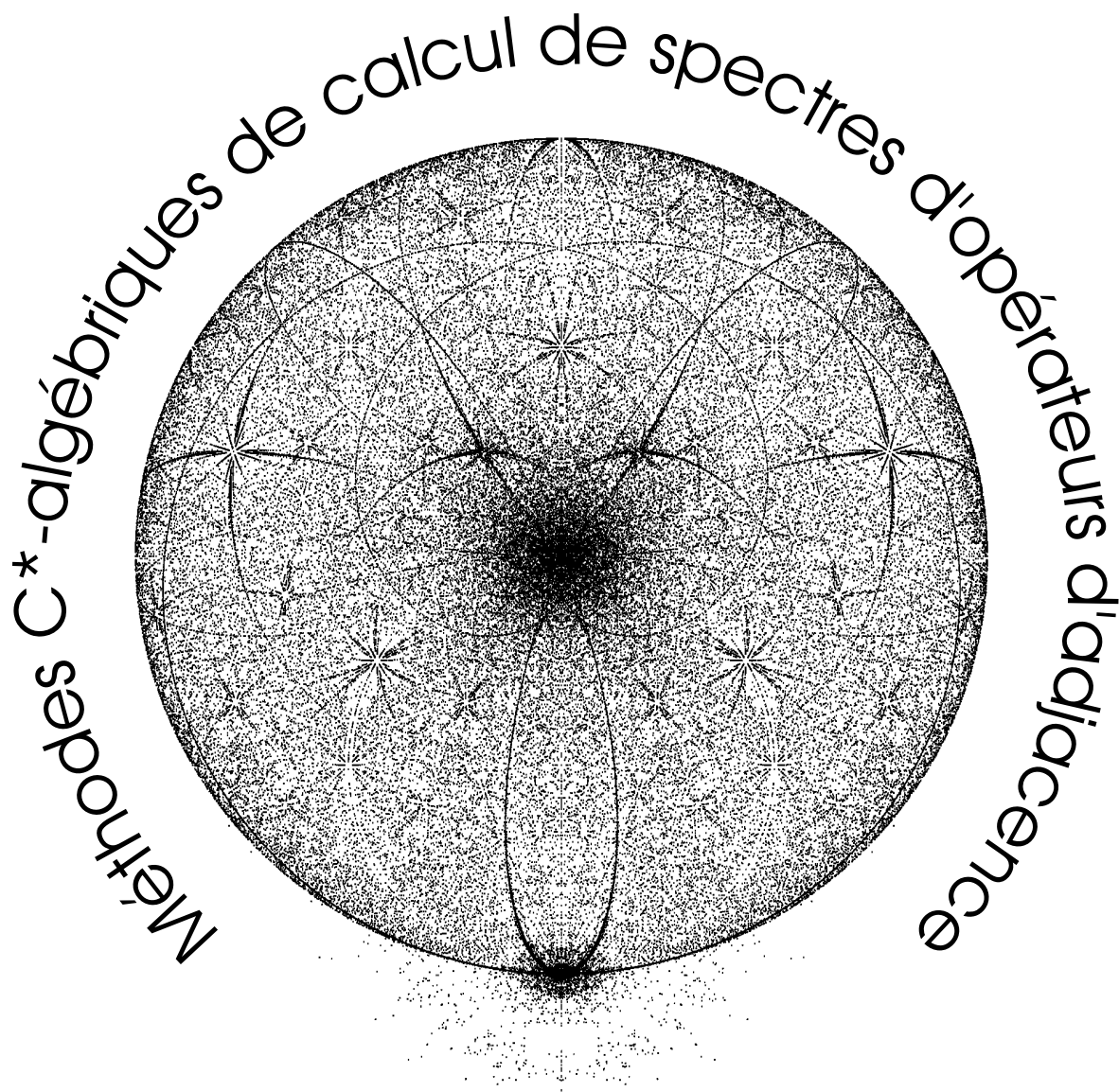


INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

Université de Neuchâtel

Faculté des Sciences

1998



STÉPHANE PERRET

Ce travail de diplôme a été rédigé sous la direction de Monsieur
ALAIN VALETTE

Table des matières

Introduction	1
Remerciements	1
1 Notions de base	3
1.1 Algèbres de Banach	3
1.1.1 Définitions	3
1.1.2 Spectre et rayon spectral	3
1.2 C*-algèbres	4
1.2.1 Définitions	4
1.3 Calcul fonctionnel holomorphe	5
1.3.1 Fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach	6
1.3.2 Le calcul fonctionnel holomorphe	7
1.4 Les C*-algèbres de groupe	10
1.4.1 Algèbres de groupe	10
1.4.2 Représentations de groupe	10
1.4.3 C*-algèbres réduite et maximale	11
1.4.4 Moyennabilité d'un groupe	12
1.4.5 La conjecture des idempotents	13
1.4.6 La C*-algèbre réduite d'un groupe abélien dénombrable	13
2 Spectres d'opérateurs d'adjacence	17
2.1 Graphes de Cayley	17
2.2 Opérateurs d'adjacence	19
2.3 Résultats sur les spectres d'opérateurs d'adjacence	19
2.4 Technique de la surjection	20
2.5 Théorème d'approximation	21
3 Applications	27
3.1 Exemples de calculs de spectres d'opérateurs d'adjacence	27
3.1.1 Groupes finis	27
3.1.2 Le groupe $\mathbb{Z}$	27
3.1.3 Le groupe de Heisenberg	27
3.1.4 Les groupes libres $\mathbb{F}_n$ avec $n \geq 2$	28
3.1.5 Le groupe triangulaire $\Gamma(2, 4, 4)$	28
3.2 Le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$	31
3.2.1 La matrice d'Anosov A	32
3.2.2 Le graphe de Cayley de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$	32
3.2.3 Présentation finie de Γ	34

3.2.4	Une présentation matricielle de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$	35
3.2.5	$\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est résoluble, polycyclique et fortement polycyclique	36
3.2.6	$\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ n'est pas nilpotent	36
3.2.7	$\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est sans torsion	37
3.2.8	Les sous-groupes normaux importants de Γ	37
3.2.9	$\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est résiduellement fini	38
3.2.10	Sur le théorème de Rosenblatt	38
3.3	Application des résultats sur les opérateurs d'adjacence	39
3.3.1	Généralités	39
3.3.2	Spectre périphérique	40
3.3.3	Spectres symétriques	40
3.4	Application de la technique de surjection sur $\mathbb{Z}$ (Fourier)	40
3.5	Résumé de l'état des spectres des T_{S_i}	41
3.6	Application du théorème d'approximation pour $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$	41
4	Décomposition de la régulière	43
4.1	Généralités sur les représentations sur les groupes finis	43
4.1.1	Définitions et principes élémentaires	43
4.1.2	Théorie des caractères	45
4.1.3	Décomposition de la représentation régulière	46
4.1.4	Induction de représentations	47
4.1.5	Technique de recherche de représentations irréductibles d'un produit semi-direct $G = A \rtimes_{\alpha} H$ avec A commutatif	48
4.2	Calcul des représentations irréductibles de Γ_N	48
4.3	Conséquence sur le calcul du spectre	51
4.3.1	Cas particuliers	52
4.4	Lorsque $ \text{Orb} = M_N$	52
4.4.1	Les représentations canoniques	52
4.4.2	Pour les p premiers congrus à 3 ou 7 modulo 10	53
4.5	Calculs numériques	54
5	Dans le groupe de Lie $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$	57
5.1	Théorème de Mackey et induction de représentation dans le cadre d'un groupe localement compact	57
5.1.1	Régularité d'un produit semi-direct	57
5.1.2	Induction de représentation	57
5.1.3	Théorème de Mackey	58
5.2	Extension de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ à $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$	58
5.3	Régularité de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$	59
5.3.1	Orbites de G	59
5.3.2	Régularité de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$	59
5.3.3	Le cas de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$	59
5.4	Calcul des représentations irréductibles de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$	60
5.4.1	Calcul de H_{χ}	60
5.4.2	Calcul de l'induction $\text{Ind}_{\mathbb{R}^2}^G \chi_{(a,b)}$	60
5.5	$\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est un réseau de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$	61
5.6	Des représentations de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$	62
5.6.1	Conclusion	64

A Les nombres de Fibonacci	65
A.1 Fibonacci	65
A.2 Introduction aux nombres de Fibonacci	66
A.3 L'apparition du nombre d'or	66
A.4 Résultats sur les nombres de Fibonacci	67
A.5 Application des fonctions génératrices	69
A.6 Encore des formules	71
B Le produit semi-direct $\rtimes$	73
C Programmes Fortran	75
C.1 Pour T_{S_1} pour tous les représentants	75
C.2 Pour T_{S_4} pour les représentants canoniques	82

Introduction

Dans de nombreux domaines en Mathématiques (par exemple l'analyse numérique ou l'analyse sur les groupes), l'étude du spectre du Laplacien $\Delta = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ est indispensable.

Dans ce travail, on s'intéressera à des méthodes C*-algébriques pour calculer le spectre de ce Laplacien, dans le cas d'un groupe particulier, en passant par l'opérateur d'adjacence, qui est en relation étroite avec le Laplacien.

Soit $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ le graphe de Cayley d'un groupe Γ discret par rapport au système fini de générateurs S , alors le Laplacien discret de $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est donné par :

$$\Delta = |S| - A$$

où A est la "matrice" d'adjacence du graphe $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ définie par $A\xi(x) = \sum_{y \text{ voisin de } x} \xi(y)$.

L'opérateur que l'on va étudier est défini par : $T_S = \frac{A}{|S|}$. On a ainsi la relation : $T_S = 1 - \frac{\Delta}{|S|}$

Ainsi, par calcul spectral, on a : $Sp(\Delta) = |S|(1 - Sp(T_S))$

Les méthodes C*-algébriques ont été introduites par Pierre de la Harpe, A. Guyan Robertson et Alain Valette dans les articles "On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group I et II" (cf. [4] et [5]), dont on présentera quelques résultats importants dans le cadre de ce travail.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui d'une manière ou d'une autre ont collaboré à ce travail de diplôme.

Je dois ainsi un merci tout particulier à mon directeur de travail, Monsieur Alain Valette, sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour, sans compter ses innombrables idées qui m'ont aidées à progresser.

Je remercie aussi Messieurs Olivier Besson et Gautier de Montmollin pour leur aide au sujet de la programmation Fortran dans la partie numérique de ce travail.

Il en va de même pour mon collègue Florian Martin pour son soutien moral (malgré son humour noir quelque peu acerbe).

Sans oublier, tous les assistants et maîtres-assistants pour les conseils prodigués au hasard des rencontres.

Chapitre 1

Notions de base

Dans tout ce travail, le corps de base des algèbres et espaces vectoriels est implicitement le corps complexe $\mathbb{C}$, sauf mention explicite du contraire.

1.1 Algèbres de Banach

1.1.1 Définitions

Définitions :

- Une **algèbre** est un espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni d'un produit interne associatif.
- Une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{A}$ est dite **multiplicative** si $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$.
- Dans ce cas, le couple $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est appelé une **algèbre normée**.
- Si $\mathcal{A}$ possède une unité et $\|1\| = 1$, on dit que $\mathcal{A}$ est une **algèbre normée unitale**.

Définitions :

- Une **algèbre de Banach** est une algèbre normée complète.
- Une **algèbre de Banach unitale** est une algèbre normée complète unitale.

Exemple :

Lorsque E est un espace de Banach, l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{B}(E, E) \stackrel{\text{not.}}{=} \mathcal{B}(E)$ est le prototype d'algèbre de Banach. On note E^* l'espace des formes linéaires continues $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$.

1.1.2 Spectre et rayon spectral

Dans ce paragraphe, toutes les algèbres considérées sont unitales.

Définitions :

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et $a \in \mathcal{A}$.

- a est **inversible** s'il existe un élément $b \in \mathcal{A}$ tel que $ab = ba = 1$.
Cet élément est évidemment unique, on le note : a^{-1} .
- Le **spectre** de a est l'ensemble $Sp(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ n'est pas inversible}\}$.

Théorème :

Soit $a \in \mathcal{A}$ une algèbre de Banach.

Alors, le spectre $Sp(a)$ est un sous-ensemble fermé non vide de $\overline{B(0, \|a\|)}$.

Et la résolvante $\mathbb{C} \setminus Sp(a) \rightarrow \mathcal{A}; \lambda \mapsto (a - \lambda 1)^{-1}$ est différentiable (donc holomorphe au sens de 1.3.1).

Définition :

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $a \in \mathcal{A}$.

Le **rayon spectral** est défini par : $r(a) = \sup_{\lambda \in Sp(a)} |\lambda|$.

Lemme :

Soit $a, b \in \mathcal{A}$ des éléments d'une algèbre de Banach commutative.

Alors, on a $r(ab) \leq r(a)r(b)$ et $r(a+b) \leq r(a) + r(b)$.

Théorème de Beurling :

Soit $a \in \mathcal{A}$ un élément d'une algèbre de Banach.

Alors, on a : $r(a) = \inf_{n \geq 1} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Corollaire :

Soit $a, b \in \mathcal{A}$ des éléments d'une algèbre de Banach tels que $ab = ba$ et $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{A}$.

Alors, on a :

1. $r_{\mathcal{A}}(a) = r_{\mathcal{B}}(a)$ si $a \in \mathcal{B}$.
2. $r(ab) \leq r(a)r(b)$ et $r(a+b) \leq r(a) + r(b)$ où $r = r_{\mathcal{A}}$.

1.2 C*-algèbres

1.2.1 Définitions

Définitions :

- Une **involution** sur une algèbre $\mathcal{A}$ est une application antilinéaire sur $\mathcal{A}$, notée $*$: $a \mapsto a^*$ telle que $a^{**} = a$ et $(ab)^* = b^*a^* \forall a, b \in \mathcal{A}$.
- Le couple $(\mathcal{A}, *)$ est appelé une **algèbre involutive** ou ***-algèbre**.
- Soit $a \in \mathcal{A}$.
 a est dit **autoadjoint** ou **hermitien** si $a^* = a$
 a est dit **normal** si $a^*a = aa^*$ a est dit **unitaire** si $a^*a = aa^* = 1$
 a est une **isométrie** si $a^*a = 1$ a est une **co-isométrie** si $aa^* = 1$
 a est un **projecteur** si $a = a^* = a^2$
- Une **algèbre de Banach involutive** $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach munie d'une involution satisfaisant : $\|a^*\| = \|a\| \forall a \in \mathcal{A}$.
 Si en plus, $\mathcal{A}$ possède une unité, on dit que $\mathcal{A}$ est une **algèbre de Banach involutive unitaire**.

Définition :

Une **C*-algèbre** $\mathcal{A}$ est une algèbre involutive de Banach dont la norme vérifie la **C*-équation** donnée par : $\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in \mathcal{A}$.

Théorème :

Soit $\mathcal{A}$ une C*-algèbre et $a \in \mathcal{A}$ autoadjoint.
Alors, on a : $r(a) = \|a\|$.

Preuve :

Par hypothèse, on a : $\|a^*a\| = \|a^2\| = \|a\|^2$. On en déduit par induction que $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ et enfin, par le théorème de Beurling, il suit que $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$. $\otimes$

Corollaire :

Il y a au plus une norme sur une algèbre de Banach involutive $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}$ soit une C*-algèbre. Lorsque que cette norme existe, on l'appelle la **C*-norme**.

Preuve :

Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux C*-normes sur $\mathcal{A}$.

Comme a^*a est autoadjoint, on a $\|a\|_i^2 = \|a^*a\|_i = r(a^*a) = \sup_{\lambda \in Sp(a^*a)} |\lambda|$ pour $i = 1, 2$.

Ainsi, $\|a\|_1 = \|a\|_2 \quad \forall a \in \mathcal{A}$. $\otimes$

Remarque :

Une algèbre de Banach involutive $\mathcal{A}$ dont la norme vérifie la **C*-inéquation** $\|a^*a\| \leq \|a\|^2 \quad \forall a \in \mathcal{A}$ est une C*-algèbre.

En effet, on a : $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\| \cdot \|a\|$, d'où $\|a\| \leq \|a^*\|$ et comme $a^{**} = a$, on obtient ainsi $\|a\| = \|a^*\|$. De cette manière, on voit que les inégalités sont des égalités.

1.3 Calcul fonctionnel holomorphe

Le but de cette section est d'établir le théorème de l'application spectrale dont le corollaire nous permettra de démontrer la connexité du spectre d'un élément lorsque l'algèbre (de Banach) n'a pas d'idempotents non-triviaux.

La plupart des résultats de cette section sont des conséquences de la théorie classique, ils ne seront ainsi pas démontrés dans le cadre de ce travail de diplôme.

Ces résultats proviennent de [7] et de [12].

1.3.1 Fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow E$ une fonction continue à valeurs dans E .

Définitions :

- f est dite **holomorphe** sur U , si f est différentiable en chaque $z_0 \in U$ au sens que la limite du quotient différentiel usuel existe en topologie normique. Dans ce cas, on note la limite par $f'(z_0)$.
- Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
On définit l'**intégrale de chemin** de f (le long de γ) par :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \lim \sum_{j=1}^n f(\gamma(t'_j)) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

$$\text{avec } a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ et } t_{j-1} \leq t'_j \leq t_j$$

La limite (normique) étant prise au sens $\max_{j=1, \dots, n} \{ |t_j - t_{j-1}| \} \rightarrow 0$.

- Soit Ω un compact dans $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe sur Ω si f est holomorphe sur un ouvert contenant Ω .

Remarques :

1. Soit $a \in \mathcal{B}(E, F)$ où E et F sont des espaces de Banach. On a de manière naturelle :

$$a \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} a(f(z)) dz$$

2. On a :

$$\left\| \int_{\gamma} f(z) dz \right\| \leq \int_a^b \|f(\gamma(t))\| \cdot |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} \|f(z)\| |dz|$$

3. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow E$ holomorphe et $\varrho \in E^*$, alors $\varrho \circ f$ est une fonction holomorphe (ordinaire).

La dernière remarque nous fournit une méthode pour prouver des résultats dans la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach.

Théorème :

Chaque fonction f holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans l'espace de Banach E peut être représentée comme série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(z - z_0)^n$ où les T_n sont dans E , dans le plus grand disque centré en z_0 contenu dans U , ceci pour tout $z_0 \in U$.

Théorème :

- Si $|z - z_0| < (\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|^{1/n})^{-1}$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \|T_n\| \cdot |z - z_0|^n$ converge en norme.
Si $|z - z_0| > (\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|^{1/n})^{-1}$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \|T_n\| \cdot |z - z_0|^n$ ne converge pas en norme.

Notation :

Par analogie avec la situation classique, $(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|^{1/n})^{-1}$ est appelé le **rayon de convergence** de la série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(z - z_0)^n$.

1.3.2 Le calcul fonctionnel holomorphe

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach.

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ une courbe fermée lisse contenant le spectre de a dans son intérieur. Alors :

$$a^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z^n \cdot (z1 - a)^{-1} dz$$

Corollaire :

Soit p un polynôme, $a \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ une courbe fermée lisse contenant le spectre de a dans son intérieur. Alors :

$$p(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} p(z) \cdot (z1 - a)^{-1} dz$$

Définition :

Soit $a \in \mathcal{A}$, U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le spectre de a et $f : U \rightarrow \mathcal{A}$ holomorphe. On définit $f(a)$ par :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(z) \cdot (z1 - a)^{-1} dz$$

où $\mathcal{C}$ est une courbe fermée lisse contenant le spectre de a dans son intérieur.

Remarque :

Par le théorème de Cauchy, $f(a)$ est indépendante de la courbe $\mathcal{C}$ (tant qu'elle contient $Sp(a)$ dans son intérieur).

Définition :

Soit $a \in \mathcal{A}$. On dit que deux fonctions holomorphes sur $Sp(a)$ sont équivalentes si elles coïncident sur un certain ouvert contenant $Sp(a)$.

Le **germe** de f sur $Sp(a)$ est la classe d'équivalence contenant la fonction f .

On note $\mathcal{H}(a)$ l'ensemble de tous les germes des fonctions holomorphes sur $Sp(a)$.

On peut ainsi introduire des opérations d'algèbre sur $\mathcal{H}(a)$.

Notation :

Soit $a \in \mathcal{A}$ et $[f] \in \mathcal{H}(a)$. Comme le domaine de définition de f est un ouvert contenant $Sp(a)$, il existe un ouvert U qui contient $Sp(a)$ et dont la fermeture est contenue dans le domaine de f tel que sa frontière $\mathcal{B}$ consiste en un nombre fini de courbes fermées simples rectifiables $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ d'intérieurs disjoints. Ces courbes sont supposées être positivement orientées de la façon usuelle comme contours d'intégration sur $Sp(a)$.

Ces notations nous permettent de traiter des fonctions holomorphes dont le domaine n'est pas connexe de manière plus fine. (comme dans la preuve du corollaire du théorème de l'application spectrale)

Théorème 1 :

L'application $f \mapsto f(a)$ est un homomorphisme de $\mathcal{H}(a)$ dans $\mathcal{A}$, pour tout $a \in \mathcal{A}$.

Si f est représentée par sa série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur un ouvert contenant le spectre de a , alors :

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot a^n$$

Théorème de l'application spectrale :

Soit $a \in \mathcal{A}$ et $[f] \in \mathcal{H}(a)$, alors :

$$Sp(f(a)) = f(Sp(a))$$

Preuve du théorème 1 :

La linéarité de $f \mapsto f(a)$ est évidente.

A voir : $f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$.

Soit U un ouvert contenant $Sp(a)$ sur lequel f et g sont holomorphes et choisissons des ouverts U_1, U_2 tels que :

$$Sp(a) \subseteq U_1 ; U_1 \cup \mathcal{B}_1 \subseteq U_2 ; U_2 \cup \mathcal{B}_2 \subseteq U$$

où $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, qui sont les frontières respectives de U_1 et U_2 , consistent en un nombre fini de courbes fermées lisses.

Alors :

$$\begin{aligned} f(a) \cdot g(a) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}_1} f(z) \cdot (z1 - a)^{-1} dz \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}_2} g(w) \cdot (w1 - a)^{-1} dw \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{B}_1} \int_{\mathcal{B}_2} f(z) \cdot g(w) \cdot (z1 - a)^{-1} \cdot (w1 - a)^{-1} dz dw \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{B}_1} \int_{\mathcal{B}_2} f(z) \cdot g(w) \cdot \frac{(z1 - a)^{-1} - (w1 - a)^{-1}}{w - z} dz dw \end{aligned}$$

car les opérateurs $(z1 - a)^{-1}$ et $(w1 - a)^{-1}$ commutent. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(a) \cdot g(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}_1} f(z) \cdot (z1 - a)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}_2} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}_2} g(w) \cdot (w1 - a)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}_1} \frac{f(z)}{w - z} dz \right) dw \end{aligned}$$

et comme : $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}_2} \frac{g(w)}{w - z} dw = g(z)$ et $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}_1} \frac{f(z)}{w - z} dz = 0$, car z est dans U_2 et w est en dehors de U_1 (par construction), on obtient :

$$\begin{aligned} f(a) \cdot g(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}_1} (f \cdot g)(z) \cdot (z1 - a)^{-1} dz \\ &= (f \cdot g)(a) \end{aligned}$$

Ainsi, $f \mapsto f(a)$ est un homomorphisme.

Reste à voir :

$$\text{Si } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ sur un ouvert contenant } Sp(A) , \text{ alors } f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot a^n.$$

Soit $\mathcal{D}$ le disque de convergence de la série; $Sp(a) \subset \mathcal{D}$ par hypothèse. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre 0, contenu dans $\mathcal{D}$, et contenant $Sp(a)$ dans son intérieur, alors cette série converge uniformément sur $\mathcal{C}$, donc :

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(z) \cdot (z1 - a)^{-1} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z^n \cdot (z1 - a)^{-1} dz \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot a^n \end{aligned} \quad (*)$$

Preuve du théorème de l'application spectrale :

A voir : $f(Sp(a)) \subset Sp(f(a))$.

Soit $\lambda \in Sp(a)$. Comme $a - \lambda 1$ n'est pas inversible, on a que $\mathcal{A}(a - \lambda 1)$ ou $(a - \lambda 1)\mathcal{A}$ est un idéal propre de $\mathcal{A}$ (il se pourrait que $a - \lambda 1$ ait un inverse à gauche qui bien sûr ne serait pas un inverse à droite ou vice-versa).

Sans nuire à la généralité, supposons que $\mathcal{A}(a - \lambda 1)$ est un idéal propre à gauche dans $\mathcal{A}$, alors :

$$\begin{aligned} 2\pi i [f(a) - f(\lambda)1] &= \int_{\mathcal{B}} f(z) [(z1 - a)^{-1} - (z - \lambda)^{-1}1] dz \\ &= \left(\int_{\mathcal{B}} f(z) [(z1 - a) \cdot (z - \lambda)]^{-1} dz \right) (a - \lambda 1) \in \mathcal{A}(a - \lambda 1) \end{aligned}$$

Ainsi : $f(\lambda) \in Sp(f(a))$ d'où la conclusion.

A voir : $Sp(f(a)) \subset f(Sp(a))$.

Par contraposée : soit $\lambda \notin f(Sp(a))$.

Ainsi : $g(z) = 1/(f(z) - \lambda)$ est holomorphe sur un voisinage ouvert de $Sp(a)$.

Par le théorème 1, $g(a)$ est un inverse de $f(a) - \lambda 1$ dans $\mathcal{A}$. Donc : $\lambda \notin Sp(f(a))$. (*)

Corollaire :

Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $Sp(a)$ n'est pas connexe.

Alors, $\mathcal{A}$ contient un idempotent non-trivial.

Preuve :

Supposons que $Sp(a) = S_1 \cup S_2$ où S_1 et S_2 sont des ensembles fermés disjoints non-vides de $Sp(a)$. Comme $Sp(a)$ est compact, alors S_1 et S_2 sont compacts. Ainsi, il existe deux ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $S_1 \subset U_1$ et $S_2 \subset U_2$.

La fonction f définie par 1 sur U_1 et 0 sur U_2 est banalement holomorphe sur $U_1 \cup U_2$ qui est un voisinage de $Sp(a)$.

(Pour le calcul fonctionnel, prendre $\mathcal{B}$ comme la réunion de courbes contenues entre U_i et S_i)

Ainsi, l'opérateur $b = f(a)$ est un idempotent non-trivial.

En effet, par le théorème 1, on a : $b = f(a) = (f^2)(a) = f(a)f(a) = b^2$ et, par le théorème de l'application spectrale, il suit : $Sp(b) = Sp(f(a)) = f(Sp(a)) = \{0, 1\}$, ce qui montre que b est un idempotent différent de 0 et 1. (*)

1.4 Les C*-algèbres de groupe

1.4.1 Algèbres de groupe

Soit Γ un groupe.

On définit l'algèbre de groupe $\mathbb{C}\Gamma$ par :

$$\mathbb{C}\Gamma = \{f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ à support fini} \}$$

$\mathbb{C}\Gamma$ est une algèbre pour le produit de convolution :

$$(f * g)(s) = \sum_{t \in \Gamma} f(t)g(t^{-1}s)$$

On munit $\mathbb{C}\Gamma$ d'une involution en posant $f^*(s) = \overline{f(s^{-1})} \quad \forall s \in \Gamma$ pour $f \in \mathbb{C}\Gamma$.

La base canonique de $\mathbb{C}\Gamma$ est donnée par les fonctions de Dirac : $\delta_s(t) = \delta_{s,t}$ (symbole de Kronecker).

Dans cette base, on écrit $f = \sum_{s \in \Gamma} f(s)\delta_s$ et $g = \sum_{t \in \Gamma} g(t)\delta_t$.

Dans ce cas, on voit aisément que $f * g = \sum_{s,t \in \Gamma} f(s)g(t)\delta_{st}$.

1.4.2 Représentations de groupe

Définitions :

- Soit Γ un groupe. Une **représentation** de Γ est un couple (π, H) où H est un espace de Hilbert et π un homomorphisme de Γ dans le groupe unitaire $\mathcal{U}(H)$ de $\mathcal{B}(H)$.
- Une représentation (π, H) de Γ est **cyclique** s'il existe un vecteur $\xi \in H$ tel que $\overline{\langle \pi(\Gamma)\xi \rangle} = H$, dans ce cas ξ est alors appelé un **vecteur cyclique**.
- Une représentation (π, H) de Γ est dite **fidèle** si elle est injective.
- Deux représentations (π, H) et (π', H') de Γ sont dites **unitairement équivalentes**, s'il existe un opérateur unitaire $u \in \mathcal{B}(H, H')$ tel que $u \circ \pi(s) = \pi'(s) \circ u \quad \forall s \in \Gamma$. On dit que u est un **opérateur d'entrelacement unitaire**.

Remarque :

Les représentations cycliques de Γ forment une *classe* pour la relation d'équivalence unitaire. Lorsque l'on parle d'une représentation cyclique à équivalence près, on pense à un représentant de la classe dans laquelle cette représentation vit.

Notation :

$l^2(\Gamma) = \{\xi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \mid \|\xi\|^2 = \sum_{s \in \Gamma} |\xi(s)|^2 < \infty\}$ est l'espace de Hilbert des fonctions de Γ dans $\mathbb{C}$ de carré sommable.

On munit $l^2(\Gamma)$ du produit scalaire $(\xi|\nu) = \sum_{s \in \Gamma} \xi(s)\overline{\nu(s)}$.

On a trivialement : $\mathbb{C}\Gamma \subset l^2(\Gamma)$.

Exemples de représentations :**1. La représentation régulière gauche**

$$\begin{aligned}
\lambda : \Gamma &\longrightarrow \mathcal{U}(l^2(\Gamma)) \\
s &\longmapsto \lambda(s) : l^2(\Gamma) \longrightarrow l^2(\Gamma) \\
\xi &\longmapsto \lambda(s)\xi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \\
t &\longmapsto (\lambda(s)\xi)(t) = \xi(s^{-1}t)
\end{aligned}$$

2. La représentation régulière droite

$$\begin{aligned}
\rho : \Gamma &\longrightarrow \mathcal{U}(l^2(\Gamma)) \\
s &\longmapsto \rho(s) : l^2(\Gamma) \longrightarrow l^2(\Gamma) \\
\xi &\longmapsto \rho(s)\xi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \\
t &\longmapsto (\rho(s)\xi)(t) = \xi(ts)
\end{aligned}$$

3. La représentation universelle

La représentation universelle (π_u, H_u) de Γ est la somme directe de toutes les représentations cycliques de Γ (à équivalence près).

Soit $(\pi_i, H_i)_{i \in I}$ l'ensemble des représentations cycliques (à équivalence près) de Γ , $t \in \Gamma$ et $\xi = (\xi_i)_{i \in I} \in H_u = \bigoplus_{i \in I} H_i$, on pose : $\pi_u(t)\xi = (\pi_i(t)\xi_i)_{i \in I}$.

Bien sûr, on a : $\|\pi_u(t)\| = \sup_{i \in I} \|\pi_i(t)\|$.

Proposition :

Les représentations régulières gauche et droite sont cycliques et équivalentes.

D'autre part, on a $\lambda(s)^* = \lambda(s^{-1})$ et $\rho(s)^* = \rho(s^{-1})$.

Preuve :

Le vecteur cyclique de λ et de ρ est donné par δ_1 .

L'opérateur unitaire u est donné par : $u(\xi)(g) = \xi(g^{-1})$. $\circledast$

Proposition :

Les représentations régulières gauche et droite et la représentation universelle sont fidèles.

Preuve :

Routine. $\circledast$

1.4.3 C*-algèbres réduite et maximale**Proposition :**

Soit (π, H) une représentation de Γ .

On étend π par linéarité à $\mathbb{C}\Gamma$ en posant pour $f \in \mathbb{C} : \pi(f) = \sum_{t \in \Gamma} f(t)\pi(t)$.

Alors, $\pi : \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathcal{B}(H)$ est un *-homomorphisme.

Par conséquent, $\pi(\mathbb{C}\Gamma)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}(H)$.

Preuve :

Routine. $\circledast$

Remarques :

1. La régulière gauche devient : $\lambda : \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathcal{B}(l^2(\Gamma))$; $\lambda(f)\xi = f * \xi$.
2. La régulière droite devient : $\varrho : \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathcal{B}(l^2(\Gamma))$; $\varrho(f)\xi = \xi * \check{f}$ où $\check{f}(t) = f(t^{-1})$.

Définition :

Soit (π, H) une représentation de Γ .

La **C*-algèbre** $C_\pi^*(\Gamma)$ est la fermeture de $\pi(\mathbb{C}\Gamma)$ pour la norme opérateur de $\mathcal{B}(H)$.

Ainsi, on note : $\|f\|_{C_\pi^*(\Gamma)} = \|\pi(f)\|_{\mathcal{B}(H)}$.

En particulier : $C_\lambda^*(\Gamma)$ est la **C*-algèbre réduite** de Γ , notée $C_r^*(\Gamma)$.

$C_{\pi_u}^*(\Gamma)$ est la **C*-algèbre maximale** de Γ , notée $C^*(\Gamma)$.

1.4.4 Moyennabilité d'un groupe**Définition :**

Soit Γ un groupe. On dit que Γ est **moyennable** s'il existe une moyenne invariante, c'est-à-dire une application $\mu : \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- i) $\mu(\Gamma) = 1$.
- ii) $\mu(A \amalg B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(\Gamma)$ disjointes.
- iii) $\mu(gA) = \mu(A) \quad \forall g \in \Gamma$.

Théorème :

Tout groupe fini est moyennable.

Tout groupe résoluble est moyennable.

Proposition :

Le groupe libre $\mathbb{F}_n = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ avec $n \geq 2$ n'est pas moyennable.

Ainsi, le groupe libre $\mathbb{F}_n$ avec $n \geq 2$ n'est ni résoluble, ni nilpotent.

Preuve :

Notons $A_i = \{\text{mots réduits commençant par } a_i\}$ et

$A_i^{-1} = \{\text{mots réduits commençant par } a_i^{-1}\}$.

Ainsi, on écrit : $\mathbb{F}_n = \{1\} \amalg \coprod_{i=1}^n (A_i \amalg A_i^{-1}) = a_j A_j^{-1} \amalg A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une moyenne invariante μ , on a donc :

$$\begin{aligned} 1 = \mu(\mathbb{F}_n) &= \mu(\{1\}) + \sum_{i=1}^n (\mu(A_i) + \mu(A_i^{-1})) \\ &= \mu(a_j A_j^{-1}) + \mu(A_j) = \mu(A_j^{-1}) + \mu(A_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

En contemplant la première ligne, on voit : $1 = \mu(\{1\}) + n$ c-à-d $\mu(\{1\}) = 1 - n < 0$.

Ce qui contredit le fait que $\mu(\{1\}) \in [0, 1]$. $\otimes$

Théorème :

Soit Γ un groupe. Alors : Γ est moyennable ssi $C_r^*(\Gamma) = C^*(\Gamma)$.

1.4.5 La conjecture des idempotents

Définition :

Un groupe Γ est dit **sans torsion** si le seul élément d'ordre fini est l'élément neutre.

Conjecture des idempotents :

Soit Γ un groupe dénombrable sans torsion.

Alors, $C_r^*(\Gamma)$ n'a pas d'idempotents non-triviaux.

Remarque :

La conjecture des idempotents a été démontrée dans les cas particuliers suivants :

1. $\Gamma = \mathbb{F}_n$ le groupe libre sur n générateurs pour $n \geq 1$.
2. $\Gamma =$ groupes fondamentaux de surfaces compactes de genre $g \geq 1$ définis par la présentation de groupe $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$.
3. $\Gamma =$ groupes nilpotents.
4. $\Gamma =$ groupes moyennables.
5. **Théorème de Kasparov (1983) :**

Soit $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et Γ un sous-groupe discret sans torsion de G .

Alors, la conjecture des idempotents est vraie pour Γ .

Ce théorème permet de vérifier que le groupe $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ du chapitre 3 satisfait à la conjecture.

1.4.6 La C^* -algèbre réduite d'un groupe abélien dénombrable

Définition :

Soit Γ un groupe abélien, le **dual** de Γ , noté $\widehat{\Gamma}$ est l'ensemble des **caractères unitaires** de Γ . Autrement dit, on a : $\widehat{\Gamma} = \{\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{T} : \chi \text{ homomorphisme}\}$.

Propriétés :

1. $\widehat{\Gamma}$ est un groupe abélien.
2. $\widehat{\Gamma}$ est compact.

En effet, $\widehat{\Gamma}$ est contenu dans $\mathbb{T}^\Gamma$ l'espace de toutes les fonctions de Γ dans $\mathbb{T}$ que l'on munit de la convergence ponctuelle. Par Tychonov, $\mathbb{T}^\Gamma$ est compact. En outre, $\widehat{\Gamma}$ est fermé dans $\mathbb{T}^\Gamma$. D'où la conclusion.

3. Comme $\widehat{\Gamma}$ est un groupe compact abélien, il existe une unique mesure de Haar m normalisée (càd une mesure de probabilité) invariante par translation (cf. [14]).
Pour $f : \widehat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{C}$, on note $m(f) = \int_{\widehat{\Gamma}} f(\chi) d\chi$ la mesure associée à f .
L'ensemble des fonctions sur $\widehat{\Gamma}$ de carré intégrable au sens de m est évidemment noté $L^2(\widehat{\Gamma})$.

Théorème de Pontryagin :

Le plongement canonique suivant est un isomorphisme de groupe :

$$\begin{aligned} \alpha : \Gamma &\longrightarrow \widehat{\widehat{\Gamma}} \\ s &\longmapsto \alpha(s) : \widehat{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{T} \\ \chi &\longmapsto \alpha(s)\chi = \alpha_s(\chi) = \chi(s) \end{aligned}$$

Preuve :

Se référer à [14]. $\circledast$

Rappels :

1. $l^2(\Gamma)$ est le complété de $\mathbb{C}\Gamma$ pour la norme $\|f\| = \sqrt{\sum_{s \in \Gamma} |f(s)|^2}$.
2. $L^2(\widehat{\Gamma})$ est le complété de $\mathcal{C}(\widehat{\Gamma})$ pour la norme $\|f\| = \sqrt{\int_{\widehat{\Gamma}} |f(\chi)|^2 d\chi}$.

Lemme :

Soit G un groupe abélien compact et χ_1, χ_2 deux caractères continus de G .

Alors : $\int_G \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)} dg = \delta_{\chi_1, \chi_2}$.

Preuve :

Il est clair que si $\chi_1 = \chi_2$, on a $\int_G \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)} dg = 1$, car la mesure de Haar dg est normalisée.

Dans le cas où $\chi_1 \neq \chi_2$, il existe $g_0 \in G$ tel que $\chi_1(g_0) \neq \chi_2(g_0)$ et on a :

$$\chi_1(g_0) \int_G \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)} dg = \int_G \chi_1(g_0 g) \overline{\chi_2(g)} dg = \int_G \chi_1(h) \overline{\chi_2(g_0^{-1}h)} dh = \chi_2(g_0) \int_G \chi_1(h) \overline{\chi_2(h)} dh$$

Ce qui conclut la preuve. $\circledast$

Théorème :

Soit Γ un groupe abélien dénombrable.

Alors : $C_r^*(\Gamma) = \mathcal{C}(\widehat{\Gamma})$.

Preuve :

Considérons la transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathcal{C}(\widehat{\Gamma}); f \mapsto \left(\mathcal{F}(f) : \chi \mapsto \sum_{s \in \Gamma} f(s) \chi(s) \right)$$

- on a bien : $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}(\widehat{\Gamma})$.
- $\mathcal{F}$ est un $*$ -homomorphisme. (calcul rapide)

On étend $\mathcal{F} : \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathcal{C}(\widehat{\Gamma})$ à $\mathcal{F} : l^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\widehat{\Gamma})$.

Le prolongement $\mathcal{F}$ est une isométrie :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(f)\|^2 &= \int_{\widehat{\Gamma}} |\mathcal{F}(f)\chi|^2 d\chi = \int_{\widehat{\Gamma}} \left| \sum_{s \in \Gamma} f(s)\chi(s) \right|^2 d\chi \\
&= \int_{\widehat{\Gamma}} \left(\sum_{s \in \Gamma} f(s)\chi(s) \right) \overline{\left(\sum_{t \in \Gamma} f(t)\chi(t) \right)} d\chi = \sum_{s,t \in \Gamma} f(s)\overline{f(t)} \int_{\widehat{\Gamma}} \chi(s)\overline{\chi(t)} d\chi \\
&= \sum_{s,t \in \Gamma} f(s)\overline{f(t)} \int_{\widehat{\Gamma}} \alpha_s(\chi)\overline{\alpha_t(\chi)} d\chi \stackrel{\text{Lemme}}{=} \sum_{s,t \in \Gamma} f(s)\overline{f(t)} \delta_{\alpha_s, \alpha_t} \\
&= \sum_{s,t \in \Gamma} f(s)\overline{f(t)} \delta_{s,t} = \sum_{s \in \Gamma} |f(s)|^2 = \|f\|^2 \quad \text{par injectivité de } \alpha
\end{aligned}$$

Soit $\delta_s \in \mathbb{C}\Gamma$, alors : $\mathcal{F}(\delta_s) = \alpha_s$.

En effet, $\mathcal{F}(\delta_s)\chi = \sum_{t \in \Gamma} \delta_s(t)\chi(t) = \chi(s) = \alpha_s(\chi)$ et ceci pour tout $\chi \in \widehat{\Gamma}$.

Comme $L^2(\widehat{\Gamma})$ a une base formée des caractères continus de $\widehat{\Gamma}$, on a $\mathcal{F}(l^2(\Gamma)) = L^2(\widehat{\Gamma})$ (par Pontryagin), càd $\mathcal{F}$ est surjective.

$\mathcal{F}$ est donc un unitaire de $l^2(\Gamma)$ sur $L^2(\widehat{\Gamma})$; elle entrelace la représentation régulière gauche de $\mathbb{C}\Gamma$ sur $l^2(\Gamma)$ et la représentation π de $\mathbb{C}\Gamma$ sur $L^2(\widehat{\Gamma})$ par multiplication par la transformée de Fourier, donnée par :

$$\begin{aligned}
\pi : \mathbb{C}(\Gamma) &\longrightarrow \mathcal{U}(L^2(\widehat{\Gamma})) \\
f &\longmapsto \pi(f) : L^2(\widehat{\Gamma}) \longrightarrow L^2(\widehat{\Gamma}) \\
&\quad \xi \longmapsto \pi(f)\xi = \mathcal{F}(f) \cdot \xi
\end{aligned}$$

En effet, soit $\xi \in L^2(\widehat{\Gamma})$ et $\mu \in l^2(\Gamma)$ tels que $\mathcal{F}(\mu) = \xi$, on a :

$$(\pi(\nu))\xi = \mathcal{F}(\nu) \cdot \mathcal{F}(\mu) = \mathcal{F}(\nu * \mu) = (\mathcal{F} \circ \lambda(\nu) \circ \mathcal{F}^*)\xi$$

Comme $\mathbb{C}\Gamma$ est dense dans $C_r^*(\Gamma)$, l'application $\mathcal{F}$ s'étend linéairement et continûment en une application isométrique encore notée $\mathcal{F} : C_r^*(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(\widehat{\Gamma})$.

Il reste donc à voir que $\mathcal{F}$ est surjective.

1. $\mathcal{F}(C_r^*(\Gamma))$ est fermé dans $\mathcal{C}(\widehat{\Gamma})$ par isométrie.
2. $\mathcal{F}(C_r^*(\Gamma))$ est dense dans $\mathcal{C}(\widehat{\Gamma})$.

En effet, comme $\mathcal{F}(C_r^*(\Gamma))$ sépare les points de $\widehat{\Gamma}$ (cf. ci-après) et que $\mathcal{F}(C_r^*(\Gamma))$ contient la constante 1, le théorème de Stone-Weierstrass nous livre la conclusion.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est l'isomorphisme isométrique souhaité. $\circledast$

Lemme :

$\mathcal{F}(C_r^*(\Gamma))$ sépare les points de $\widehat{\Gamma}$.

Preuve :

$\mathcal{F}(\mathbb{C}\Gamma)$ sépare les points de $\widehat{\Gamma}$:

A voir : $\forall \chi_1 \neq \chi_2 \in \widehat{\Gamma}$ il existe $f \in \mathbb{C}\Gamma$ telle que : $(\mathcal{F}(f))\chi_1 \neq (\mathcal{F}(f))\chi_2$.

Comme $\chi_1 \neq \chi_2$, il existe g tel que $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$ et ainsi par Pontryagin :

$$\alpha(g)(\chi_1) \neq \alpha(g)(\chi_2)$$

De plus, on a vu dans la preuve ci-dessus que : $\alpha_g = \mathcal{F}(\delta_g)$.

Ainsi : $\mathcal{F}(\delta_g)\chi_1 = \alpha_g(\chi_1) \neq \alpha_g(\chi_2) = \mathcal{F}(\delta_g)\chi_2$.

Par conséquent : $\mathcal{F}(\delta_g)\chi_1 \neq \mathcal{F}(\delta_g)\chi_2$.

Ce qui conclut. $\circledast$

Corollaire :

L'application à $\widehat{\mathbb{Z}^n} \cong \mathbb{T}^n$ et $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$ fournit deux cas particuliers à ce théorème.

Chapitre 2

Spectres d'opérateurs d'adjacence

2.1 Graphes de Cayley

Définition :

Soit Γ un groupe discret dénombrable finiment engendré.

Soit S un système fini de générateur de Γ . (non forcément symétrique)

Le **graphe de Cayley** de Γ est un graphe orienté $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ dont les sommets $\mathcal{G}^0$ sont les éléments du groupe et les arêtes $\mathcal{G}^1$ sont les couples (t, ts) avec $t \in \Gamma$ et $s \in S$.

Remarque :

Les arêtes qui possèdent les deux directions sont dessinées sans flèche directionnelle.

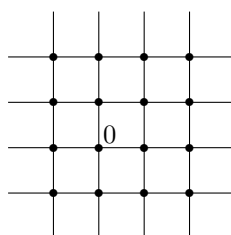
Exemples :

- 1) $\Gamma = \mathbb{Z}; S = \{1\}$

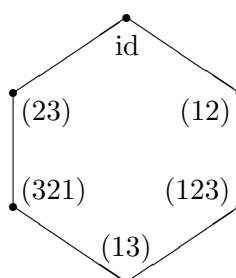


En fait, c'est le graphe de Cayley d'un groupe cyclique infini.

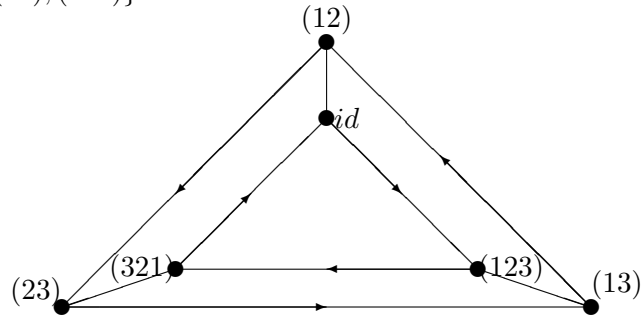
- 2) $\Gamma = \mathbb{Z}^2; S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$



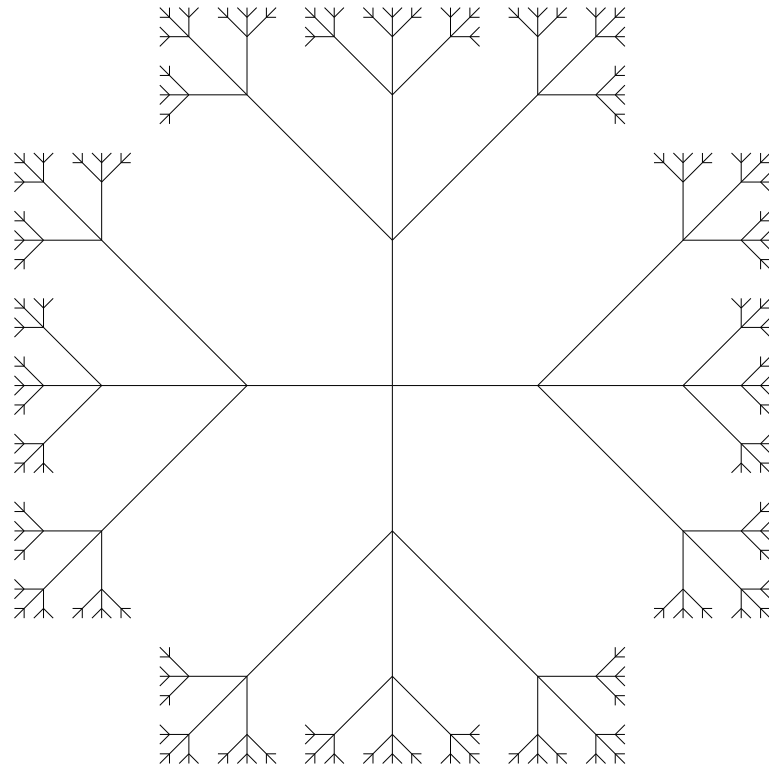
- 3) $\Gamma = \text{Sym}(3); S = \{(12), (23)\}$



- 4) $\Gamma = \text{Sym}(3)$; $S = \{(12), (123)\}$

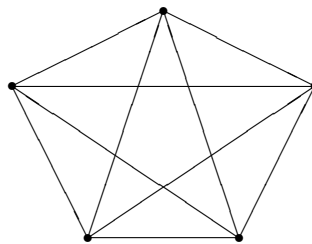


- 5) $\Gamma = \mathbb{F}_2$ le groupe libre à deux générateurs ; $S = \{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}\}$



- 6) Soit Γ un groupe fini d'ordre n ; $S = \Gamma \setminus \{e\}$
Alors $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est le graphe complet à n sommets.

Exemple pour $n = 5$:



En conclusion, remarquons que deux groupes non-isomorphes (en l'occurrence $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\text{Sym}(3)$) peuvent avoir les mêmes graphes de Cayley (prendre $S = \{-1, 1\}$ pour $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$). Ainsi, du point de vue de l'analyse de ces groupes à partir de certains graphes de Cayley, ils auront les mêmes propriétés.

2.2 Opérateurs d'adjacence

Définition :

Soit $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ un graphe de Cayley.

L'**opérateur d'adjacence** est l'opérateur $T_S = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \varrho(\delta_s) \in C_r^*(\Gamma)$.

C'est l'image de la moyenne des générateurs $h_S = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \delta_s \in \mathbb{C}\Gamma$ par la régulière droite.

Interprétation géométrique de l'opérateur d'adjacence :

L'opérateur d'adjacence T_S évalué en $t \in \Gamma$ peut être vu sur le graphe de Cayley comme la moyenne des sommets "arrivant" au point t par les générateurs de S .

En effet, un petit calcul livre : $\varrho(\delta_s) = \varrho(s)$ et $\varrho(s)\delta_t = \delta_{ts^{-1}}$. Ainsi, en identifiant à la manière des algébristes δ_s à s , l'interprétation devient plus visible.

Proposition :

On a $T_S = (T_S)^*$ ssi $S = S^{-1}$, et $\|T_S\| \leq 1$.

Preuve :

Voir 1.4.2. $\otimes$

2.3 Résultats sur les spectres d'opérateurs d'adjacence

Ces résultats sont principalement tirés des articles [4] et [5].

Théorème de Kesten :

Soit Γ un groupe discret finiment engendré.

Soit S^+ un système fini de générateurs de Γ , $S = S^+ \cup (S^+)^{-1}$ son symétrisé et notons $|S^+| = n$.

Soit r le rayon spectral de T_S .

Alors : $\frac{\sqrt{2n-1}}{n} \leq r \leq 1$.

De plus : $r = 1 \Leftrightarrow \Gamma$ moyennable.

Et si $n \geq 2$, on a : $r = \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \Leftrightarrow \Gamma$ est libre sur S^+ .

Dans ce dernier cas, on a : $Sp(T_S) = \left[-\frac{\sqrt{2n-1}}{n}, \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \right]$.

Proposition :

Soit Γ un groupe discret finiment engendré et S un système fini de générateurs de Γ .

1. Soit χ un caractère de Γ , $z \in \mathbb{C}$ tel que $\chi(s) = z \quad \forall s \in S$.
Alors, $Sp(T_S)$ est invariant par multiplication par z .
2. Soit $z \in Sp(T_S) \cap \mathbb{T}$ une valeur spectrale de module 1.
Alors, il existe un caractère χ tel que $\chi(s) = z \quad \forall s \in S$.

Corollaire :

Si $Sp(T_S) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, alors $Sp(T_S) \cap \mathbb{T}$ est un sous-groupe de $\mathbb{T}$.

De plus, on a l'équivalence : $-1 \in Sp(T_S) \Leftrightarrow \mathcal{G}(\Gamma, S \cup S^{-1})$ est bicolorable.

Proposition de la première estimation :

Soit Γ un groupe discret dénombrable non-trivial finiment engendré.

Soit S un système fini, symétrique de générateurs de Γ .

Alors :

1. Si $e \in S$, on a : $\min(Sp(T_S)) \leq 0 < \frac{2}{|S|} \leq \max(Sp(T_S))$.
2. Si $e \notin S$, on a : $\min(Sp(T_S)) \leq -\frac{1}{|S|} < \frac{1}{|S|} \leq \max(Sp(T_S))$.

Théorème de Day :

Soit Γ un groupe finiment engendré et S un système fini de générateurs de Γ .

On a les équivalences :

1. Γ est moyennable.
2. $1 \in Sp(T_S)$.
3. Le rayon spectral de T_S vaut 1, càd $Sp(T_S) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Assertion :

Soit Γ un groupe finiment engendré et S un système fini de générateurs de Γ .

Alors : $Sp(T_S)$ est symétrique par rapport à l'axe réel dans $\mathbb{C}$.

2.4 Technique de la surjection**Théorème :**

Soit Γ un groupe dénombrable et N un sous-groupe normal de Γ .

Alors, il existe un $*$ -homomorphisme surjectif de $C^*(\Gamma)$ sur $C^*(\Gamma/N)$.

Preuve :

Notons $q : \Gamma \rightarrow \Gamma/N$ l'homomorphisme quotient.

On considère l'application linéaire $\pi : \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathbb{C}(\Gamma/N)$; $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\delta_\gamma \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\delta_{q(\gamma)}$.

π est un $*$ -homomorphisme surjectif.

En effet, la surjectivité découle immédiatement de celle de q .

π est continue, car on a : $\|\pi(f)\|_{C^*(\Gamma/N)} = \sup_{\varphi \in R_c(\Gamma/N)} \|\varphi(\pi(f))\|$.

En outre, $\varphi \circ \pi$ est une représentation cyclique de $\mathbb{C}\Gamma$ par surjectivité de π , on en tire :

$$\|\pi(f)\|_{C^*(\Gamma/N)} \leq \sup_{\varphi \in R_c(\Gamma)} \|\varphi(f)\| = \|f\|_{C^*(\Gamma)}$$

Donc : $\|\pi\| \leq 1$ et la continuité en découle.

Comme $\mathbb{C}\Gamma \cong \pi_u(\mathbb{C}\Gamma)$ (par injectivité de la représentation universelle) et que $\pi_u(\mathbb{C}\Gamma)$ est dense dans $C^*(\Gamma)$, on peut étendre π en un $*$ -homomorphisme, noté $\tilde{\pi}$:

$$\tilde{\pi} : C^*(\Gamma) \rightarrow C^*(\Gamma/N)$$

$\tilde{\pi}$ est encore surjective.

En effet, par continuité et le fait que l'image d'un ensemble complet par π est fermé on a :

$$\overline{\pi(\pi_u(\mathbb{C}\Gamma))} \supset \pi(\overline{\pi_u(\mathbb{C}\Gamma)}) = \overline{\pi(\pi_u(\mathbb{C}\Gamma))} \supset \overline{\pi(\pi_u(\mathbb{C}\Gamma))}$$

Ainsi en contemplant le prolongement de π en $\bar{\pi} : \pi_u(\mathbb{C}\Gamma) \rightarrow \pi_u(\mathbb{C}(\Gamma/N))$, on voit que :

$$\pi(C^*(\Gamma) = \pi(\overline{\pi_u(\mathbb{C}\Gamma)}) = \overline{\pi(\pi_u(\mathbb{C}\Gamma))} = \overline{\pi_u(\pi(\mathbb{C}\Gamma))} = \overline{\pi_u(\mathbb{C}(\Gamma/N))} = C^*(\Gamma/N)$$

Car, on a $\pi_u^{\Gamma/N} \circ \pi = \bar{\pi} \circ \pi_u$, càd que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\Gamma & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}(\Gamma/N) \\ \downarrow \pi_u & & \downarrow \pi_u^{\Gamma/N} \\ \pi_u(\mathbb{C}\Gamma) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \pi_u^{\Gamma/N}(\mathbb{C}(\Gamma/N)) \end{array}$$

⊗

Corollaire (technique de la surjection) :

Soit Γ_1 et Γ_2 deux groupes dénombrables dont Γ_1 est moyennable et $q : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ un homomorphisme surjectif.

Alors :

1. il existe un homomorphisme surjectif $\alpha : C_r^*(\Gamma_1) \rightarrow C_r^*(\Gamma_2)$.
2. $\forall x \in C_r^*(\Gamma_1)$, on a : $Sp(\alpha(x)) \subset Sp(x)$.

Preuve :

1. Découle immédiatement du théorème précédent et du fait que Γ_1 est moyennable (ce qui implique manifestement la moyennabilité de Γ_2).
2. Soit $x \in C_r^*(\Gamma_1)$, la contraposée, x inversible implique $\alpha(x)$ inversible, est triviale d'après le point précédent.

⊗

2.5 Théorème d'approximation

Proposition :

Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs normaux sur des espaces de Hilbert H_i telle que $\sup \|T_i\| < \infty$. Alors :

$$Sp\left(\bigoplus_i T_i\right) = \overline{\bigcup_i Sp(T_i)}$$

Preuve :

L'inclusion $Sp(\bigoplus_i T_i) \supset \overline{\bigcup_i Sp(T_i)}$ est claire.

Contrapositions l'autre inclusion.

Soit $z \notin \overline{\bigcup_i Sp(T_i)}$; à voir : l'opérateur $A = \bigoplus_i (T_i - z)$ est inversible.

Comme tous les $(T_i - z)$ sont inversibles, le candidat naturel pour A^{-1} est donné par :

$$A^{-1} = \bigoplus (T_i - z)^{-1}$$

Il reste à voir que : $\|A^{-1}\| < \infty$.

Or, par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $B(z, \varepsilon) \cap \overline{\bigcup Sp(T_i)} = \emptyset$.
càd : $B(0, \varepsilon) \cap \overline{\bigcup Sp(T_i - z)} = \emptyset$.

Donc, pour tout i , on a montré que : $r((T_i - z)^{-1}) < \frac{1}{\varepsilon}$

Comme T normal implique $r(T) = \|T\|$, l'hypothèse de normalité livre :

$$\|A^{-1}\| = \sup \|(T_i - z)^{-1}\| = \sup r((T_i - z)^{-1}) < \frac{1}{\varepsilon} < \infty$$

⊗

Remarque :

Plus tard, on utilisera cette proposition avec des opérateurs autoadjoints, ainsi le fait que T normal implique $r(T) = \|T\|$ sera connu.

Pour montrer ce fait dans le cas des opérateurs normaux, il faut utiliser la théorie de Gelfand-Naimark...

Présentons maintenant quelques notions [6] qui vont nous permettre de démontrer le théorème principal de cette section.

Soit G un groupe localement compact, comme toute représentation ψ de G est somme directe de représentations cycliques, on a :

$$\forall f \in \mathbb{C}G : \|\psi f\| \leq \sup_{[\pi] \text{ cyclique}} \|\pi f\| = \|f\|_{C^*(G)}$$

(On peut étendre ψ à tout $\mathbb{C}G$ en posant $\psi(f) = \int_G f(g)\psi(g)dg$ où dg est la mesure de Haar (comme dans le cas discret))

Et l'on peut donc prolonger la représentation ψ du groupe G en une représentation Ψ de la C^* -algèbre maximale $C^*(G)$ pour avoir :

$$\Psi : C^*(G) \longrightarrow C^*_\psi(G) \text{ (surjective!)}$$

Précisons aussi qu'un **coefficient** d'une représentation (ψ, H) de G associé au vecteur ξ de l'espace de Hilbert H est la fonction de G dans $\mathbb{C}$ qui à g associe le produit scalaire $(\psi(g)\xi|\xi)_H$.

Définition :

Soit G un groupe localement compact et $\psi, (\phi_i)$ des représentations de G .

Soit $\Psi, (\Phi_i)$ les représentations de $C^*(G)$ correspondantes.

Le théorème suivant [6] nous permet de définir la **contenance faible de représentation**.

Théorème :

Sont équivalents :

1. $\ker(\Psi) \supset \bigcup \ker(\Phi_i)$.
2. Tout coefficient de ψ est limite uniforme sur tout compact de sommes de coefficients des ϕ_i .

Si, de plus, ψ est cyclique, alors 1. et 2. sont encore équivalentes à :

3. Tout coefficient de ψ est limite uniforme sur tout compact de coefficients des ϕ_i .

Lorsque l'une de ces équivalences est vérifiée, on dit que Ψ est **faiblement contenue** dans (Φ_i) et on note $\Psi \prec (\Phi_i)$.

Théorème d'approximation dans le cas symétrique :

Soit Γ un groupe discret moyennable et S un système fini, symétrique de générateurs.

Soit (N_m) une suite de sous-groupes normaux de Γ d'indice fini tels que :

$$\dots \subset N_{m+1} \subset N_m \subset \dots \subset \Gamma \text{ et } \bigcap_m N_m = \{e\}$$

Notons : $\Gamma_m = \Gamma/N_m$.

S_m l'image de S par l'application canonique $\phi_m : \Gamma \rightarrow \Gamma_m$ (on a : $\ker(\phi_m) = N_m$).

T_S l'opérateur d'adjacence associé à Γ et S .

T_S^m l'opérateur d'adjacence associé à Γ_m et S_m .

Alors :

$$Sp(T_S) = \overline{\bigcup_m Sp(T_S^m)}$$

Preuve :

- *A voir :* $\overline{\bigcup Sp(T_S^m)} \subset Sp(T_S)$.

Par la technique de la surjection, on a : $Sp(T_S^m) \subset Sp(T_S)$ pour tout m .

D'où la conclusion, car le spectre est fermé.

- *A voir :* $Sp(T_S) \subset \overline{\bigcup Sp(T_S^m)}$.

Voyons tout d'abord que $\varrho \prec \oplus \rho_m$ où ϱ est la représentation régulière droite sur Γ et ρ_m la composition de la régulière droite ϱ_m sur Γ_m avec ϕ_m . On rappelle que ϱ est cyclique de vecteur cyclique δ_e .

A voir : tout coefficient de ϱ est limite ponctuelle (Γ discret) de coefficients de $\oplus \rho_m$.

$$\text{On a : } (\varrho(g)\delta_e|\delta_e) = \delta_{g^{-1}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Et : } (\rho_m(g)\delta_e|\delta_e) = (\varrho_m(gN_m)\delta_{eN_m}|\delta_{eN_m}) = \sum_{h \in N_m} \delta_{g^{-1}N_m}(N_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in N_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Grâce aux hypothèses, on obtient ainsi (lorsque m devient grand) :

$$(\rho_m(g)\delta_e|\delta_e) \rightarrow (\varrho(g)\delta_e|\delta_e)$$

En prenant $\xi = (0, \dots, 0, \delta_e, 0, \dots)$, on a :

$$((\oplus \rho_m)(g)\xi|\xi) \rightarrow (\varrho(g)\delta_e|\delta_e)$$

Donc : $\varrho \prec \oplus \rho_m$.

Aux représentations ϱ et $\oplus \rho_m$ correspondent des représentations de $C^*(\Gamma)$ toujours notées de la même manière et on peut construire un homomorphisme surjectif α tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C^*(\Gamma) & \xrightarrow{\varrho} & C_r^*(\Gamma) \\ & \searrow \oplus \rho_m & \uparrow \alpha \\ & & C_{\oplus \rho_m}^*(\Gamma) \end{array}$$

On vient de voir que $\oplus \rho_m$ est un isomorphisme.

En effet, comme $\varrho \prec \oplus \rho_m$, on a : $\ker(\oplus \rho_m) \subset \ker(\varrho) = \{0\}$ car Γ est moyennable.

Ainsi, α est donné par $\alpha = \varrho \circ (\oplus \rho_m)^{-1}$.

Donc : $Sp(T_S) \subset Sp(\oplus \rho_m(h_S))$ et par la proposition précédente, comme les T_S^m sont autoadjoints, on a :

$$Sp(T_S) \subset \overline{\bigcup_m Sp(T_S^m)} \quad \textcircled{*}$$

Définition :

Un groupe G est dit **résiduellement fini** si pour tout $g \in G$, $g \neq e$, il existe un sous-groupe normal N_g de G tel que G/N_g soit fini et $x \notin N_g$.

Proposition :

Soit Γ un groupe. Sont équivalents :

- i) Γ est résiduellement fini.
- ii) $\forall g \neq e$, $\exists \varphi_g : \Gamma \rightarrow \Gamma_g$ tel que $g \notin \ker \varphi_g$ et $|\Gamma_g| < \infty$.
- iii) $\forall g_1, \dots, g_n \neq e$, $\exists N \triangleleft \Gamma$ tel que $g_i \notin N \forall i$ et $[\Gamma : N] < \infty$.

Preuve :

i) $\Leftrightarrow$ ii) est facile. Prendre $\Gamma_g = \Gamma/N$ ou $N = \ker \varphi_g$ selon le sens.

i) $\Leftarrow$ iii) est banal.

i) $\Rightarrow$ iii) :

Soit $g_1, \dots, g_n \neq e$, $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n$ tels que $\varphi_i : \Gamma \rightarrow \Gamma_i$ tel que $g_i \notin \ker \varphi_i$ et $|\Gamma_i| < \infty$.

Posons $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n; g \mapsto (\varphi_1(g), \dots, \varphi_n(g))$.

Alors $g_i \notin \ker \varphi \forall i$ et $|\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n| < \infty$.

Prendre $N = \ker \varphi$. $\textcircled{*}$

Proposition :

Soit Γ un groupe infini dénombrable. Sont équivalents :

- i) Γ est résiduellement fini.
- ii) $\exists (N_m)_{m \geq 0}$ telle que $N_{m+1} \subset N_m \forall m$ avec $N_m \triangleleft \Gamma$, $[\Gamma : N_m] < \infty$ et $\bigcap_m N_m = \{e\}$.

Preuve :

$\Rightarrow$: Comme Γ est dénombrable, on a : $\Gamma = (g_n)_{n \geq 0} \amalg \{e\}$.

Par hypothèse, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_n : \Gamma \rightarrow \Gamma_n$ tel que $g \notin \ker \varphi_n$ et $|\Gamma_n| < \infty$.

Soit $m \in \mathbb{N}$, posons $\psi_m : \Gamma \rightarrow \Gamma_0 \times \dots \times \Gamma_m; g \mapsto (\varphi_0(g), \dots, \varphi_m(g))$.

Notons $N_m = \ker \psi_m$.

On a : $N_{m+1} \subset N_m$ et $N_m \triangleleft \Gamma \forall m$, de plus : $[\Gamma : N_m] = |\Gamma_0 \times \dots \times \Gamma_m| < \infty$

Par dénombrabilité de Γ , on a encore : $\bigcap_m N_m = \{e\}$.

$\Leftarrow$: Banal! $\otimes$

Remarque :

La proposition précédente montre ainsi que dans le cas d'un groupe infini dénombrable, la condition qui apparaît dans le théorème d'approximation est équivalente à "résiduellement fini".

Chapitre 3

Applications

3.1 Exemples de calculs de spectres d'opérateurs d'adjacence

3.1.1 Groupes finis

Soit Γ un groupe fini d'ordre n .

- $S = \Gamma$:

Dans ce cas, $T_S = T_\Gamma$ est un projecteur et donc $Sp(T_S) = \{0, 1\}$.

- $S = \Gamma - \{e\}$:

Ici, l'opérateur $\frac{1}{n}((n-1)T_S + 1)$ est l'opérateur T_Γ ci-dessus, par conséquent :

$$Sp(T_S) = \left\{ -\frac{1}{n-1}, 1 \right\}$$

3.1.2 Le groupe $\mathbb{Z}$

- $S_1 = \{1\}$:

Par la transformée de Fourier $\left((\xi)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \left(\theta \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n e^{in\theta} \right) \right)$, on doit donc calculer le spectre de :

$$f_{S_1}(\theta) = e^{i\theta} \in L^2(\mathbb{T})$$

Il s'agit du cercle $\mathbb{T}$.

- $S_2 = \{-1, 1\}$:

Par la transformée de Fourier, on doit donc calculer le spectre de :

$$f_{S_2}(\theta) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos(\theta)$$

Il s'agit de l'intervalle $[-1, 1]$.

3.1.3 Le groupe de Heisenberg

C'est le groupe donné par la présentation suivante :

$$\Gamma = \langle r, s, t \mid [r, s] = t; [r, t] = [s, t] = e \rangle$$

Il admet aussi la présentation matricielle (plus célèbre) :

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

Posons $r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Un résultat de C.BÉGUIN, A.VALETTE, A.ZUK (cf. [2]) montre que :

1. Pour $S_1 = \{r, s, r^{-1}, s^{-1}\}$, on a : $Sp(T_{S_1}) = [-1, 1]$.
2. Pour $S_2 = \{r, s, r^{-1}, s^{-1}\}$, on a : $Sp(T_{S_1}) = \left[\frac{-1-\sqrt{2}}{3}, 1 \right]$.

3.1.4 Les groupes libres $\mathbb{F}_n$ avec $n \geq 2$

En prenant S l'ensemble des générateurs canoniques de $\mathbb{F}_n$, on obtient :

$$Sp(T_S) = B\left(0, \frac{1}{\sqrt{|S|}}\right)$$

C'est d'ailleurs aussi valable pour les groupes de surfaces ($g \geq 2$) :

$$\Gamma_g = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \rangle \text{ avec } S = \{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$$

Quant au spectre symétrique associé, un résultat de KESTEN (cf. [8]) montre que :

$$Sp(T_S) = \left[-\frac{\sqrt{2n-1}}{2}, \frac{\sqrt{2n-1}}{2} \right]$$

3.1.5 Le groupe triangulaire $\Gamma(2, 4, 4)$

Ce calcul est un résultat non-publié de TULLIO CECCHERINI-SILBERSTEIN (C'est un exemple de groupe avec torsion dont le spectre de l'opérateur d'adjacence est connexe).

Le groupe triangulaire $\Gamma(2, 4, 4)$

Il s'agit en fait du groupe des symétries du pavage du plan par des triangles isocèles d'angles $\pi/2, \pi/4$, ce qui explique la notation $\Gamma(2, 4, 4)$. Considérons Λ la grille entière dans $\mathbb{R}^2$ et soit A le carré universitaire $[0, 1]^2$ (qui sert de domaine fondamental pour l'action des translations entières sur $\mathbb{R}^2$).

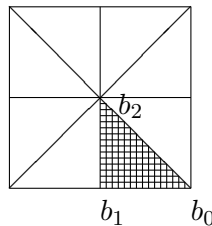
Soit $T(b_0, b_1, b_2) = T$ une subdivision barycentrique de A , disons $b_0 = (1, 0)$, $b_1 = (1/2, 0)$ et $b_2 = (1/2, 1/2)$. Il s'agit du triangle isocèle cité plus haut.

Le groupe triangulaire est : $\Gamma(2, 4, 4) = \langle s_0, s_1, s_2 \rangle$.

où s_0 est la symétrie d'axe contenant le segment $\overline{b_1 b_2}$.

s_1 est la symétrie d'axe contenant le segment $\overline{b_0 b_2}$.

s_2 est la symétrie d'axe contenant le segment $\overline{b_0 b_1}$.



Bien sûr, ces trois générateurs sont d'ordre 2 et l'on vérifie facilement que :

1. s_0s_1 est une rotation d'angle $-\pi/2$ autour de b_2 .
2. s_1s_2 est une rotation d'angle $-\pi/2$ autour de b_0 .
3. s_2s_0 est une rotation d'angle π autour de b_1 .
4. $s_2s_1s_0s_1$ est une translation de 1 vers le bas.
5. $s_0s_1s_2s_1$ est une translation de 1 vers la gauche.

Remarque :

Le groupe $K = \langle s_0, s_1 \rangle$ est isomorphe au groupe diédral $\mathcal{D}_8$ (symétries du carré). En effet, $K = \{1, s_0, s_1, s_0s_1, (s_0s_1)^2, (s_0s_1)^3, s_0s_1s_0, s_1s_0s_1\}$.

Ainsi : $\bigcup_{k \in K} kT = A$.

De cette façon, on voit que T est un domaine fondamental pour l'action de $\Gamma(2, 4, 4)$.

Le groupe triangulaire $\Gamma(2, 4, 4)$ est moyennable, car il s'agit d'une extension des groupes résolubles $\mathbb{Z}^2$ et $\mathcal{D}_8$ (puisque l'on a la suite exacte : $0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Gamma(2, 4, 4) \rightarrow \mathcal{D}_8 \rightarrow 0$) et toute extension de groupes résolubles est résoluble donc moyennable.

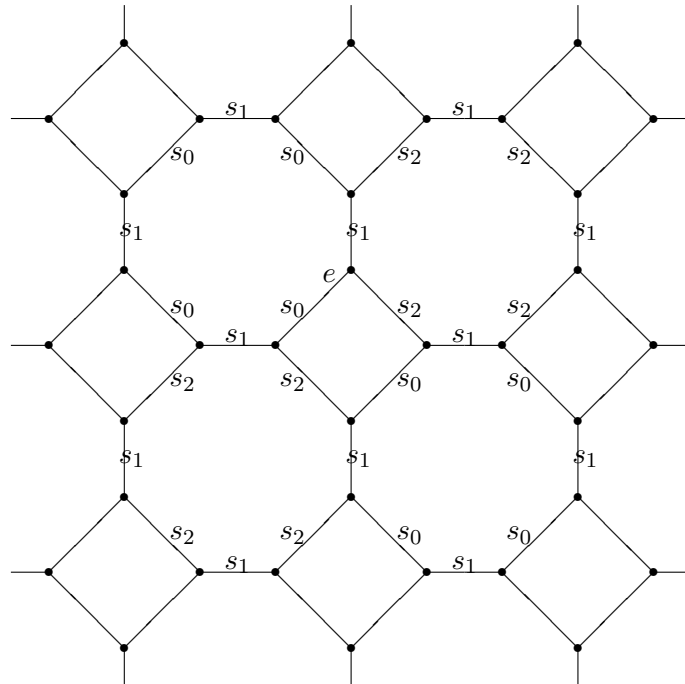
Le reste de ce paragraphe consiste à prouver le théorème suivant :

Théorème :

Soit $S = \{s_0, s_1, s_2\}$ le système de générateurs (symétrique) de Γ .

Alors : $Sp(T_S) = [-1, 1]$.

Tout d'abord présentons le graphe de Cayley de $\Gamma(2, 4, 4)$:



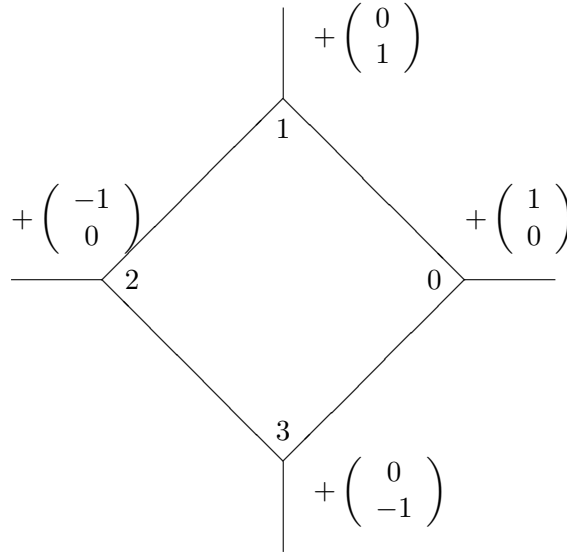
Remarque :

Sur le graphe de Cayley, on voit que $\Gamma(2, 4, 4)$ admet la présentation finie de type Coxeter suivante :

$$\Gamma(2, 4, 4) = \langle s_0, s_1, s_2 \mid s_i^2 = 1; (s_0 s_2)^2 = 1; (s_0 s_1)^4 = 1; (s_1 s_2)^4 = 1 \rangle$$

Le graphe de Cayley est ainsi un pavage de $\mathbb{R}^2$ en losanges et en octogones (les losanges proviennent des rotations d'angle π , les octogones de celles d'angle $\pi/2$).

On indexe de manière naturelle les losanges l par $\mathbb{Z}^2$ avec $l = l(m, n)$ où $m, n \in \mathbb{Z}$. Chaque sommet x du graphe appartient à un unique losange, noté l_x . Comme chaque losange contient 4 sommets $\{x_0^l, x_1^l, x_2^l, x_3^l\}$, on peut donc définir un système de coordonnées pour les sommets par $x = x(m, n, i)$ où $l_x = l(m, n)$ et $x = x_i^l$.



On obtient ainsi la décomposition suivante de $l^2(\Gamma(2, 2, 4))$, car $\Gamma(2, 4, 4) \cong \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ comme ensemble :

$$l^2(\Gamma(2, 2, 4)) \cong l^2(\mathbb{Z}^2) \otimes l^2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2)$$

L'opérateur d'adjacence est donc pour $\xi = (\xi_{m,n,i})_{m,n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \in l^2(\Gamma(2, 2, 4))$:

$$(T_S \xi)_{m,n,i} = \begin{cases} \frac{1}{3}(\xi_{m,n,1} + \xi_{m,n,3} + \xi_{m+1,n,2}) & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{3}(\xi_{m,n,0} + \xi_{m,n,2} + \xi_{m,n+1,3}) & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{3}(\xi_{m,n,1} + \xi_{m,n,3} + \xi_{m-1,n,0}) & \text{si } i = 2 \\ \frac{1}{3}(\xi_{m,n,0} + \xi_{m,n,2} + \xi_{m,n-1,1}) & \text{si } i = 3 \end{cases}$$

Par Fourier, on a : $\mathcal{F}_\Gamma : l^2(\Gamma(2, 2, 4)) \rightarrow \bigoplus L^2(\mathbb{T}^2)$ et T_S se transforme, via conjugaison avec $\mathcal{F}_\Gamma$, en l'opérateur de multiplication $\mathcal{F}_\Gamma T_S \mathcal{F}_\Gamma^{-1} = m_{A(z_1, z_2)}$ où

$$A(z_1, z_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & z_1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \bar{z}_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } z_1, z_2 \in \mathbb{T}$$

Par calcul fonctionnel, on sait que : $\mu \in Sp(T_S) \iff \exists z_1, z_2 \in \mathbb{T} \text{ tq } \mu \in Sp(A(z_1, z_2))$.

On a donc ramené le problème à chercher les racines du polynôme caractéristique de la matrice $A(z_1, z_2)$.

Un petit calcul livre : $(x_i = \operatorname{Re}(z_i))$

$$\det(3A(z_1, z_2) - \nu \mathbb{I}) = \nu^4 - 6\nu^2 - 4(x_1 + x_2)\nu - 4x_1x_2 + 1 = p(x_1, x_2; \nu)$$

Posons $x_1 = 1$.

- $\forall \nu \in [-1, 3]$ et $-1 \leq x_2 \leq 1$, on a :

$$p(1, 1; \nu) \leq p(1, x_2; \nu) \leq p(1, -1; \nu)$$

Soit $r = \sqrt{5}$ la racine de $p(1, -1; \nu)$ strictement plus grande que 2, on a :

$$\forall \nu \in [-1, 1] \cup [r, 3] : p(1, -1; \nu) \geq 0 \text{ et } p(1, 1; \nu) \leq 0$$

Donc, $\forall \nu \in [-1, 1] \cup [r, 3]$, il existe $x_2 = x_2(\nu)$ tel que $p(1, x_2; \nu) = 0$.

- $\forall \nu \in [-3, -1]$ et $-1 \leq x_2 \leq 1$, on a :

$$p(1, -1; \nu) \leq p(1, x_2; \nu) \leq p(1, 1; \nu)$$

Ainsi :

$$\forall \nu \in [-r, -1] : p(1, 1; \nu) \geq 0 \text{ et } p(1, -1; \nu) \leq 0$$

Donc, $\forall \nu \in [-r, -1]$, il existe $x_2 = x_2(\nu)$ tel que $p(1, x_2; \nu) = 0$.

Comme le graphe est bicolorable (clair soit sur le dessin de la page 26, soit sur l'homomorphisme $\Gamma(2, 4, 4) \rightarrow \{\pm 1\}; s_i \mapsto -1$), le spectre de T_S est invariant par multiplication par -1 (cf 2.3).

On a donc montré : $Sp(3T_S) \supset [-3, -r] \cup [-r, -1] \cup [-1, 1] \cup [1, r] \cup [r, 3]$

Par conséquent : $Sp(T_S) = [-1, 1]$.

3.2 Le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$

Ce groupe est le produit semi-direct $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ où α est donnée par l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}^2$ par les puissances de la matrice d'Anosov $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On se donne les quatre systèmes de générateurs suivants :

1. $S_1 = \{e_1, e_2, a\}$.
2. $S_2 = \{e_1, e_1^{-1}, e_2, e_2^{-1}, a, a^{-1}\} = S_1 \cup S_1^{-1}$.
3. $S_3 = \{e_1, a\}$.
4. $S_4 = \{e_1, e_1^{-1}, a, a^{-1}\} = S_3 \cup S_3^{-1}$.

Où $e_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right)$, $e_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right)$ et $a = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right)$.

On voit tout de suite que les systèmes S_2 et S_4 sont les systèmes symétriques de S_1 et S_3 respectivement.

La définition du produit semi-direct se trouve dans l'annexe B.

3.2.1 La matrice d'Anosov A

Définition :

Une application linéaire hyperbolique (càd ne possédant aucune valeur propre de module 1) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice de transformation possède des entrées entières et dont le déterminant vaut 1 est un **difféomorphisme d'Anosov** sur le n -Tore, aussi appelé un **automorphisme d'Anosov**.

Assertion :

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \phi^2$ et $\lambda_2 = \phi^{-2}$ où $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 sont $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi - 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\phi \end{pmatrix}$ respectivement.

Preuve :

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2.$$

Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ étant $\lambda^2 - \lambda - 1$, on reconnaît ainsi tout de suite le nombre d'or ϕ et son conjugué $-\phi^{-1}$ comme valeurs propres de la matrice ci-dessus.

Ainsi, les valeurs propres de A sont ce qui était annoncé. $\otimes$

Remarque :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est donc un automorphisme d'Anosov et mérite ainsi d'être appelée, dans ce travail tout au moins, matrice d'Anosov.

Proposition :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ les nombres de Fibonacci (cf. annexe).

Les puissances de A sont :

$$A^n = \begin{pmatrix} f_{2n+1} & f_{2n} \\ f_{2n} & f_{2n-1} \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Preuve :

Par induction. $\otimes$

Plus d'informations concernant les nombres de Fibonacci et le nombre d'or se trouvent dans l'annexe A.

3.2.2 Le graphe de Cayley de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$

Vecteurs de Fibonacci

Les premiers vecteurs de Fibonacci sont toutes les premières colonnes de A^n qui sont données par : $v_n = \begin{pmatrix} f_{2n+1} \\ f_{2n} \end{pmatrix}$.

Les seconds vecteurs de Fibonacci sont toutes les deuxièmes colonnes de A^n qui sont données par : $w_n = \begin{pmatrix} f_{2n} \\ f_{2n-1} \end{pmatrix}$.

Exemples :

$$v_{-2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}; v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_{-2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; w_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Géométrie de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$

On a : $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) a^{\pm 1} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm 1 \right) = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \pm 1 \right)$

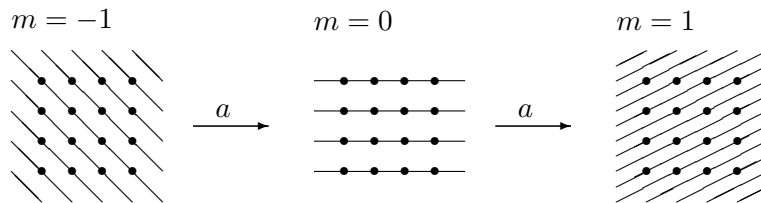
Ainsi, le générateur a permet de monter et de descendre dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

En outre : $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) e_1^{\pm 1} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \left(\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pm v_m, m \right)$
 $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) e_2^{\pm 1} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, 0 \right) = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pm w_m, m \right)$

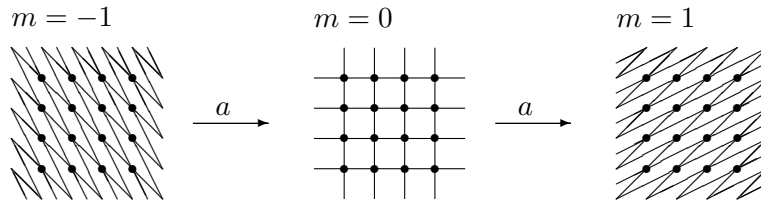
Ainsi, à l'étage m , les générateurs e_1 et e_2 engendrent un 'réseau' donné par les vecteurs de Fibonacci v_m et w_m .

Le graphe de Cayley

Dans le cas à deux générateurs, on obtient :



Dans le cas à trois générateurs, on obtient :



Remarque :

L'aire des losanges vaut toujours 1, car $\det(A^n) = 1$.

'Construction' de circuits dans le graphe de Cayley

En exprimant les vecteurs de Fibonacci entre-eux, on peut trouver des circuits dans le graphe de Cayley.

Exemples :

- $v_2 = -v_0 + 3v_1$ livre le circuit $a^2e_1 = e_1^{-1}ae_1^3a$ càd $1 = e_1^{-1}a^{-2}e_1^{-1}ae_1^3a$
- $v_3 = -3v_0 + 8v_1 = -v_0 + 2v_1 + 2v_2$ livrent les circuits :
 - ▷ $a^3e_1 = e_1^{-3}ae_1^8a^2$ càd $1 = e_1^{-1}a^{-3}e_1^{-3}ae_1^8a^2$
 - ▷ $a^3e_1 = e_1^{-1}ae_1^2ae_1^2a$ càd $1 = e_1^{-1}a^{-3}e_1^{-1}ae_1^2ae_1^2a$

3.2.3 Présentation finie de Γ

Théorème :

Tout groupe G est un quotient d'un groupe libre.

Définition :

Soit X un ensemble de cardinal n et Δ une famille de mots sur X .

On dit qu'un groupe G possède les **générateurs** X et les **relations** (ou **relateurs**) Δ si $G \cong \mathbb{F}_n/R$, où R est le sous-groupe normal de $\mathbb{F}_n$ généré par Δ .

La **présentation** de G est l'écriture $\langle X|\Delta \rangle$.

Le reste de ce paragraphe est uniquement dédié à la preuve du théorème suivant :

Théorème de présentation de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$:

Le groupe Γ possède la présentation finie suivante :

$$\Gamma = Pres(\Gamma) := \langle e_1, e_2, a \mid [e_1, e_2] = 1, [a, e_1] = e_1e_2, [a, e_2] = e_1 \rangle$$

Afin de mieux se comprendre, notons R_1 la relation $[e_1, e_2] = 1$, R_2 la relation $[a, e_1] = e_1e_2$ et R_3 la relation $[a, e_2] = e_1$.

On déduit de R_1 , R_2 et R_3 les relations $[a^{-1}, e_1] = e_2^{-1}$ et $[a^{-1}, e_2] = e_1^{-1}e_2$.

Ce qui permet d'établir la forme normale suivante :

Soit $w = w(e_1^{\pm 1}, e_2^{\pm 1}, a^{\pm 1})$ un mot de Γ , il existe $m_1, m_2, n \in \mathbb{Z}$ tels que : $w = e_1^{m_1} e_2^{m_2} a^n$.

L'existence de cette forme normale est validée par le fait que les relations précédemment décrites permettent d'éliminer le a à gauche de e_1 et e_2 et que les générateurs e_1 et e_2 commutent.

L'unicité découle des "formules" :

$$ae_1 = e_1^2e_2a \text{ et } ae_2 = e_1e_2a$$

Assertion :

Soit $N(R_1, R_2, R_3) = \langle \{wrw^{-1} \mid w \in \mathbb{F}_3, r \in \{R_1, R_2, R_3\}\} \rangle$ le sous-groupe normal de $\mathbb{F}_3$ généré par les trois relations.

Alors Γ est isomorphe à $\mathbb{F}_3/N(R_1, R_2, R_3)$.

On utilise le lemme suivant :

Lemme :

Soit G, H deux groupes et N un sous-groupe normal de G .

Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorphisme et $\pi : G \rightarrow G/N$ la projection canonique.

Si $\ker(\pi) \subset \ker(\varphi)$, alors il existe un unique homomorphisme $\psi : G/N \rightarrow H$ tel que $\varphi = \psi \circ \pi$.

Preuve :

La projection canonique étant donnée par $\pi(g) = gN$, le seul candidat possible est donc défini par : $\psi : G/N \rightarrow H$; $gN \mapsto \psi(gN) = \varphi(g)$.

a) ψ est bien définie : (deux éléments de la même classe vont sur la même image)

Soit $g_1, g_2 \in G$ tels que $g_1N = g_2N$ càd $g_1g_2^{-1} \in N$.

A voir : $\psi(g_1N) = \psi(g_2N)$ càd $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$.

Comme $\ker(\pi) = N$, on a par hypothèse : $g_1g_2^{-1} \in \ker(\pi) \subset \ker(\varphi)$ et donc :

$$\varphi(g_1g_2^{-1}) = 1 \text{ c\`ad } \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$$

b) ψ est un homomorphisme :

Comme φ est un homomorphisme et que N est normal dans G , on a :

$$\psi(g_1Ng_2N) = \psi(g_1g_2N) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1N)\psi(g_2N)$$

⊗

Dans notre cas, l'homomorphisme φ est donnée par :

$$\varphi : \mathbb{F}_3 = \langle e_1, e_2, a \rangle \rightarrow \Gamma; \quad e_1 \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right); \quad e_2 \mapsto \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right); \quad a \mapsto \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right)$$

Considérons la projection canonique : $\pi : \mathbb{F}_3 \rightarrow \mathbb{F}_3/N(R_1, R_2, R_3)$.

On a : $\ker(\pi) \subset \ker(\varphi)$.

En effet, soit $m \in \ker(\pi) = N(R_1, R_2, R_3)$, m s'écrit $m = w_1r_1w_1^{-1}w_2r_2w_2^{-1} \dots w_kr_kw_k^{-1}$ avec $w_i \in \mathbb{F}_3$ et $r_i \in \{R_1, R_2, R_3\}$.

En passant par φ , on obtient $\varphi(m) = \varphi(w_1)\varphi(w_1)^{-1} \dots \varphi(w_k)\varphi(w_k)^{-1} = 1$, car les relations sont banalement vérifiées dans le groupe $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

On a donc un unique homomorphisme $\psi : \text{Pres}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ défini par :

$$\psi(e_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right); \quad \psi(e_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right); \quad \psi(a) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right)$$

(Par abus de langage, on a identifié e_1 à e_1N)

Reste à voir que ψ est un isomorphisme :

1. La surjectivité est évidente car $\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(a)$ engendrent $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.
2. L'injectivité découle de l'unicité de l'écriture de la forme normale.

3.2.4 Une présentation matricielle de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$

On a l'injection suivante de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ dans $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$:

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^m & \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.5 $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est résoluble, polycyclique et fortement polycyclique

Calculons $[\Gamma : \Gamma]$:

$$\text{On a : } \left[\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) : \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, n \right) \right] = \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, 0 \right)$$

D'où les cas particuliers suivants :

$$\begin{aligned} \left[\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, 0 \right) : \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, 1 \right) \right] &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \\ \left[\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, 1 \right) : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, 0 \right) \right] &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $[\Gamma : \Gamma] \supset \mathbb{Z}^2$. De plus, le fait qu'il y a toujours un zéro dans la composante associée à $\mathbb{Z}$ dans tous les commutateurs implique que $[\Gamma : \Gamma] \subset \mathbb{Z}^2$.

Ainsi : $[\Gamma : \Gamma] = \mathbb{Z}^2$ groupe abélien, donc $\Gamma' = \mathbb{Z}^2$ et $\Gamma'' = \{e\}$. Par conséquent, Γ est résoluble.

Définition :

Un groupe G est dit **polycyclique** s'il existe une suite finie $G = G_n \triangleright G_{n-1} \triangleright \dots \triangleright G_1 \triangleright G_0 = \{e\}$ telle que les quotients successifs G_{i+1}/G_i sont cycliques.

Comme $\Gamma/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$, alors Γ est manifestement polycyclique.

Définition :

Un groupe G est dit **fortement polycyclique** s'il existe une suite finie $G = G_n \triangleright G_{n-1} \triangleright \dots \triangleright G_1 \triangleright G_0 = \{e\}$ telle que les quotients successifs G_{i+1}/G_i sont cycliques infinis.

Comme, on a : $\Gamma \triangleright \mathbb{Z}^2 \triangleright \mathbb{Z} \triangleright \{e\}$, alors Γ est fortement polycyclique (tous les quotients sont $\mathbb{Z}$).

3.2.6 $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ n'est pas nilpotent

Pour cela, calculons le centre de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

Soit $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \in \mathcal{Z}(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z})$, on a :

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right)$$

càd :

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, m \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right)$$

$$\text{Donc : } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ càd } \begin{pmatrix} f_{2m+1} - 1 \\ f_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que $f_{2m} = 0$ et par conséquent $m = 0$.

De même pour :

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right) \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right)$$

On obtient que $a + b = 0$ et $a = 0$, ce qui prouve que $a = 0 = b$.

Le centre est ainsi réduit au neutre, càd : $\mathcal{Z}(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \right\}$.

Conséquence : $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ n'est pas nilpotent !

3.2.7 $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est sans torsion

Cela provient du fait que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ sont sans torsion.

On a : $g^k = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right)^k = \left(\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, k \cdot m \right)$. Donc : $g^k = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \rightarrow m = 0$.

Et : $g^k = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, 0 \right)^k = \left(\begin{pmatrix} k \cdot a \\ k \cdot b \end{pmatrix}, 0 \right)$. Ainsi : $g^k = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \rightarrow a = 0$ et $b = 0$.

C'est-à-dire que le seul élément de Γ qui est d'ordre fini est le neutre.

3.2.8 Les sous-groupes normaux importants de Γ

Tout d'abord, regardons la tête du conjugué d'un élément de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$:

On a :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, n \right) \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right)^{-1} = \\ & \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, n \right) = \\ & \left(\begin{pmatrix} 1 - f_{2n+1} & -f_{2n} \\ -f_{2n} & 1 - f_{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{2m+1} & f_{2m} \\ f_{2m} & f_{2m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, n \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut isoler les sous-groupes normaux de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$:

1. $\mathbb{Z}^2$, le quotient est ainsi isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Ce sous-groupe est normal par construction du produit semi-direct.

2. $\mathbb{Z} \rtimes M\mathbb{Z}$, le quotient est isomorphe à $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$.

C'est une généralisation du sous-groupe ci-dessus.

3. $(N\mathbb{Z})^2 = N\mathbb{Z} \times N\mathbb{Z}$, le quotient est ainsi isomorphe à $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}$.

Si l'on a $\left(\begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \in \mathcal{N}$ un sous-groupe normal de Γ , alors en posant $m = 1$ dans la formule ci-dessus, on voit que $\left(\begin{pmatrix} 2N \\ N \end{pmatrix}, 0 \right)$ se doit d'être dans $\mathcal{N}$.

Ainsi, si $\left(\begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right)$ est dans $\mathcal{N}$, alors $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}, 0 \right) \in \mathcal{N}$.

En outre, comme $(N\mathbb{Z})^2$ est normal, on a le résultat annoncé.

4. $(N\mathbb{Z})^2 \rtimes M_N\mathbb{Z}$ où M_N est l'ordre de la matrice d'Anosov A dans $\text{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Le groupe quotient est isomorphe à $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$.

Par définition du produit semi-direct, on doit toujours avoir un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ à droite de $\rtimes$.

En regardant ce qui se passe à gauche, on obtient, par définition de M_N :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{mM_N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(N \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = N \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, il s'agit d'un sous-groupe normal.

Pour la suite, on utilisera la notation suivante :

$$\Gamma_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$$

3.2.9 $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est résiduellement fini

Rappel :

Un groupe G est dit **résiduellement fini** si pour tout $g \in G$, $g \neq e$, il existe un sous-groupe normal N_g de G tel que G/N_g soit fini et $x \notin N_g$.

Assertion :

$\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est résiduellement fini.

Preuve :

Notons $g = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \neq \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right)$ et distinguons :

1. a ou $b \neq 0$

Sans nuire à la généralité, disons $a \neq 0$. En prenant $N > |a|$, alors $g \notin (N\mathbb{Z})^2 \rtimes M_N\mathbb{Z}$ sous-groupe d'indice fini (son quotient vaut Γ_N).

2. $m \neq 0$

Dans ce cas, il suffit de prendre $M > |m|$ pour que $g \notin \mathbb{Z}^2 \rtimes M\mathbb{Z}$ sous-groupe d'indice fini de Γ . *

3.2.10 Sur le théorème de Rosenblatt

Théorème de Rosenblatt :

Soit G un groupe résoluble de type fini et non-virtuellement nilpotent (càd ne possède pas de sous-groupes nilpotents d'indice fini).

Alors, G contient le semi-groupe libre sur deux générateurs.

Assertion :

Le groupe $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ contient le semi-groupe libre sur deux générateurs.

Preuve :

Par le théorème de Rosenblatt, il suffit de vérifier que Γ est non-virtuellement nilpotent.

Un sous-groupe d'indice fini de Γ est de la forme $\tilde{\Gamma} = \star \rtimes m\mathbb{Z}$ avec $m \geq 1$ où $\star$ doit être un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$. On veut montrer que $\tilde{\Gamma}$ n'est pas nilpotent, comme avant, montrons que son

centre est réduit à l'élément neutre. Or, la forme générale de $\tilde{\Gamma}$ est : $(a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}) \rtimes m\mathbb{Z}$. (Attention : $(a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}) \rtimes m\mathbb{Z}$ n'est pas toujours un groupe)

Supposons que a, b et m soient tels que $\tilde{\Gamma} = (a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}) \rtimes m\mathbb{Z}$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ . Donc : a, b et m sont non-nuls.

Voyons que $\tilde{\Gamma}$ est de centre trivial.

Soit $\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix}, \mu m \right) \in \mathcal{Z}(\tilde{\Gamma})$, on a :

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix}, \mu m \right) \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix}, \mu m \right)$$

càd :

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mu m} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \mu m \right) = \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix}, \mu m \right)$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mu m} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} f_{2\mu m+1} - 1 & f_{2\mu m} \\ f_{2\mu m} & f_{2\mu m-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que $a f_{2\mu m} = 0$, donc $f_{2\mu m} = 0$ et ainsi $\mu = 0$.

De même :

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix}, 0 \right) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, m \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, m \right) \left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix}, 0 \right)$$

càd :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix}$$

Ainsi $\alpha = 0 = \beta$, car sinon 1 serait valeur propre de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui est contradictoire.

Donc : $\mathcal{Z}(\tilde{\Gamma}) = 0$. $\circledast$

Exhibition du semi-groupe libre sur deux générateurs :

Le premier candidat venant à l'esprit est : $\ll e_1, a \gg$.

On voit sur le graphe de Cayley que c'est un semi-groupe libre.

(l'utilisation de la lettre a monte dans le graphe, tandis que celle de e_1 reste à niveau)

Bien sûr $\ll e_2, a \gg$ est aussi valable, contrairement à $\ll e_1, e_2 \gg$.

3.3 Application des résultats sur les opérateurs d'adjacence

3.3.1 Généralités

$\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est un groupe sans torsion, moyennable (car résoluble). Par la conjecture des idempotents, il ne possède donc aucun idempotents non-trivial et ainsi tous les spectres sont connexes. Par le théorème de Day, $Sp(T_{S_i})$ contient 1 $\forall i \in 1, 2, 3, 4$.

Pour les cas $i = 2, 4$ (cas symétriques), le problème revient à trouver la borne inférieure des spectres, car il s'agit d'un intervalle fermé dont la borne supérieure vaut 1.

3.3.2 Spectre périphérique

Dans Γ , on a la relation : $ae_2a^{-1}e_2^{-1} = e_1$.

Soit $z \in Sp(T_{S_i}) \cap \mathbb{T}$, on sait qu'il existe un caractère χ tel que $\chi(s) = z \quad \forall s \in S_i$.

On a : $\chi(a)\chi(e_2)\chi(a)^{-1}\chi(e_2)^{-1} = \chi(e_1) = z$.

Càd : $1 = z$.

On a donc montré que : $Sp(T_{S_i}) \cap \mathbb{T} = \{1\} \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$.

En particuliers, $\mathcal{G}(\Gamma, S_2)$ et $\mathcal{G}(\Gamma, S_4)$ ne sont pas bicolorables.

3.3.3 Spectres symétriques

Par la proposition de la première estimation, on obtient :

1. Le spectre de T_{S_2} contient l'intervalle $[-\frac{1}{6}, 1]$.
2. Le spectre de T_{S_4} contient l'intervalle $[-\frac{1}{4}, 1]$.

3.4 Application de la technique de surjection sur $\mathbb{Z}$ (Fourier)

On contemple l'homomorphisme surjectif suivant :

$$q : \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \mapsto m$$

On utilise la transformée de Fourier vue dans l'exemple 3.1.2.

1. Pour le système de générateurs S_1 :

En considérant l'application $\pi : \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{Z}$, on a l'envoi de la moyenne des générateurs comme suit :

$$\pi(h_{S_1}) = \frac{1}{3}(2\delta_0 + \delta_1)$$

Et par Fourier, on doit calculer le spectre de :

$$f_{S_1}(\theta) = \frac{1}{3}(2 + e^{i\theta}) \in L^2(\mathbb{T})$$

qui est le *cercle de rayon $\frac{1}{3}$ centré en $\frac{2}{3}$* .

2. Pour le système de générateurs S_2 :

Pour ce système, on a :

$$f_{S_2}(\theta) = \frac{1}{6}(4 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{6}(4 + 2\cos\theta) \in L^2(\mathbb{T})$$

dont le spectre est l'*intervalle $[\frac{1}{3}, 1]$* .

3. Pour le système de générateurs S_3 :

Pour ce système, on a :

$$\pi(h_{S_3}) = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$$

Et par Fourier, on doit calculer le spectre de :

$$f_{S_3}(\theta) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) \in L^2(\mathbb{T})$$

qui est le *cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $\frac{1}{2}$* .

4. Pour le système de générateurs S_4 :

Pour ce système, on a :

$$f_{S_4}(\theta) = \frac{1}{4}(2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{4}(2 + 2 \cos \theta) \in L^2(\mathbb{T})$$

dont le spectre est l'intervalle $[0, 1]$.

En conclusion :

1. Le spectre de T_{S_1} contient le cercle de rayon $\frac{1}{3}$ centré en $\frac{2}{3}$.
2. Le spectre de T_{S_2} contient l'intervalle $[\frac{1}{3}, 1]$.
3. Le spectre de T_{S_3} contient le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $\frac{1}{2}$.
4. Le spectre de T_{S_4} contient l'intervalle $[0, 1]$.

3.5 Résumé de l'état des spectres des T_{S_i}

On a :

1. Le spectre de T_{S_1} contient le cercle de rayon $\frac{1}{3}$ centré en $\frac{2}{3}$.
2. Le spectre de T_{S_2} contient l'intervalle $[-\frac{1}{6}, 1]$.
3. Le spectre de T_{S_3} contient le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $\frac{1}{2}$.
4. Le spectre de T_{S_4} contient l'intervalle $[-\frac{1}{4}, 1]$.

3.6 Application du théorème d'approximation pour $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$

Bien sûr, le monde des mathématiques n'est pas parfait et souvent il se trouve que l'on a le "bon théorème", mais que les hypothèses ne sont pas compatibles avec celle du problème sur lequel on travaille. Comme c'est le cas ici avec les sous-groupes normaux $N_N = (N\mathbb{Z})^2 \rtimes M_N\mathbb{Z}$ qui ne satisfont pas l'hypothèse : $\dots \subset N_{m+1} \subset N_m \subset \dots \subset \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

Mais tout n'est pas perdu, car cette hypothèse n'apparaît dans la preuve que lorsque l'on démontre $\varrho \prec \oplus \rho_m$.

On va donc s'empresse de le remonter dans notre cas :

Preuve (rectification) :

Comme dans la preuve originelle, on a :

$$(\varrho_N(gN_N)\delta_{eN_N}|\delta_{eN_N}) = \sum_{h \in N_N} \delta_{g^{-1}N_N}(N_N) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in N_N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $g \in N_N$ signifie que si $g = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right)$, alors : $\begin{matrix} a \equiv 0 \pmod{N} \\ b \equiv 0 \pmod{N} \end{matrix} \quad m \equiv 0 \pmod{M_N}$.

En outre, lorsque N grandit, M_N fait de même (plus chaotiquement), car les nombres de Fibonacci sont strictement croissants.

Car M_N est le plus petit entier positif tel que :

$$\begin{pmatrix} f_{2M_N+1} & f_{2M_N} \\ f_{2M_N} & f_{2M_N-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}$$

Par exemple pour $N = 832040$, on a : $M_N \geq 15$, car $f_{2,15} = 832040$.

Soit I une famille infinie de nombres naturels strictement croissants.

Par le fait que $k \equiv 0 \pmod{m} \quad \forall m \in I$ implique que $k = 0$, on en déduit que :

$$(\rho_N(g)\delta_e|\delta_e) \rightarrow (\varrho(g)\delta_e|\delta_e) \text{ lorsque } N \rightarrow \infty \ (N \in I)$$

La conclusion de la preuve reste identique. $\otimes$

Donc, on a :

$$Sp(T_S) = \overline{\bigcup Sp(T_S^N)}$$

Où $Sp(T_S^N)$ est le spectre de l'opérateur d'adjacence sur le groupe $\Gamma_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$. Comme, on n'a besoin que de la plus petite valeur spectrale a (intervalle fermé contenant 1), on traduit l'expression ci-dessus par :

$$a = \inf_{N \in I} (\min Sp(T_S^N))$$

(bien sûr, on a : $Sp(T_S) = [a, 1]$, ce qui certifie l'existence de l'infimum mentionné ci-dessus.)

On a donc ramené le problème à calculer une "infinité" de valeurs propres minimales de *matrices*, car les Γ_N sont finis.

Dans le chapitre suivant, on va déterminer un moyen effectif pour calculer ces bornes en décomposant la régulière droite en représentation "plus petites", de manière à "réduire" les calculs.

Chapitre 4

Décomposition de la régulière

4.1 Généralités sur les représentations sur les groupes finis

Cette section est avant tout une présentation du sujet, le lecteur désirant en savoir plus est prié de se référer à [15].

On notera V un espace vectoriel de dimension finie n , $\text{GL}(V)$ le groupe des automorphismes de V et G un groupe fini.

4.1.1 Définitions et principes élémentaires

Une **représentation de G dans V** est un homomorphisme ϱ du groupe G dans $\text{GL}(V)$.

Lorsque ϱ est donné, on dit que V est un **espace de représentation du groupe G** ou par abus de langage une **représentation de G** . La **dimension** de ϱ (aussi appelée le **degré** de ϱ) est la dimension de l'espace V .

Si l'on se donne une base de V , on peut écrire $\varrho(g)$ comme une matrice.

Ainsi, la plupart des raisonnements utiliseront ce point de vue.

Définition :

Soit ϱ_1 et ϱ_2 deux représentations du même groupe G dans des espaces vectoriels V et V' .

Ces représentations sont dites **équivalentes** (ou semblables ou isomorphes) s'il existe un isomorphisme linéaire $\tau : V \rightarrow V'$ tel que le diagramme suivant commute pour tout $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V' \\ \varrho_1(g) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varrho_2(g) \\ V & \xrightarrow{\tau} & V' \end{array}$$

Définitions :

Soit $\varrho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation.

1. Un sous-espace W de V est dit **invariant** (ou stable) par rapport à ϱ si pour tout $g \in G$, on a : $\varrho(g)(x) \in W \quad \forall x \in W$.
2. Soit W un sous-espace invariant.

La restriction $\varrho_W(g)$ de $\varrho(g)$ à W est alors un automorphisme de W et on a ainsi construit une représentation $\varrho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ de G . Cette représentation ϱ_W est appelée **sous-représentation de ϱ** .

Proposition :

Soit $\varrho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation **unitaire** et W un sous-espace invariant de V . Alors l'orthogonal $W^\perp$ est aussi un espace invariant.

Contre-exemple de la proposition si l'on omet l'hypothèse unitaire :

Prenons $\varrho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$; $1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = A$. (On a bien : $A^2 = 1$)

ϱ est une représentation non unitaire, les valeurs propres de A sont 1 et -1, les vecteurs propres respectifs sont $(1, 2)$ et $(-1, 2)$.

Ainsi, l'espace $W_1 = \{c(1, 2) : c \in \mathbb{C}\}$ est invariant par rapport à ϱ .

Il en va de même pour $W_2 = \{c(-1, 2) : c \in \mathbb{C}\}$.

Mais, $W_1^\perp = \{c(2, -1) : c \in \mathbb{C}\}$ n'est pas invariant.

Remarque :

On peut unitariser la représentation en prenant le produit scalaire suivant :

$$\langle x|y \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\varrho(g)x | \varrho(g)y)$$

(Si la représentation est déjà unitaire, on ne change rien.)

Définitions :

Soit ϱ_1 et ϱ_2 deux représentations.

1. La **somme directe** de ϱ_1 et de ϱ_2 est la représentation $\varrho = \varrho_1 \oplus \varrho_2$ définie par :

$$\varrho(g) = \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 \\ 0 & \varrho_2 \end{pmatrix} \quad \text{"somme directe de matrices"}$$

2. Le **produit tensoriel** de ϱ_1 et de ϱ_2 est la représentation $\varrho = \varrho_1 \otimes \varrho_2$ définie par :

$$\varrho(g) = \varrho_1(g) \otimes \varrho_2(g) \quad \text{"produit tensoriel de matrices"}$$

Rappel :

Soit A, B deux matrices de taille $m \times m$ et $n \times n$ respectivement.

On a :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix} \quad \text{de taille } mn \times mn$$

Définition :

Une représentation $\varrho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est dite **irréductible** (ou simple) si V est non-trivial et si les seuls sous-espaces invariants sont 0 et V .

Théorème :

Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

4.1.2 Théorie des caractères

Définition :

Soit ϱ une représentation, on définit le **caractère** de ϱ par :

$$\chi(\varrho)(g) = \text{Tr}(\varrho(g))$$

Un **caractère irréductible** est un caractère associé à une représentation irréductible.

Remarques :

1. Cette notion est bien définie, car la trace d'une matrice ne dépend pas de la base choisie.
2. Un caractère est une représentation irréductible de degré 1.

Proposition :

Soit ϱ_1 et ϱ_2 deux représentations χ_1 et χ_2 respectivement. Alors :

1. le caractère de la représentation $\varrho_1 \oplus \varrho_2$ est égal à $\chi_1 + \chi_2$.
2. le caractère de la représentation $\varrho_1 \otimes \varrho_2$ est égal à $\chi_1 \cdot \chi_2$.

Lemme de Schur :

Soit ϱ_1 et ϱ_2 deux représentations irréductibles sur V_1, V_2 respectivement.

Soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ linéaire telle que : $\varrho_2(g) \circ f = f \circ \varrho_1(g) \quad \forall g \in G$

On a :

1. Si ϱ_1 et ϱ_2 ne sont équivalentes, alors $f \equiv 0$.
2. Si $V_1 = V_2$ et $\varrho_1 = \varrho_2$, alors f est une homothétie (càd $f \in \mathbb{C}1$).

Notation :

Soit φ et ψ deux fonctions sur G à valeurs complexes.

On définit le produit scalaire suivant :

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$$

Théorème :

Les caractères irréductibles forment un système orthonormal, càd :

1. Soit χ un caractère irréductible, alors : $(\chi|\chi) = 1$.
2. Soit χ_1, χ_2 deux caractères irréductibles associés à deux représentations non équivalentes, alors : $(\chi_1|\chi_2) = 0$.

Théorème :

Soit ϱ une représentation de caractère φ .

Supposons que ϱ est décomposée en somme directe de représentations irréductibles :

$$\varrho = \varrho_1 \oplus \dots \oplus \varrho_k$$

Soit σ une représentation irréductible de caractère χ .

Alors, le nombre de ϱ_i équivalentes à σ est égal au produit scalaire $(\varphi|\chi)$.

Ce nombre est indépendant de la décomposition choisie.

Corollaire :

Deux représentations de même caractère sont équivalentes.

Théorème :

Si χ est le caractère d'une représentation ϱ , alors :

1. $(\chi|\chi)$ est entier.
2. $(\chi|\chi) = 1 \iff \varrho$ est irréductible.

4.1.3 Décomposition de la représentation régulière**Théorème :**

Soit $\chi_1, \dots, \chi_h$ les différents caractères irréductibles de G de degré $n_1, \dots, n_h$ respectivement. (On a : $\chi_i(1) = n_i$ (dimension de la matrice identité))

Alors :

1. Chaque représentation irréductible ϱ_i est contenue dans la représentation régulière un nombre de fois égal à son degré. Càd :

$$\varrho(f) = \bigoplus_{[\pi] \text{ rep. irr. de } G} (\dim \pi) \cdot \pi(f) \quad (\text{Frobenius})$$

2. Les degrés vérifient la relation $\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|$ et chaque n_i divise $|G|$.
3. Le nombre de représentations irréductibles (à équivalence près) est égal au nombre de classes de conjugaison de G .

Corollaire :

On a l'équivalence :

$$G \text{ abélien} \iff \text{Toutes les représentations irréductibles de } G \text{ sont de dimension } 1$$

Théorème :

Soit A un sous-groupe commutatif normal de G .

Alors, le degré de toute représentation irréductible de G divise l'indice $[G : A]$ de A dans G .

La formule de Frobenius a une importance considérable dans les calculs de spectres d'opérateurs d'adjacence. En effet, on obtient au niveau du spectre :

$$Sp(T_S) = \bigcup_{\pi \text{ irr.}} Sp(\pi(h_S))$$

(Cette formule se généralise dans le cas de groupes localement compacts)

4.1.4 Induction de représentations

Soit H un sous-groupe de G .

Soit $\varrho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de G et $\varrho_H : H \rightarrow GL(V)$ sa restriction.

Soit $W \subset V$ un sous-espace invariant par ϱ_H .

Notons $\theta : H \rightarrow GL(W)$ la représentation de H dans W et considérons l'ensemble des classes à gauche de G modulo H , noté G/H , dont S est un système de représentants.

Soit $\sigma \in S$, on a :

$$\varrho(\sigma)(W) = \varrho(g)(W) \quad \forall g \in \sigma H$$

(car $\varrho_H(h)(W) = W \quad \forall h \in H$)

Notons W_σ l'espace vectoriel défini par : $\varrho(\sigma)(W)$.

Comme les W_σ sont permutés entre-eux par $\varrho(g)$ avec $g \in G$, on peut ainsi définir la représentation suivante :

$$\pi : G \rightarrow GL\left(\sum_{\sigma \in S} W_\sigma\right)$$

Ainsi, π est une sous-représentation de ϱ .

Définition :

On dit que la représentation ϱ est **induite** par θ si : $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ et noté $\text{Ind}_H^G(\theta)$.

Cette définition nous permet de dire si une représentation est induite par une autre représentation, mais ne fournit pas une méthode effective de calcul.

Voici donc une habile transition, qui nous amène à parler de la méthode utilisée par A. J. COLEMAN dans [3].

Méthode effective d'induction de représentation :

Soit G un groupe fini contenant A un sous-groupe d'indice n .

Soit $\chi : A \rightarrow GL(V)$ une représentation de degré m .

Alors, la représentation $\varrho = \text{Ind}_A^G(\chi)$ est donnée par :

$$\varrho_{A_i, A_j}(g) = \begin{cases} \chi(a_i g a_j^{-1}) & \text{si } a_i g \in A_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Où les A_i représentent les n classes à droite de G modulo A et les a_i sont des représentants des classes A_i .

La matrice $\varrho(g)$ est composée de $n \times n$ matrices de tailles $m \times m$ (car χ est de degré m), dont le bloc i, j est donné par $\varrho_{A_i, A_j}(g)$.

Ainsi, la représentation ϱ est de degré mn .

4.1.5 Technique de recherche de représentations irréductibles d'un produit semi-direct $G = A \rtimes_\alpha H$ avec A commutatif

On va montrer comment trouver toutes les représentations irréductibles de G à partir de représentations irréductibles de sous-groupes de G et de caractères de A .

Notons $\hat{A}$ l'ensemble des caractères de A .

Le groupe H opère sur $\hat{A}$ par l'action suivante :

$$\begin{aligned} H \times \hat{A} &\longrightarrow \hat{A} \\ (h, a) &\longmapsto h \cdot \chi : A \longrightarrow \mathbb{T} \\ &a \longmapsto \chi(\alpha(h^{-1})(a)) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une partition de $\hat{A}$ en orbites $(\text{Orb}(\chi) = \{h \cdot \chi : h \in H\})$.

L'ensemble de ces orbites sera noté $\hat{A}/H$.

On choisit un système de représentants des orbites, noté $(\chi_i)_{i \in \hat{A}/H}$ (il y en a $|\hat{A}/H|$)

Posons : $H_i = \text{Stab}(\chi_i) = \{h \in H : h \cdot \chi_i = \chi_i\} < H$.

$G_i = A \rtimes H_i$ sous-groupe de G , car $A \triangleleft G$.

En prolongeant χ_i à G_i par $\chi_i(a, h) = \chi_i(a)$, on obtient un caractère de G_i .

Soit ϱ une représentation irréductible de H_i , on construit les représentations irréductibles suivantes :

1. L'application composée $\tilde{\varrho} = \varrho \circ \pi$ où $\pi : G_i \rightarrow H_i$ est la projection canonique.
2. Le produit tensoriel $\chi_i \otimes \tilde{\varrho} = \chi_i \cdot \tilde{\varrho}$.
(car χ_i est un caractère et $\chi_i \cdot \tilde{\varrho}$ est irréductible ssi $\tilde{\varrho}$ est irréductible)

On note : $\theta_{i, \varrho}$ la représentation induite $\text{Ind}_{G_i}^G(\chi_i \otimes \tilde{\varrho})$.

C'est le théorème suivant qui termine le travail :

Théorème de Mackey :

1. Les représentations $\theta_{i, \varrho}$ sont irréductibles.
2. Si $\theta_{i, \varrho}$ est équivalente à $\theta_{i', \varrho'}$, alors : $i = i'$ et $\varrho \cong \varrho'$.
3. Toute représentation irréductible de G est équivalente à l'une des $\theta_{i, \varrho}$.

Ainsi, on a trouvé *toutes* les représentations irréductibles de G .

4.2 Calcul des représentations irréductibles de Γ_N

Rappelons que :

$$\Gamma_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$$

où M_N est l'ordre de la matrice d'Anosov $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ modulo N .

On est ainsi dans le contexte de la section 1.1.5.

Notons $A = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ (commutatif) et $H = \mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$.

L'action de H sur $\hat{A}$ est décrite par : $(m \cdot \chi) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \chi \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-m} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$

Description de toutes les représentations irréductibles de A :

On a :

$$\hat{A} = \left\{ \chi_{(c,d)} : A \rightarrow \mathbb{T}; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto e^{\frac{2\pi i}{N}(ac+bd)} = \exp \left[\frac{2\pi i}{N} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \right] \mid c, d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \right\}$$

Considérons $\hat{A}/H$ l'ensemble des orbites et choisissons χ_i un représentant d'une orbite.

On a : $|\text{Orb}(\chi_i)|$ divise M_N , car $|\text{Orb}(\chi_i)| \cdot |\text{Stab}(\chi_i)| = |H| = M_N$.

A partir de maintenant, notons $i = (c, d)$ et posons $|\text{Orb}(\chi_i)| = m_i$ et $|\text{Stab}(\chi_i)| = n_i$.
(ainsi, on a : $m_i \cdot n_i = M_N$)

Donc : $H_i = \text{Stab}(\chi_i) = \{0, m_i, 2m_i, \dots, (n_i-1)m_i\} < \mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$, car tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$ est cyclique, donc unique.

Prolongeons χ_i à $G_i = A \rtimes H_i$ en posant $\chi_i \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, h \right) = \chi_i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On obtient :

$$\chi_i : A \rtimes H_i \rightarrow \mathbb{T}; \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, h \right) \mapsto e^{\frac{2\pi i}{N}(ac+bd)}$$

Description de toutes les représentations irréductibles de H_i :

Soit $n \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{array}{ccccc} \varrho_n : & H_i & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & m \cdot m_i & \longmapsto & m & \longmapsto & e^{\frac{2\pi i}{n_i}m \cdot n} \end{array}$$

Ainsi :

$$\hat{H}_i = \left\{ \varrho_n : H_i \rightarrow \mathbb{T}; h \mapsto e^{\frac{2\pi i}{M_N}h \cdot n} \mid n \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \right\}$$

Soit $g = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m \right) \in \Gamma_N$ et $g_0 = \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, n \right)$ où $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est le représentant i et $m \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$,
on a la représentation irréductible suivante :

$$\chi_{g_0} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{(c,d)} \otimes \varrho_n : G_i \longrightarrow \mathbb{T}; g \longmapsto e^{\frac{2\pi i}{N}(ac+bd)} e^{\frac{2\pi i}{M_N}mn}$$

La représentation induite ϱ_{g_0} est donnée par les blocs matriciels ($0 \leq k, l \leq m_i - 1$) :

$$\varrho_{k,l}^{g_0}(g) = \begin{cases} \chi_{g_0}(a_k g a_l^{-1}) & \text{si } a_k g \in A_l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\Gamma_N/G_i = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) G_i, \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right) G_i, \dots, \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, m_i - 1 \right) G_i \right\}$.

On a donc : $A_k = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k \right) G_i$ et $a_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k$ avec $0 \leq k \leq m_i - 1$.

Comme :

$$a_k g = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m+k \right)$$

On a :

$$\begin{aligned} \varrho_{k,l}^{g_0}(g) &= \begin{cases} \chi_{g_0} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m+k-l \right) & \text{si } m+k \equiv l \pmod{m_i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \exp \left[\frac{2\pi i}{N} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \right] & \text{si } m+k \equiv l \pmod{m_i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Vision de ϱ_{g_0} sur les générateurs e_1, e_2, a et leurs inverses :

$$\varrho_{g_0}(e_1^{\pm 1}) = \text{Diag} \left(e^{\pm \frac{2\pi i}{N}(cf_{2k+1}+df_{2k})} \right)_{0 \leq k \leq m_i-1}$$

$$\varrho_{g_0}(e_2^{\pm 1}) = \text{Diag} \left(e^{\pm \frac{2\pi i}{N}(cf_{2k}+df_{2k-1})} \right)_{0 \leq k \leq m_i-1}$$

$$\varrho_{g_0}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \mathbb{O} & \ddots & 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{n_i}n} & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varrho_{g_0}(a^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & e^{-\frac{2\pi i}{n_i}n} \\ 1 & \ddots & & \mathbb{O} & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème de Mackey, on a :

1. ϱ_{g_0} est irréductible pour tout $g_0 \in \Gamma_N$.
2. $\varrho_{g_0} \cong \varrho_{g'_0} \iff (c, d)$ est dans la même orbite que (c', d') et $n = n'$.
3. Toutes les représentations irréductibles de Γ_N sont équivalentes à l'une des ϱ_{g_0}

On a donc exhibé pour chaque représentant $\chi_{(c,d)} = \chi_i$, n_i représentations irréductibles de Γ_N de degré m_i où $m_i = |\text{Orb}(\chi_i)|$ et $n_i = M_N/m_i$.

Tout ce qu'il reste à faire est de calculer les orbites de l'action suivante :

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 &\longrightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \\ \left(m, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car $m \cdot \chi \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \chi \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-m} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ par symétrie de la matrice d'Anosov.

4.3 Conséquence sur le calcul du spectre de l'opérateur d'adjacence dans le groupe Γ_N

Le spectre $T_{S_i}^N$ est donné par la réunion des spectres des matrices $\varrho_{g_0}(h_{S_i})$ avec $g_0 = \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, n \right)$ pour tout (c, d) représentant d'une orbite (à $m_{(c,d)}$ éléments) et pour tout n élément du sous-groupe de $\mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$ d'ordre $M_N/m_{(c,d)}$.

Les matrices ont la tête suivante (il y a des zéros partout où rien n'est indiqué) :

1. Pour S_1 , on a :

$$\varrho_{g_0}(h_{S_1}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{N}\varphi_0} + e^{\frac{2\pi i}{N}\psi_0} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{M_N}m_{(c,d)}n} & & & & e^{\frac{2\pi i}{N}\varphi_{m_i-1}} + e^{\frac{2\pi i}{N}\psi_{m_i-1}} \end{pmatrix}$$

où $\varphi_k = (cf_{2k+1} + df_{2k})$ et $\psi_k = (cf_{2k} + df_{2k-1})$.

2. Pour S_2 , on a :

$$\varrho_{g_0}(h_{S_2}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{2\pi}{N}\varphi_0) + 2\cos(\frac{2\pi}{N}\psi_0) & 1 & & & e^{-\frac{2\pi i}{M_N}m_{(c,d)}n} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{M_N}m_{(c,d)}n} & & & 1 & 2\cos(\frac{2\pi}{N}\varphi_{m_i-1}) + 2\cos(\frac{2\pi}{N}\psi_{m_i-1}) \end{pmatrix}$$

où $\varphi_k = (cf_{2k+1} + df_{2k})$ et $\psi_k = (cf_{2k} + df_{2k-1})$.

3. Pour S_3 , on a :

$$\varrho_{g_0}(h_{S_3}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{N}\varphi_0} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{M_N}m_{(c,d)}n} & & & & e^{\frac{2\pi i}{N}\varphi_{m_i-1}} \end{pmatrix}$$

où $\varphi_k = (cf_{2k+1} + df_{2k})$.

4. Pour S_4 , on a :

$$\varrho_{g_0}(h_{S_4}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{2\pi}{N}\varphi_0) & 1 & & & e^{-\frac{2\pi i}{M_N}m_{(c,d)}n} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{M_N}m_{(c,d)}n} & & & 1 & 2\cos(\frac{2\pi}{N}\varphi_{m_i-1}) \end{pmatrix}$$

où $\varphi_k = (cf_{2k+1} + df_{2k})$.

4.3.1 Cas particuliers

1. Le cas particulier où $m_{(c,d)} = M_N$ est intéressant, car à ce moment-là le sous-groupe de $\mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$ d'ordre 1 est trivial (il y a donc moins de représentations irréductibles) et ainsi les termes qui apparaissent dans les coins supérieurs droits et inférieurs gauches valent 1.
2. Pour le cas particulier où $m_{(c,d)} = 1$ (càd $(c,d) = (0,0)$), les seules représentations irréductibles sont en fait des représentations irréductibles de degré 1 de $\mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$.

En effet : $\varrho_{g_0}(g) = \chi_{g_0}(g) = e^{\frac{2\pi i}{M_N}mn}$, car $G_i = \Gamma_N$.

Ainsi, comme on obtient une représentation du membre de droite de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, la technique de la surjection sur $\mathbb{Z}$ nous dit que le spectre de ces représentations sera contenu dans l'ensemble donné par la section 3.4.

Ainsi, ce cas particulier a déjà été "visité".

4.4 Lorsque $|\text{Orb}| = M_N$

4.4.1 Les représentations canoniques

Assertion :

Les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ sont dans la même orbite ssi $N = 2$.

Preuve :

$\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \end{pmatrix}$ sont conjugués s'il existe m tel que :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod{N}$$

Par symétrie, cela revient à voir si une puissance de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ modulo N est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix}.$$

Or : $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ et $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix} = -1$. Ainsi, on a : $1 \equiv -1 \pmod{N}$.

Donc : $N = 2$.

La réciproque est banale. $\circledast$

Assertion :

Les orbites de $(1,0)$ et de $(0,1)$ contiennent exactement M_N éléments.

Preuve :

Le nombre d'éléments de l'orbite associée à $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) est le nombre de premières (resp. deuxièmes) colonnes distinctes des puissances de la matrice d'Anosov modulo N .

- Pour $(1, 0)$:

Soit $k \in \mathbb{Z}/M_N\mathbb{Z}$ tel que : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{N}$.

Ceci implique que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N}$ par symétrie. Comme le déterminant de n'importe quelle puissance entière de la matrice d'Anosov vaut 1, alors $*$ doit valoir 1, ce qui montre que $k = 0$ par définition de l'ordre M_N .

On a donc montré que deux premières colonnes des puissances de A sont toujours distinctes modulo N .

- Pour $(0, 1)$:

On procède de la même façon, grâce à l'argument :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}$$

⊛

4.4.2 Pour les p premiers congrus à 3 ou 7 modulo 10

Assertion :

Soit p un nombre premier congru à 3 ou 7 modulo 10.

Alors, toutes les orbites possèdent exactement M_p éléments.

(Sauf, l'orbite de $(0, 0)$ bien évidemment)

Preuve :

Rappelons que : $\text{Orb} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \mid m \in \mathbb{Z}/M_p\mathbb{Z} \right\}$.

Soit $(a, b) \neq (0, 0) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ et $k \in \mathbb{Z}/M_p\mathbb{Z}$, à voir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pmod{p} \rightarrow k \equiv 0 \pmod{M_p}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} f_{2k+1} & f_{2k} \\ f_{2k} & f_{2k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_{2k+1}a + f_{2k}b \\ f_{2k}a + f_{2k-1}b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pmod{p}$$

Ce qui nous mène à résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} bf_{2k} + af_{2k+1} \equiv a \pmod{p} \\ bf_{2k-1} + af_{2k} \equiv b \pmod{p} \\ f_{2k-1} + f_{2k} - f_{2k+1} \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

(La dernière ligne venant de la relation des nombres de Fibonacci)

D'où le système matriciel (dans le corps $\mathbb{F}_p$) :

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & a \\ b & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une solution particulière est donnée par le vecteur $(1, 0, 1)$.

A voir : ce système possède une unique solution.

Pour cela, voyons que les vecteurs colonnes formant la matrice S sont linéairement indépendants.

Sans nuire à la généralité, supposons $a \neq 0$. Comme, $\det(S) = b^2 + ab - a^2$, on a :

$$\det(S) = 0 \iff b = -a \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Or, $\sqrt{5}$ n'existe pas dans $\mathbb{F}_p$ pour $p \equiv 3$ ou $7 \pmod{10}$.

Ce qui signifie que pour ces nombres premiers, la matrice S est de déterminant non-nul. $\circledast$

En conclusion :

1. On a donc une famille infinie de nombres positifs
 $I = \{p : p \text{ premiers} \equiv 3 \text{ ou } 7 \pmod{10}\}$ telle que :

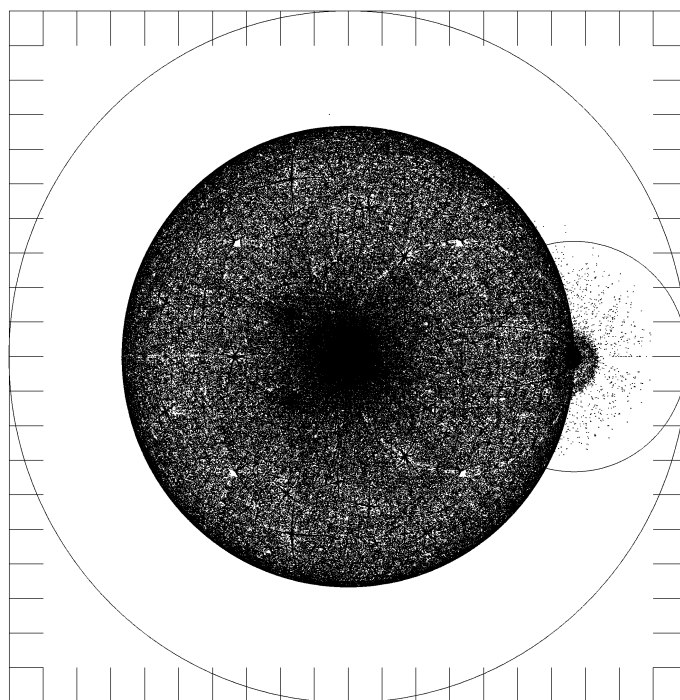
$$Sp(T_{S_{2,4}}) = [a_{2,4}, 1] \text{ avec } a_{2,4} = \inf_{p \in I} \left(\min_{(c,d) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2} Sp(T_{S_{2,4}}^p) \right)$$

2. Pour tout $N > 2$, on peut simplement se baser sur les représentants canoniques pour des calculs numériques, mais cela ne nous donnera qu'une contenance.

4.5 Calculs numériques

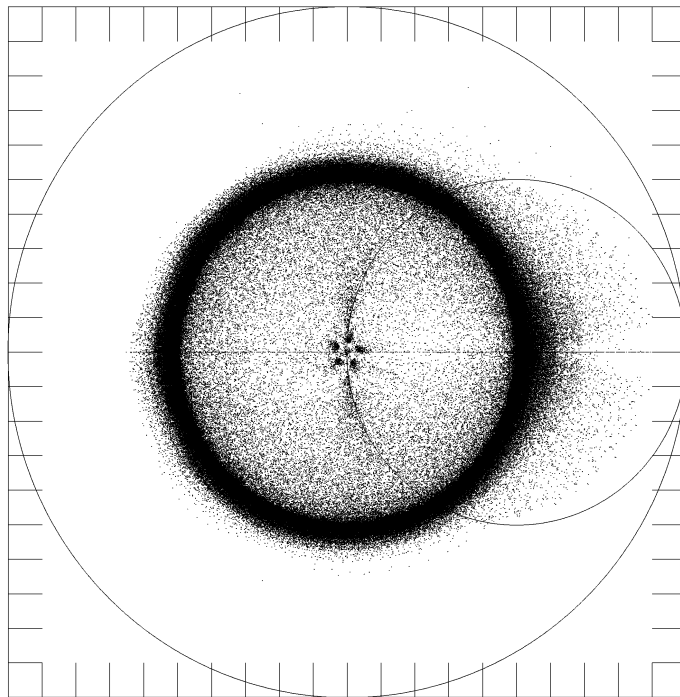
Un calcul numérique des spectres associés aux représentants canoniques pour $2 \leq N \lesssim 1500$ livre les résultats suivants (les cercles proviennent de la surjection sur $\mathbb{Z}$ (cf. 3.4)) :

- Pour le système à trois générateurs, le spectre (de T_{S_1}) contient l'ensemble :



(l'abscisse minimale est environ -0.669)

- Pour le système à deux générateurs, le spectre (de T_{S_3}) contient l'ensemble :



Pour les spectres symétriques pour $2 \leq N \leq 3500$, on a les résultats suivants :

- Pour le système à trois générateurs, le spectre (de T_{S_2}) contient l'intervalle :

$$[-0.75712634, 1]$$

- Pour le système à deux générateurs, le spectre (de T_{S_4}) contient l'intervalle :

$$[-0.89495478, 1]$$

Il est par contre illusoire de s'attaquer aux spectres associés à tous les représentants pour les nombres premiers congrus à 3 ou 7 modulo 10. En effet, le calcul des orbites devient pour p de l'ordre de 10^3 une véritable sinécure.

En annexe, le lecteur trouvera les programmes pour le cas asymétrique à trois générateurs pour toutes les représentations et pour le cas symétrique à deux générateurs pour les représentants canoniques. Pour les commandes **LAPACK** se référer à [1].

Remarque :

Le dessin de la page de titre n'est rien d'autre qu'un calcul pour $2 \leq N \leq 350$ des spectres associés aux représentants canoniques dans le cas asymétrique à trois générateurs.

Ce dessin a été symétrisé par rapport à l'axe réel et tourné de 270 degrés pour des raisons purement esthétiques.

Chapitre 5

Dans le groupe de Lie $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$

Dans ce chapitre, on va décrire des représentations irréductibles de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ à l'aide des représentations irréductibles du groupe de Lie $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$, dans lequel $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ se plonge de manière discrète.

5.1 Théorème de Mackey et induction de représentation dans le cadre d'un groupe localement compact

Cette section est en fait une généralisation de 4.1.5.

5.1.1 Régularité d'un produit semi-direct

$G = N \rtimes H$ est un produit semi-direct **régulier** s'il existe dans $\hat{N}$ une famille au plus dénombrable $(E_i)_{i \in I}$ de parties mesurables H -invariantes (càd réunions d'orbites) telle que toute orbite est l'intersection des E_i qui la contiennent.

5.1.2 Induction de représentation

Soit G un groupe localement compact et H un sous-groupe de G tel que l'espace homogène G/H possède une mesure G -invariante dx .

Soit ν un caractère sur H , càd $\nu \in H$.

La représentation induite par ν de H à G est notée $\text{Ind}_H^G \nu$. et est définie comme suit :

Considérons l'espace de Hilbert suivant :

$$H = \left\{ \xi : G \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \xi(gh) = \nu(h^{-1})\xi(g) \quad \forall g \in G, \forall h \in H \\ \|\xi\|^2 = \int_{G/H} |\xi(x)|^2 dx < +\infty \end{array} \right\}$$

On a : $|\xi(gh)| = |\nu(h^{-1})| \cdot |\xi(g)| = |\xi(g)|$.

De cette manière, tout $\xi \in H$ est constant sur les classes latérales à gauche.

On a :

$$\begin{aligned} \text{Ind}_H^G \nu : G &\longrightarrow \mathcal{U}(H) \\ g &\longmapsto (\text{Ind}_H^G \nu)(g) : H \longrightarrow H \\ \xi &\longmapsto ((\text{Ind}_H^G \nu)(g))(\xi) : G \longrightarrow \mathbb{C} \\ g' &\longmapsto \xi(g^{-1}g') \end{aligned}$$

5.1.3 Théorème de Mackey

Soit $G = N \rtimes_{\alpha} H$ un produit semi-direct localement compact avec N abélien.

Si, de plus, H est abélien et si G est un produit semi-direct régulier.

Alors, toute représentation irréductible π de G est de la forme suivante :

$$\pi_{\chi, \nu} = \text{Ind}_{N \rtimes H_{\chi}}^{N \rtimes H} (\chi \otimes \nu)$$

Où : - χ est un caractère de N .

- $H_{\chi} = \{h \in H : h \cdot \chi = \chi\}$ est un sous-groupe fermé de H (stabilisateur de χ).

(l'action de H sur $\hat{N}$ est donnée par : $(h \cdot \chi)(n) = \chi(\alpha_{h^{-1}}(n))$)

- ν est un caractère de H_{χ} .

De plus, $\pi_{\chi, \nu} \cong \pi_{\chi', \nu'}$ ssi $\begin{cases} \chi \text{ et } \chi' \text{ sont dans la même orbite de } H \text{ sur } \hat{N}. \\ \nu = \nu' \text{ (a un sens par la condition ci-dessus).} \end{cases}$

5.2 Extension de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ à $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$

On va étendre l'action par les puissances entières de la matrice d'Anosov aux puissances réelles en utilisant l'exponentielle des matrices.

Par 3.2.1, on a :

$$\begin{aligned} A &= SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \phi - 1 & -\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi^{-2} \end{pmatrix} \frac{1}{1 - 2\phi} \begin{pmatrix} -\phi & -1 \\ 1 - \phi & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \phi^{-1} & -\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ \phi^{-1} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \phi^{-1} & -\phi \end{pmatrix} \text{Exp} \begin{pmatrix} 2 \ln \phi & 0 \\ 0 & -2 \ln \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ \phi^{-1} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \text{Exp} \underbrace{\left[\frac{2 \ln \phi}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right]}_{\stackrel{\text{def}}{=} H} \end{aligned}$$

Ainsi, on définit toutes les puissances de A par : $A^t = \text{Exp}(tH) = \text{Exp} \left[\frac{2t \ln \phi}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right]$

Autres manières d'écrire A^t :

$$\begin{aligned} A^t &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \phi^{-1} & -\phi \end{pmatrix} \text{Exp} \begin{pmatrix} 2 \ln \phi & 0 \\ 0 & -2 \ln \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ \phi^{-1} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \phi^{2t+1} + \phi^{-(2t+1)} & \phi^{2t} - \phi^{-2t} \\ \phi^{2t} - \phi^{-2t} & \phi^{2t-1} + \phi^{-(2t-1)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \cosh((2t+1) \ln \phi) & \sinh((2t) \ln \phi) \\ \sinh((2t) \ln \phi) & \cosh((2t-1) \ln \phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cas particulier : pour $t = \frac{1}{2}$, on a : $A^t = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin \text{GL}_2(\mathbb{Z})$

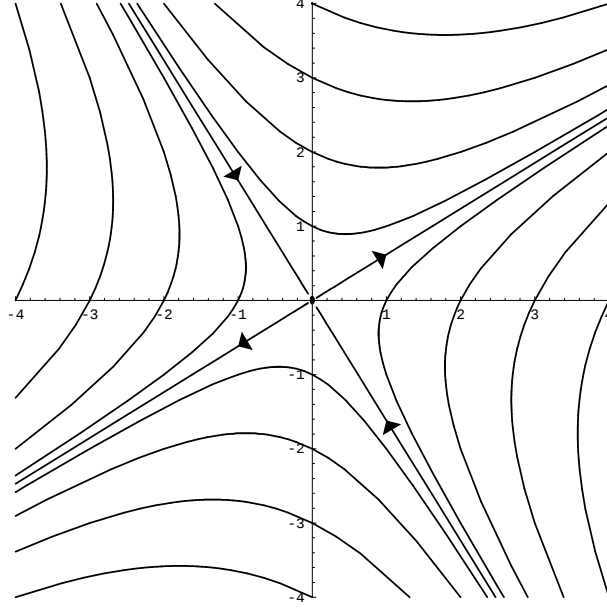
On peut maintenant définir le produit semi-direct $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ munit de l'action : $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$; $t \mapsto A^t = \exp(tH)$ "sous-groupe à 1-paramètre".

En fait, G est un groupe de Lie (munit de la topologie produit) contenant Γ de manière discrète.

5.3 Régularité de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$

5.3.1 Orbites de G

Un passage sous **Mathematica** nous livre le dessin suivant :



On remarque **5 orbites spéciales**, l'orbite (pas si spéciale) de l'origine et quatre orbites qui sont des demi-droites ouvertes en zéro (relatives aux vecteurs propres). Les autres orbites sont en fait des branches d'hyperboles.

L'orientation due au temps est donnée par les orbites spéciales. Il y a expansion lorsque l'on se trouve sur l'espace propre associé à $\phi^2 > 1$ et contraction lorsque l'on se trouve sur celui associé à ϕ^{-2} de valeur absolue $|\phi^{-2}| < 1$.

5.3.2 Régularité de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$

Comme $\widehat{\mathbb{R}^2} \cong \mathbb{R}^2$, on peut raisonner directement sur les orbites.

Soit $(E_{r,k})_{r \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}^*} \cup (E_i)_{1 \leq i \leq 5}$ la famille dénombrable où $E_{r,k}$ est l'ensemble des orbites traversant l'intervalle $]r - \frac{1}{k}; r + \frac{1}{k}[$ et $E_1, \dots, E_5$ les 5 orbites spéciales.

Cette famille satisfait les conditions pour que G soit régulier.

5.3.3 Le cas de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$

Comme $\widehat{\mathbb{Z}^2} = \mathbb{T}^2$, les orbites sont des réunions de points, car on ne prend que des puissances entières. Ainsi, toute partie mesurable et $\mathbb{Z}$ -invariante sur $\mathbb{T}^2$ est de mesure 0 ou 1, càd la matrice d'Anosov agit ergodiquement sur le tore $\mathbb{T}^2$.

Ainsi, le produit semi-direct $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ n'est pas régulier et le théorème de Mackey ne s'applique plus.

5.4 Calcul des représentations irréductibles de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$

Posons $N = \mathbb{R}^2$ et $H = \mathbb{R}$.

Soit $\chi = \chi_{(a,b)}$ un caractère de $\mathbb{R}^2$ avec $(a,b) \neq 0$. (le cas où $(a,b) = 0$ ne nous intéresse pas, car χ_0 serait le caractère trivial et $H_{\chi} = H$, donc $\chi_0 \otimes \nu = \nu$. Comme l'induction ne modifie rien (on induit de G à G), on retomberait par restriction à Γ sur un caractère de $\mathbb{Z}$. Or par la méthode de la surjection sur $\mathbb{Z}$ vue en 3.4, son spectre sera contenu dans le cercle ou intervalle obtenu par Fourier.)

5.4.1 Calcul de H_{χ}

On peut montrer sans calcul que $H_{\chi} \stackrel{\text{not}}{=} H_{(a,b)} = \{0\}$.

En effet, on se rappelle que $H_{(a,b)}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$. On a donc trois possibilités :

- $H_{(a,b)} = \{0\}$,
- $H_{(a,b)} = \mathbb{R}$,
- $H_{(a,b)} = \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$.

On fait alors appel au dessin de la page 56. Si $H_{(a,b)} = \mathbb{R}$, alors (a,b) est un point fixe, donc $(a,b) = (0,0)$ qui est déjà exclus de la discussion. Si $H_{(a,b)} = \alpha\mathbb{Z}$, alors l'orbite de (a,b) est homéomorphe à $\mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$ ce qui est impossible.

Ainsi le seul choix possible pour $\nu \in \widehat{H_{(a,b)}}$ est le caractère trivial et de ce fait $\chi_{(a,b)} \otimes \nu = \chi_{(a,b)}$.

5.4.2 Calcul de l'induction $\text{Ind}_{\mathbb{R}^2}^G \chi_{(a,b)}$

L'espace $H_{(a,b)}$ à considérer est :

$$H_{(a,b)} = \left\{ \xi : \mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \xi(gh) = \chi_{(a,b)}(h^{-1})\xi(g) \quad \forall g \in G, \forall h \in \mathbb{R}^2 \\ \|\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}/\mathbb{R}^2} |\xi(x)|^2 dx < +\infty \end{array} \right. \right\}$$

Comme $\chi_{(a,b)}(-y) = e^{-2\pi i((a,b)|y)}$ et $(x,s) \cdot (y,0) = (x + A^s y, s)$, on a :

$$H_{(a,b)} = \left\{ \xi : \mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \xi(x + A^s y, s) = \xi(x, s) e^{-2\pi i((a,b)|y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall s \in \mathbb{R} \\ \|\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\xi(0, s)|^2 ds < +\infty \end{array} \right. \right\}$$

On injecte $L^2(\mathbb{R})$ dans $H_{(a,b)}$ par l'application u suivante :

$$\begin{aligned} u : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow H_{(a,b)} \\ \nu &\longmapsto u(\nu) : \mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, s) &\longmapsto (u(\nu))(x, s) = \nu(s) e^{-2\pi i((a,b)|A^{-s}x)} \end{aligned}$$

La fonction u est bien définie (càd $u(\nu) \in H_{(a,b)}$).

En effet, la première condition est satisfaite,

$$\begin{aligned} (u(\nu))(x + A^s y, s) &= \nu(s) e^{-2\pi i((a,b)|A^{-s}x+y)} = \nu(s) e^{-2\pi i((a,b)|A^{-s}x)} e^{-2\pi i((a,b)|y)} \\ &= (u(\nu))(x, s) e^{-2\pi i((a,b)|y)} \end{aligned}$$

Cette application est linéaire et isométrique, car :

$$\|u(\nu)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |(u(\nu))(0, s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}} |\nu(s)|^2 ds = \|\nu\|^2$$

Assertion :

u est unitaire.

Preuve :

Il ne reste plus qu'à exhiber l'inverse :

$$\begin{aligned} v : H_{(a,b)} &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \xi &\longmapsto v(\xi) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto (v(\xi))(s) = \xi(0, s) \end{aligned}$$

En effet, on a :

- $((u \circ v)(\xi))(x, s) = (v(\xi))(s) e^{-2\pi i((a,b)|A^{-s}x)} = \xi(0, s) e^{-2\pi i((a,b)|A^{-s}x)} = \xi(x, s)$
par la relation de $H_{(a,b)}$.
- $((v \circ u)(\nu))(s) = u(\nu)(0, t) = \nu(t)$. *

Ainsi, u est un isomorphisme unitaire.

Trouvons $\pi_{(a,b)}(g)$ tel que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{(a,b)} & \xrightarrow{\text{Ind}\chi_{(a,b)}(g)} & H_{(a,b)} \\ u \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow u^* \\ L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi_{(a,b)}(g)} & L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

On veut donc :

$$(\pi_{(a,b)}(g)(\xi))(t) = u^* [(\text{Ind}\chi_{(a,b)}(g))(u(\xi))](t) \stackrel{\text{def}}{=} (u(\xi))(g^{-1} \cdot (o, t))$$

Pour $g = (x, s)$, on obtient :

$$(\pi_{(a,b)}(g)(\xi))(t) = (u(\xi))(-A^{-s}x, -s + t) = \xi(t - s) e^{-2\pi i((a,b)|A^{-t}x)}$$

Ainsi, la représentation de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ définie par :

$$(\pi_{(a,b)}(x, s)(\xi))(t) = \xi(t - s) e^{-2\pi i((a,b)|A^{-t}x)}$$

est une représentation unitairement équivalente à la représentation induite $\text{Ind}\chi_{(a,b)}$.

Par le théorème de Mackey, on a donc explicité toutes les représentations irréductibles du groupe $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$.

De plus : $\pi_{(a,b)} \cong \pi_{(c,d)} \iff (a, b)$ et (c, d) sont dans la même orbite.

5.5 $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est un réseau de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$

Comme la discrétion de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est déjà établie, il faut encore montrer que $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est **cocompact** dans $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ (càd que le quotient est compact).

Pour cela, trouvons un compact $C \subset G$ tel que $C\Gamma = G$.

Un candidat pour C est l'ensemble compact suivant :

$$C = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \mu \right) \in G \mid \begin{array}{l} \alpha, \beta \in [0, 4] \\ 0 \leq \mu \leq 1 \end{array} \right\}$$

Vérification :

En effet, soit $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, s\right) \in G$ donné, il faut trouver $\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \mu\right) \in C$ et $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m\right) \in \Gamma$ tels que l'on a :

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \mu\right) \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, m\right) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, s\right)$$

C'est-à-dire :

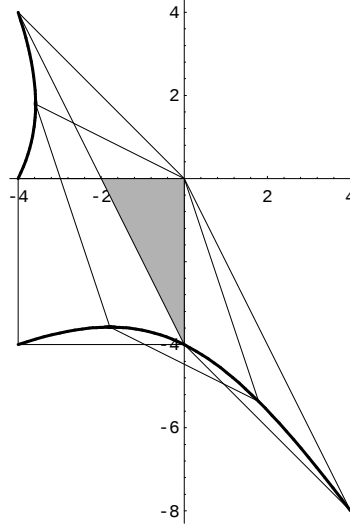
$$\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mu} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \mu + m\right) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, s\right)$$

A droite, c'est très facile, il suffit de prendre : $\mu = \text{frac}(s)$ la partie fractionnaire de s .
 $m = [s]$ la partie entière de s .

A gauche, on a :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mu} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mu} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{fixé}} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mu} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Le dessin suivant permet de conclure : $\left(\text{l'origine représente } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-\mu} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.



On voit trois déformations du carré $[-4, 0]^2$ pour $t = 0$ (pas de changement), pour $t = \frac{1}{2}$ et pour $t = 1$. Les traits en gras représentent trois bouts d'orbites pour t variant de 0 à 1.

La surface foncée se trouve dans l'intersection des déformations du carré $[-4, 0]^2$ et cette surface contient toujours un point au moins du réseau $\mathbb{Z}^2$.

5.6 Des représentations de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$

Dans cette section, on va présenter le théorème de Cowling-Steger, qui malheureusement ne s'appliquera pas à notre cas. Mais, il est intéressant de voir que notre situation est un contre-exemple de ce théorème, lorsque l'on suppose que le groupe de Lie n'est pas semi-simple à centre fini.

Théorème de Cowling-Steger :

Soit G semi-simple à centre fini et Γ un réseau dans G .

On note $\widehat{G}_d$ l'ensemble des (classes de) représentations unitaires de carré intégrable de G .

Alors : $\pi \in \widehat{G} \setminus \widehat{G}_d \Rightarrow \pi|_{\Gamma} \in \widehat{\Gamma}$

De plus, si $\pi, \rho \in \widehat{G} \setminus \widehat{G}_d$ ont leur restriction équivalente (càd $\pi|_{\Gamma} \cong \rho|_{\Gamma}$), alors $\pi \cong \rho$.

Assertion :

Soit $G = N \rtimes H$ un produit semi-direct connexe avec N connexe abélien.

Alors G n'est pas semi-simple.

Preuve :

On a la caractérisation suivante :

G est semi-simple $\iff$ son algèbre de Lie LG ne possède pas d'idéaux non-triviaux abéliens

En outre, par les hypothèses de connexité de G et de N , on a :

$$N \text{ normal} \Rightarrow LN \text{ est un idéal de } LG$$

Et comme N est abélien, alors LN est abélienne.

Ainsi, LN est un idéal abélien non-trivial de LG . $\circledast$

Cas particulier :

Le groupe de Lie $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ n'est pas semi-simple.

On a exhibé les représentations irréductibles de $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ (cf 5.4), montrons que leur restriction à $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ ne sont plus irréductibles.

On a : $(\pi_{(a,b)}(x, s)(\xi))(t) = \xi(t - s)e^{-2\pi i((a,b)|A^{-t}x)}$

On peut donc écrire $\pi_{(a,b)}(x, s) = \chi_{(a,b)}(x, s) \cdot \pi(s)$,

où $\chi_{(a,b)}$ est un caractère et $(\pi(s)(\xi))(t) = \xi(t - s)$

Reste à voir : $\pi(s)$ est réductible.

Le candidat évident pour l'espace vectoriel invariant non-trivial est donné par :

$$W = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ 1-périodique}\}$$

Remarque :

Soit $G = \mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, alors la première partie du théorème de Cowling-Steger est vraie, mais pas la seconde partie.

L'intérêt de notre exemple est un cas où la première partie du théorème est fausse.

5.6.1 Conclusion

Bien que ces représentations ne sont pas irréductibles lorsque l'on les restreint au sous-groupe $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, on a encore, par le fait que toute représentation est intégrale directe de représentations irréductibles :

$$Sp(T_{S_i}) \supset \overline{\bigcup_{(a,b) \neq 0} Sp\left(\pi_{(a,b)|_{\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}}}(h_{S_i})\right)} \cup \text{cercle ou intervalle de Fourier}$$

$$\text{où } (\pi_{(a,b)}(x, s)(\xi))(t) = \xi(t - s)e^{-2\pi i((a,b)|A^{-t}x)}$$

(Il n'est pas certain que l'on ait obtenu une famille séparante de représentations de $C_r^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z})$, ce qui explique l'inclusion. De toute façon, on ne peut espérer l'égalité que dans le cas où T_{S_i} est autoadjoint (cas $i = 2$ ou 4))

Annexe A

Les nombres de Fibonacci



Fibonacci (1170 - 1250)

A.1 Fibonacci

Son véritable nom est Leonardo Pisano (ou Leonardo de Pise), mais tout le monde le connaît mieux par son surnom Fibonacci (qui signifie *filius Bonacci* : fils de Bonacci en Latin). Occasionnellement, il prit le nom de *Leonardo Bigollo* (En toscan, *bigollo* signifie voyageur).

Il a joué un rôle important en faisant revivre d'anciennes mathématiques et a fait des contributions significatives.

Fibonacci est né en Italie en 1170 dans la région de Pise, mais a été éduqué en Afrique du Nord où son père Guglielmo Bonaccio tenait un poste diplomatique. Il a beaucoup voyagé avec son père et a reconnu l'énorme avantage des systèmes mathématiques utilisés dans ces pays.

Après son retour en Italie, il publia *Liber abaci* (livre de calcul) en 1202, basé sur des parties d'arithmétique et d'algèbre que Fibonacci a accumulé durant ses voyages, dans lequel il a introduit le système décimal Hindou-Arabe et l'utilisation des nombres arabes à travers l'Europe (en Inde, le concept du *rien* est philosophiquement et religieusement important ce qui explique l'existence du zéro, ce qui n'était pas le cas pour les systèmes latins et grecques).

Ce livre décrit en Latin les règles que nous apprenons à l'école primaire pour additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres.

$$\begin{array}{r}
 174 + \\
 28 \\
 \hline
 202
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 174 - \\
 28 \\
 \hline
 146
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 174 \times \\
 28 \\
 \hline
 3480 + \\
 1392 \\
 \hline
 4872
 \end{array}
 \qquad
 174 / 28 \text{ est } 6 \text{ reste } 6$$

Ce qui simplifia considérablement les calculs qui auparavant étaient en chiffres romains (dont l'ordre n'était pas important au tout début de leur existence).

(par exemple CLXXIIII additionné à XXVIII était égal à CCII et CLXXIIII soustrait à XXVIII était égal à CXXXVI (Rappel : I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500 et M = 1000))

Un problème dans *Liber abaci* conduit à l'introduction des nombres de Fibonacci et de la suite de Fibonacci pour laquelle il est devenu si célèbre.

Ses autres livres d'importance majeure sont *Practica geometriae* en 1220, contenant une large collection de géométrie et de trigonométrie, et *Liber quadratorum* en 1225 dans lequel il approche la racine d'un cube à neuf chiffres significatifs.

Leonardo Pisano *Fibonacci* est mort en 1250 à Pise.

A.2 Introduction aux nombres de Fibonacci

Fibonacci est célèbre pour son invention de la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... où chaque nombre est la somme des deux précédent.

Il a introduit cette fameuse suite avec le problème des lapins :

Un homme dépose un couple de lapins dans une place entourée par un mur. Si les lapins deviennent matures à l'âge d'un mois et qu'il produisent un nouveau couple chaque mois après cela, combien de couples y aura-t-il chaque mois ?

C'est le mathématicien français *Edouard Lucas* (1842-1891) qui leur donna le nom de nombres de Fibonacci.

Définition :

La suite définie récursivement par :

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ \text{avec } f_0 = 0 \text{ et } f_1 = 1 \end{cases}$$

est appelée **suite de Fibonacci**. Les f_n sont les **nombres de Fibonacci**.

A.3 L'apparition du nombre d'or

Définition :

Le **nombre d'or** ϕ est l'unique nombre positif vérifiant l'équation $x^2 = x + 1$.

Il vaut $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618034$.

Son conjugué (qui satisfait la même équation) est noté $\tilde{\phi}$ et vaut $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0.618034$.

Proposition :

La suite des quotients (réels) de deux nombres successifs de Fibonacci $(\frac{f_{n+1}}{f_n})_{n \geq 1}$ est une suite qui converge (rapidement) vers le nombre d'or.

Preuve :

Les nombres N_n définis par $N_n = \phi f_{n-1} + \tilde{\phi}^{n-1}$ satisfont la relation de récurrence de Fibonacci (car $\phi^2 = \phi + 1$ et $\tilde{\phi}^2 = \tilde{\phi} + 1$), on a donc $f_n = \phi f_{n-1} + \tilde{\phi}^{n-1}$.

Ainsi : $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi + \frac{\tilde{\phi}^n}{f_n} \longrightarrow \phi$ lorsque $n \rightarrow \infty$. $\circledast$

A.4 Résultats sur les nombres de Fibonacci**Lemme (croissance des nombres de Fibonacci) :**

La suite $(f_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

Preuve :

Evident. $\circledast$

Lemme (relation entre les Fibonacci négatifs et positifs) :

On a : $f_{-n} = (-1)^{n-1} f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Par induction $\circledast$

Lemme (égalité de Cassini) :

On a : $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

Ce lemme permet en autres de vérifier que la suite des quotients de deux nombres de Fibonacci consécutifs, vue plus haut, est bien une suite de Cauchy.

Preuve :

Par induction, on montre que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le déterminant nous apporte la conclusion : $\left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = (-1)^n = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2$. $\circledast$

Lemme (formule généralisée) :

On a : $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}$.

Preuve :

Par induction. $\circledast$

Proposition sur le pgcd :

On a $\text{pgcd}(f_n; f_m) = f_{\text{pgcd}(n;m)}$.

Preuve :

Deux nombres de Fibonacci successifs sont premiers entre-eux, càd :

$$\text{pgcd}(f_n; f_{n+1}) = 1$$

$$(\text{pgcd}(f_n; f_{n+1}) = \text{pgcd}(f_n; f_n + f_{n-1}) = \text{pgcd}(f_{n-1}; f_n) = \dots = \text{pgcd}(0; 1) = 1)$$

De plus, on a : $\text{pgcd}(f_{n+r}; f_n) = \text{pgcd}(f_n; f_r)$ par la formule généralisée.

$$(\text{pgcd}(f_{n+r}; f_n) = \text{pgcd}(f_n f_{r+1} + f_{n-1} f_r; f_n) = \text{pgcd}(f_{n-1} f_r; f_n) = \text{pgcd}(f_r; f_n))$$

Par conséquent : $\text{pgcd}(f_{qn+r}; f_n) = \text{pgcd}(f_n; f_r)$.

Ainsi, on peut appliquer l'algorithme d'Euclide :

$$\text{pgcd}(f_m; f_n) = \text{pgcd}(f_{qn+r}; f_n) = \text{pgcd}(f_n; f_r) = \dots = \text{pgcd}(f_{\text{pgcd}(m;n)}; f_0) = f_{\text{pgcd}(m;n)} \quad \circledast$$

Proposition de multiplicité :

Soit $k \in \mathbb{Z}$, alors f_{nk} est un multiple de f_k pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve :

La formule généralisée nous livre : $f_{2n} = f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_n$ ce qui implique que f_{2n} est multiple de f_n , puis : $f_{3n} = f_{2n} f_{n+1} + f_{2n-1} f_n$, d'où f_{3n} est multiple de f_n .

On continue ainsi de suite par induction. $\circledast$

Corollaire :

Tout nombre de Fibonacci premier possède un indice premier, sauf une exception pour $f_4 = 3$.
(car $4 = 2 \cdot 2$ et $f_2 = 1$)

Remarque :

Il existe des nombres de Fibonacci non premiers dont l'indice est premier, par exemple $f_2 = 1$ et (plus pertinent) $f_{19} = 4181 = 113 \cdot 37$.

Proposition réciproque :

Si $n > 2$, $m \geq 0$ et si f_m est un multiple de f_n , alors m est un multiple de n .

Preuve :

Par hypothèse, on a $f_n | f_{\text{pgcd}(n;m)}$ et $f_{\text{pgcd}(n;m)} \leq f_n$, ainsi $f_n = f_{\text{pgcd}(n;m)}$.

Donc, puisque $n > 2$, $\text{pgcd}(n; m) = n$, d'où $m | n$. $\circledast$

Lemme de Matijasevich :

Si $n > 2$, on a l'équivalence : $f_m \equiv 0 \pmod{f_n^2} \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod{nf_n}$.

Preuve :

On trouve par induction les formules suivantes :

$$\begin{aligned} f_{kn} &\equiv k f_n f_{n+1}^{k-1} \pmod{f_n^2} \\ f_{kn+1} &\equiv f_{n+1}^k \pmod{f_n^2} \end{aligned}$$

à l'aide de la formule généralisée et du fait que : $f_{n+1}f_n \equiv f_{n-1}f_n \pmod{f_n^2}$

Comme f_{n+1} est relativement premier à f_n , on obtient :

$$f_{kn} \equiv 0 \pmod{f_n^2} \Leftrightarrow k f_n \equiv 0 \pmod{f_n^2} \Leftrightarrow k \equiv 0 \pmod{f_n}$$

L'équivalence de Matijasevich est maintenant mise à terre :

$\Rightarrow f_m$ est multiple de f_n par hypothèse et donc, il existe k tel que $m = kn$, et on conclut par ce qui précède.

$\Leftarrow$ Par hypothèse, il existe k tel que $m = knf_n$ et par la première formule de la preuve $\otimes$
 $f_m = f_{knf_n} = k f_n f_n f_{n+1}^{k f_n - 1} \equiv 0 \pmod{f_n^2}$.

Proposition (Fibonacci et Pascal) :

On a la formule $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k}$.

Cela montre que sur le triangle de Pascal, on voit les nombres de Fibonacci.
(sommer les diagonales)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

Preuve :

Calcul classique de coefficients binomiaux avec la convention suivante :

$$\binom{0}{k} = \delta_{0,k} \quad \text{et} \quad \binom{m}{k} = 0 \text{ si } k > m \quad \otimes$$

A.5 Application des fonctions génératrices

Dans cette sous-section, on va s'amuser à appliquer les techniques relatives aux fonctions génératrices ordinaire et exponentielle de la suite de Fibonacci $F = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme :

La fonction génératrice ordinaire de F est donnée par la fonction $F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$.

Le développement de McLaurin de $F(z)$ possède les nombres de Fibonacci comme coefficients.

Preuve :

La fonction cherchée est $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n z^n = F(z)$.

On a : $F(z) = z \sum_{n \geq 0} f_{n+1} z^n = z + z^2 \sum_{n \geq 0} f_{n+2} z^n$.

Ainsi, en utilisant la relation de récurrence de Fibonacci, on obtient :

$$\frac{F(z)}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{F(z)}{z} + F(z)$$

D'où la conclusion. $\otimes$

Lemme (formule de Binet) :

On a la formule $f_n = \frac{\phi^n - \tilde{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ où ϕ est le nombre d'or et $\tilde{\phi}$ son conjugué.

Preuve :

Résolvons la relation de récurrence de Fibonacci à l'aide des fonctions génératrices exponentielles (le passage de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à la fonction génératrice exponentielle $A(z)$ se note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \circ^e A(z)$).

Rappel :

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \circ^e E(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f_n}{n!} z^n \text{ et } (f_{n+i})_{n \in \mathbb{N}} \circ^e \frac{d^i}{dz^i} E(z)$$

Il faut donc résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} E''(z) = E'(z) + E(z) \\ \text{avec } E(0) = 0 \text{ et } E'(0) = 1 \end{cases}$$

La solution générale est $E(z) = Ae^{\phi z} + Be^{\tilde{\phi} z}$ (car ϕ et $\tilde{\phi}$ sont les racines de $x^2 = x + 1$).

Les constantes A et B se déterminent par le système suivant :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\phi + B\tilde{\phi} = 1 \end{cases}$$

Dont les solutions sont $A = 1/\sqrt{5}$ et $B = -1/\sqrt{5}$.

La conclusion est ainsi obtenue en repassant du point de vue des suites. $\otimes$

Corollaire :

Les nombres $L_{n,k} = \phi^{k(n-1)} + \phi^{k(n-2)} \tilde{\phi}^k + \phi^{k(n-3)} \tilde{\phi}^{2k} + \dots + \phi^k \tilde{\phi}^{k(n-2)} + \phi^{k(n-1)}$ sont des entiers positifs.

Preuve :

Par la proposition de multiplicité, il existe $L_{n,k} \in \mathbb{N}$ tels que $f_{nk} = L_{n,k} f_k$. La conclusion est immédiate par la formule de Lucas et le fait que $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$. $\otimes$

A.6 Encore des formules

Lemme :

On a les deux formules suivantes :

$$f_{2n+1} = f_{2n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} f_{2i+1} ; \quad f_{2n} = f_{2n-2} + \sum_{i=0}^{n-1} f_{2i} + 1$$

Preuve :

Routine. $\circledast$

Assertion :

On a : $\phi^n = f_{n-1} + f_n \phi$.

Preuve :

Par induction. $\circledast$

Corollaire :

$$\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$$

Annexe B

Le produit semi-direct $\rtimes$

Il s'agit d'une généralisation du produit direct.

Soit H, N deux groupes.

Une action de H sur N peut être vue comme un homomorphisme $\alpha : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ où $\text{Aut}(N)$ est le groupe des automorphismes sur N .

(Une action d'un groupe sur un groupe présuppose α_g homomorphisme)

On note $N \rtimes_{\alpha} H$ l'ensemble $G = N \times H$ muni du produit de groupe défini par :

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \cdot \alpha(h_1)(n_2), h_1 \cdot h_2)$$

$N \rtimes_{\alpha} H$ est un groupe contenant H comme sous-groupe et N comme sous-groupe normal tel que l'action α est réalisée (ou implémentée) par des automorphismes intérieurs de $N \rtimes_{\alpha} H$ (càd : $(1, h)(n, 1)(1, h)^{-1} = (\alpha(h)(n), 1)$).

Le neutre est $(1, 1)$ et l'inverse de (n, h) est $(\alpha(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$.

Exemples :

0) $G = N \rtimes_{\alpha} H$ où $\alpha(h)(n) \equiv 1$ est tout bonnement le produit direct de N par H .

1) $G = C_n \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\alpha(\varepsilon)(n) = \begin{cases} n & \text{si } \varepsilon = 0 \\ n^{-1} & \text{si } \varepsilon = 1 \end{cases}$ est le groupe diédral $\mathcal{D}_{2n}$

2) $G = \mathbb{R} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}^*$ où $\alpha(a)(b) = ab$ est le groupe affine sur $\mathbb{R}$.

3) $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \text{SL}_2(\mathbb{R})$ où $\alpha(v)(M) = Mv$.

Annexe C

Programmes Fortran

C.1 Pour T_{S_1} pour tous les représentants

```
! *****
! *** PROGRAMME DE CALCUL DE LA VALEUR MINIMALE DU ***
! *** SPECTRE DES OPERATEURS D'ADJACENCE ***
! *** POUR LES GROUPES FINIS ASSOCIES AU PRODUIT ***
! *** SEMI-DIRECT DE Z^2 PAR Z ***
! *****
! *** SPECTRE 1 : TROIS GENERATEURS, CAS ASSYMETRIQUE ***
! *****

! *****
! *** PROGRAMME PRINCIPAL ***
! *****
! PROGRAM Spectre1
! IMPLICIT NONE

!
! INTEGER p,Mp
! INTEGER, DIMENSION(506) :: Prime

!
! INTEGER K

!
! CALL Import(Prime)
! DO K = 1,506
!     p = Prime(K)
!     CALL CalculMp(p,Mp)
!     CALL Spectre(p,Mp)
! END DO
!
! *****
! *** FIN DU PROGRAMME PRINCIPAL ***
! *****
CONTAINS
```

```

! *****
! ***      IMPORTATION DES PREMIERS      ***
! *****
SUBROUTINE Import(Prime)
IMPLICIT NONE

INTEGER, DIMENSION(506) :: Prime

INTEGER N

OPEN (5,FILE='s1premiers3-7.txt')
DO N = 1,506
    READ (5,*) Prime(N)
END DO
RETURN
END SUBROUTINE Import
! -----

! *****
! ***      INITIALISATION DE Fps      ***
! *****
SUBROUTINE InitFps(p,Fp1,Fp2)
IMPLICIT NONE

INTEGER p
INTEGER, DIMENSION(p*p) :: Fp1,Fp2

INTEGER I1,K1

DO K1 = 1,p
    DO I1 = 1,p
        Fp1(I1+(K1-1)*p) = K1-1
        Fp2(I1+(K1-1)*p) = I1-1
    END DO
END DO
RETURN
END SUBROUTINE InitFps
! -----

! *****
! ***      NOMBRES DE FIBONACCI MODULO p      ***
! *****
SUBROUTINE CreeFib(p,Mp,Fib)
IMPLICIT NONE

INTEGER p,Mp
INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1) :: Fib

```

```

      INTEGER  K2

      Fib(-1) = 1
      Fib(0)  = 0
      Fib(1)  = 1

      DO K2 = 2,2*Mp+1
         Fib(K2)=MOD(Fib(K2-1)+Fib(K2-2),p)
      END DO
      RETURN
      END SUBROUTINE CreeFib
! -----
!
! *****
! ***          CALCUL DE L'ORDRE DE LA MATRICE,Mp          ***
! *****
      SUBROUTINE CalculMp(p,Mp)
      IMPLICIT NONE

      INTEGER  p,Mp

      INTEGER, DIMENSION(2,2) :: A,B
      INTEGER  I2

!      *** DESCRIPTION DE LA MATRICE D'ANOSOV
      A(1,1) = 2
      A(2,1) = 1
      A(1,2) = 1
      A(2,2) = 1

      B = A
!      *** RAPPEL : Mp est l'ordre d'Anosov modulo p
      I2 = 1
      DO
         IF(B(1,1).EQ.1.AND.B(2,1).EQ.0.AND.B(1,2).EQ.0.AND.B(2,2).EQ.1)EXIT
         I2 = I2+1
         B  = MATMUL(A,B)
         B(1,1) = MOD(B(1,1),p)
         B(2,1) = MOD(B(2,1),p)
         B(1,2) = MOD(B(1,2),p)
         B(2,2) = MOD(B(2,2),p)
      END DO
      Mp = I2
      RETURN
      END SUBROUTINE CalculMp
! -----

```

```

! *****
! ***          CALCUL D'UNE ORBITE PAR RAPPORT A Fps          ***
! *****
SUBROUTINE CalculOrbite(p,Mp,Fib,Fp1,Fp2,Orb1,Orb2)
IMPLICIT NONE

INTEGER  p,Mp
INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1) :: Fib
INTEGER, DIMENSION(p*p)       :: Fp1,Fp2
INTEGER, DIMENSION(Mp)        :: Orb1,Orb2

INTEGER  nb,I3,I4

I4 = 1
DO
    IF (Fp1(I4)>0.OR.Fp2(I4)>0) EXIT
    I4 = I4+1
END DO
nb = I4
DO I3 = 1,Mp
    Orb1(I3) = Fp1(nb)*Fib(2*I3+1) + Fp2(nb)*Fib(2*I3)
    Orb2(I3) = Fp1(nb)*Fib(2*I3)   + Fp2(nb)*Fib(2*I3-1)
END DO
RETURN
END SUBROUTINE CalculOrbite

! -----

! *****
! ***          ELIMINATION DES ELT. DE ORB DANS Fps          ***
! *****
SUBROUTINE Elimin(p,Mp,Fp1,Fp2,Orb1,Orb2)
IMPLICIT NONE

INTEGER  p,Mp
INTEGER, DIMENSION(p*p) :: Fp1,Fp2
INTEGER, DIMENSION(Mp)  :: Orb1,Orb2

INTEGER  I5,I6

DO I5 = 1,p*p
    IF (Fp1(I5)>0.OR.Fp2(I5)>0) THEN
        DO I6 = 1,Mp
            IF (Orb1(I6).EQ.Fp1(I5).AND.Orb2(I6).EQ.Fp2(I5)) THEN
                Fp1(I5) = 0
                Fp2(I5) = 0
            END IF
        END DO
    END IF
END DO
END IF

```

```

END DO
RETURN
END SUBROUTINE Elimin
! -----
!
! *****
! ***                CHOIX DES REPRESENTANTS                ***
! *****
SUBROUTINE Reps(p,Mp,Fib,Rep1,Rep2)

INTEGER  p,Mp
INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1)  :: Fib
INTEGER, DIMENSION((p*p-1)/Mp)  :: Rep1,Rep2

INTEGER, DIMENSION(p*p)          :: Fp1,Fp2
INTEGER, DIMENSION(Mp)           :: Orb1,Orb2
INTEGER  K3

CALL InitFps(p,Fp1,Fp2)
DO K3 = 1,(p*p-1)/Mp
    CALL CalculOrbite(p,Mp,Fib,Fp1,Fp2,Orb1,Orb2)
    Rep1(K3) = Orb1(1)
    Rep2(K3) = Orb2(1)
    CALL Elimin(p,Mp,Fp1,Fp2,Orb1,Orb2)
END DO
RETURN
END SUBROUTINE Reps
! -----
!
! *****
! ***                STOCKAGE DE LA MATRICE ASSYMETRIQUE                ***
! *****
SUBROUTINE Matrice(p,c,d,Mp,Fib,A)
IMPLICIT NONE

INTEGER  p,c,d,Mp
INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1)  :: Fib
COMPLEX, DIMENSION(Mp,Mp)      :: A

REAL     Pi,Phi1,Phi2
INTEGER  I7,J1
COMPLEX  z,z1,z2

Pi = 3.14159265359

DO I7 = 1,Mp
    DO J1 = 1,Mp
        IF (I7.EQ.J1) THEN

```

```

        Phi1 = 2*Pi*(c*Fib(2*(J1-1)+1)+d*Fib(2*(J1-1)))/p
        Phi2 = 2*Pi*(c*Fib(2*(J1-1))+d*Fib(2*(J1-1)-1))/p
        z1    = CMPLX(COS(Phi1),SIN(Phi1),KIND(z))
        z2    = CMPLX(COS(Phi2),SIN(Phi2),KIND(z))
        A(J1,J1) = z1 + z2
    ELSE IF (J1+1.EQ.I7) THEN
        A(J1,I7) = 1
    ELSE
        A(J1,I7) = 0
    END IF
END DO
END DO
A(Mp,1) = 1

RETURN
END SUBROUTINE Matrice
! -----
!
! *****
! ***                               UTILISATION LAPACK                               ***
! *****
SUBROUTINE SpectreLAPACK(Mp,A,Sp,INFO)
IMPLICIT NONE

INTEGER  Mp,INFO
COMPLEX, DIMENSION(Mp,Mp) :: A
COMPLEX, DIMENSION(Mp)   :: Sp

INTEGER  LW
COMPLEX, DIMENSION(3*Mp) :: W
REAL,    DIMENSION(2*Mp) :: RW

LW = 3*Mp
CALL CGEEV('N','N',Mp,A,Mp,SP,1,1,1,1,W,LW,RW,INFO)

RETURN
END SUBROUTINE SpectreLAPACK
! -----
!
! *****
! ***                               CALCUL DU SPECTRE (1 ORBITE)                               ***
! *****
SUBROUTINE SpectreOrb(p,c,d,Mp,Fib,Sp,INFO)
IMPLICIT NONE

INTEGER  p,c,d,Mp,INFO
INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1) :: Fib
COMPLEX, DIMENSION(Mp)        :: Sp

```

```

      COMPLEX, DIMENSION(Mp,Mp)      :: A

      CALL Matrice(p,c,d,Mp,Fib,A)
      CALL SpectreLAPACK(Mp,A,Sp,INFO)

      RETURN
      END SUBROUTINE SpectreOrb
! -----
!
! *****
! ***                               SPECTRE POUR UN P PREMIER                               ***
! *****
      SUBROUTINE Spectre(p,Mp)
      IMPLICIT NONE

      INTEGER    p,Mp

      INTEGER, DIMENSION((p*p-1)/Mp) :: Rep1,Rep2
      INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1)  :: Fib
      COMPLEX, DIMENSION(Mp)         :: Sp
      INTEGER    K4,c,d,J10,INFO

      OPEN(6,File='S1.TXT')

      CALL CreeFib(p,Mp,Fib)
      CALL Reps(p,Mp,Fib,Rep1,Rep2)
      IF (Mp<5000) THEN
        PRINT *, 'p = ',p,' Mp = ',Mp
        DO K4=1,(p*p-1)/Mp
          c=Rep1(K4)
          d=Rep2(K4)
          CALL SpectreOrb(p,c,d,Mp,Fib,Sp,INFO)

          IF (INFO .EQ. 0) THEN

            DO J10 = 1,Mp
              WRITE(6,*) REAL(Sp(J10))/3,AIMAG(Sp(J10))/3
            END DO

          END IF
        END DO
      END IF
      RETURN
      END SUBROUTINE Spectre
! -----

```

```

! *****
! ***                               FIN DU PROGRAMME SPECTRE1          ***
! *****
END

```

C.2 Pour T_{S_4} pour les représentants canoniques

```

! *****
! ***   PROGRAMME DE CALCUL DE LA VALEUR MINIMALE DU           ***
! ***   SPECTRE DES OPERATEURS D'ADJACENCE AUTOADJOINTS       ***
! ***   POUR LES GROUPES FINIS ASSOCIES AU PRODUIT           ***
! ***   SEMI-DIRECT DE  $Z^2$  PAR  $Z$                                ***
! *****
! ***   SPECTRE 4 : DEUX GENERATEURS, CAS SYMETRIQUE          ***
! ***   2 REPRESENTANTS {1,0} ET {0,1} DANS LES NATURELS-{0,1} ***
! *****

! *****
! ***                               PROGRAMME PRINCIPAL          ***
! *****
! PROGRAM Spectre4_2rep
! IMPLICIT NONE

!
! INTEGER p,Mp
!
! DO p = 2,300
!     CALL CalculMp(p,Mp)
!     CALL MinSpectre(p,Mp)
! END DO

! *****
! ***                               FIN DU PROGRAMME PRINCIPAL    ***
! *****

! CONTAINS
!
! *****
! ***   NOMBRES DE FIBONACCI MODULO p                           ***
! *****

! SUBROUTINE CreeFib(p,Mp,Fib)
! IMPLICIT NONE

!
! INTEGER p,Mp
! INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1) :: Fib

!
! INTEGER K2

!
! Fib(-1) = 1
! Fib(0)  = 0
! Fib(1)  = 1

```

```

DO K2 = 2,2*Mp+1
    Fib(K2)=MOD(Fib(K2-1)+Fib(K2-2),p)
END DO
RETURN
END SUBROUTINE CreeFib
! -----

! *****
! ***          CALCUL DE L'ORDRE DE LA MATRICE,Mp          ***
! *****
SUBROUTINE CalculMp(p,Mp)
IMPLICIT NONE

INTEGER    p,Mp

INTEGER, DIMENSION(2,2) :: A,B
INTEGER    I2

! *** DESCRIPTION DE LA MATRICE D'ANOSOV
A(1,1) = 2
A(2,1) = 1
A(1,2) = 1
A(2,2) = 1

B = A
! *** RAPPEL : Mp est l'ordre d'Anosov modulo p
I2 = 1
DO
    IF(B(1,1).EQ.1.AND.B(2,1).EQ.0.AND.B(1,2).EQ.0.AND.B(2,2).EQ.1)EXIT
    I2 = I2+1
    B = MATMUL(A,B)
    B(1,1) = MOD(B(1,1),p)
    B(2,1) = MOD(B(2,1),p)
    B(1,2) = MOD(B(1,2),p)
    B(2,2) = MOD(B(2,2),p)
END DO
Mp = I2
RETURN
END SUBROUTINE CalculMp
! -----

! *****
! ***          STOCKAGE DE LA MATRICE SYMETRIQUE DANS UN VECTEUR          ***
! *****
SUBROUTINE Stock(p,c,d,Mp,Fib,AP)
IMPLICIT NONE

INTEGER    p,c,d,Mp

```

```

INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1)  :: Fib
REAL*8,  DIMENSION(Mp*(Mp+1)/2) :: AP

REAL*8    Pi,Phi,Phi1
INTEGER   I7,J1

Pi = 3.1415926535897932385

DO I7 = 1,Mp*(Mp+1)/2
    AP(I7) = 0
END DO

DO J1 = 2,Mp
    Phi = 2*Pi*(c*Fib(2*(J1-1)+1)+d*Fib(2*(J1-1)))/p
    AP(J1+(J1*(J1-1)/2)) = 2*COS(Phi)+4
    AP(J1-1+(J1*(J1-1)/2)) = 1
END DO
Phi1 = 2*Pi*(c*Fib(1)+d*Fib(0))/p
AP(1) = 2*COS(Phi1)+4
AP(1+(Mp*(Mp-1)/2)) = 1

RETURN
END SUBROUTINE Stock
! -----

! *****
! ***                                ***
! *****
SUBROUTINE Tridiag(p,c,d,Mp,Fib,E,F,INFO)
IMPLICIT NONE

INTEGER  p,c,d,Mp,INFO
INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1) :: Fib
REAL*8,  DIMENSION(Mp)         :: E
REAL*8,  DIMENSION(Mp-1)       :: F

REAL*8,  DIMENSION(Mp*(Mp+1)/2) :: AP
REAL*8,  DIMENSION(Mp)          :: TAU

CALL Stock(p,c,d,Mp,Fib,AP)

! *** TRIDIAGONALISATION (LAPACK)
CALL DSPTRD('U',Mp,AP,E,F,TAU,INFO)

RETURN
END SUBROUTINE Tridiag
! -----

```

```

! *****
! ***          CALCUL DE LA VALEUR MINIMALE (1 ORBITE)          ***
! *****
SUBROUTINE ValeurMin(Mp,E,F,Min,INFO)
IMPLICIT NONE

INTEGER  Mp,INFO
REAL*8,  DIMENSION(Mp)    :: E
REAL*8,  DIMENSION(Mp-1)  :: F
REAL*8   Min

INTEGER  LW,M,N,Z,IF
REAL*8   VL,VU,AT
REAL*8,  DIMENSION(Mp)    :: W1
REAL*8,  DIMENSION(4*Mp)  :: W2
INTEGER, DIMENSION(5*Mp)  :: IW

! *** VALEUR MINIMALE DU SPECTRE (LAPACK)
N  = Mp
VL = 1
VU = 1
AT = 0
CALL DSTEVR('N','I',N,E,F,VL,VU,1,1,AT,M,W1,Z,N,W2,IW,IF,INFO)

Min = W1(1)
RETURN
END SUBROUTINE ValeurMin

! -----
! *****
! ***          MINIMUM DU SPECTRE POUR UN REPRESENTANT          ***
! *****
SUBROUTINE MinSpectreRep(p,c,d,Mp,Fib,Min,INFO)
IMPLICIT NONE

INTEGER  p,c,d,Mp,INFO
REAL*8   Min
INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1) :: Fib

REAL*8,  DIMENSION(Mp)    :: E
REAL*8,  DIMENSION(Mp-1)  :: F

CALL Tridiag(p,c,d,Mp,Fib,E,F,INFO)
IF (INFO .EQ. 0) THEN
    CALL ValeurMin(Mp,E,F,Min,INFO)
END IF

RETURN

```

```

END SUBROUTINE MinSpectreRep
! -----

!
! *****
! ***          MINIMUM DU SPECTRE POUR UN P PREMIER          ***
! *****
SUBROUTINE MinSpectre(p,Mp)
IMPLICIT NONE

INTEGER  p,Mp

REAL*8   Min1,Min2
INTEGER, DIMENSION(2)      :: Rep1,Rep2
INTEGER, DIMENSION(-1:2*Mp+1) :: Fib
INTEGER  K4,c,d,INFO

OPEN(6,File='S42.TXT')

Min2 = 10

CALL CreeFib(p,Mp,Fib)
Rep1(1) = 1
Rep2(1) = 0
Rep1(2) = 0
Rep2(2) = 1
IF (Mp<5000) THEN
    PRINT *, 'p = ',p,' Mp = ',Mp
    DO K4 = 1,2
        c = Rep1(K4)
        d = Rep2(K4)
        CALL MinSpectreRep(p,c,d,Mp,Fib,Min1,INFO)
        IF (INFO .EQ. 0) THEN
            Min2=MIN(Min1,Min2)
        ELSE
            PRINT *, 'PROBLEME'
        END IF
    END DO
    PRINT *, 'NbOrb = ',(p*p-1)/Mp,' Min = ',(Min2-4)/4
    WRITE (6,*) '{',p,',',(Min2-4)/4,'}',
END IF
RETURN
END SUBROUTINE MinSpectre
! -----

!
! *****
! ***          FIN DU PROGRAMME SPECTRE4_2REP          ***
! *****
END

```

Bibliographie

- [1] E. ANDERSON, Z. BAI, C. BISCHOF, J. DEMMEL, J. DONGARRA, J. DU CROZ, A. GREENBAUM, S. HAMMARLING, A. MCKENNEY, S. OSTROUCHOV, and D. SORESENSEN. *LAPACK Users' Guide*. Society for industrial and applied mathematics, 1992.
- [2] Cédric BÉGUIN, Alain VALETTE, and Andrzej ZUK. On the spectrum of a random walk on the discrete heisenberg group and the norm of harper's operator. *Journal of geometry and physics*, 1997.
- [3] A. J. COLEMAN. *Induced representations with applications to $Sym(n)$ and $GL(n)$* . Queen's university, Kingston, Ontario, 1996.
- [4] Pierre DE LA HARPE, A. Guyan ROBERTSON, and Alain VALETTE. On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group. *Israel J. Math.*, 81 :65–96, 1993.
- [5] Pierre DE LA HARPE, A. Guyan ROBERTSON, and Alain VALETTE. On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group ii. *Coll. Math.*, LXV :87–102, 1993.
- [6] Jacques DIXMIER. *Les C^* -algèbres et leur représentations*. Gautier-Villars, 1968. Réédité aux éditions Jacques Gabay en 1996.
- [7] Richard V. KADISON and John R. RINGROSE. *Fundamentals of the theory of operator algebras*, volume I : Elementary theory. Academic Press, 1983.
- [8] Harry KESTEN. Symetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*92, 92 :336–354, 1959.
- [9] Ronald L. LIPSMAN. *Group representations*. Springer-Verlag, 1974.
- [10] Gerard J. MURPHY. *C^* -algebras and operator theory*. Academic Press, 1990.
- [11] M.S. RAGHUNATHAN. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer-Verlag, 1972.
- [12] Charles E. RICKART. *Banach algebras*. Von Nostrand company Inc., 1960.
- [13] Joseph J. ROTMAN. *An Introduction to the theory of groups*. Springer-Verlag, 1995. Fourth edition.
- [14] Walter RUDIN. *Fourier analysis on groups*. Interscience Publishers, 1962.
- [15] Jean-Pierre SERRE. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris : collection méthodes, 1978.