣}{٥}}{\frac{٦٦}{٣}} = \frac{٣}{٢٢} \times \frac{٣٣}{٥} = \frac{٣}{١٠}$

= ٣ و.

تابع