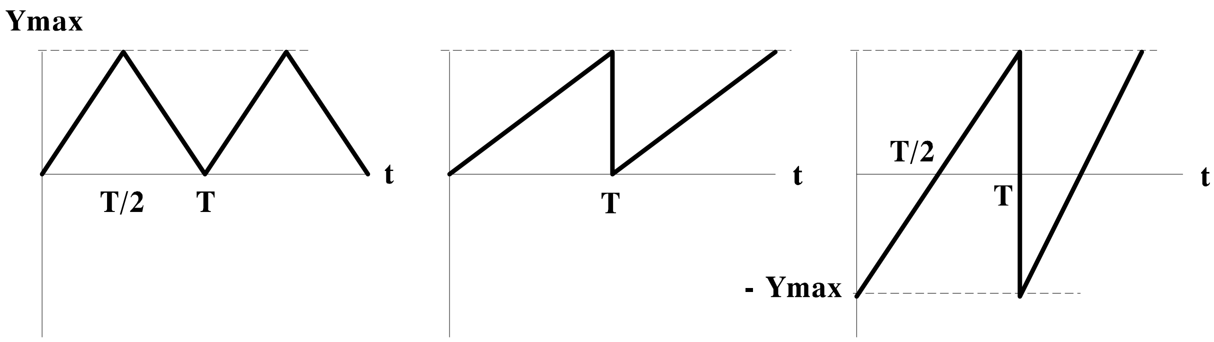
EJERCICIOS DE FORMAS DE ONDA y DESARROLLOS EN SERIE DE FOURIER.

EJERCICIO 1.- Hallar el valor eficaz, Y, de las formas de onda representadas en la figura.

$$y\ (t) = \frac{\mathrm{Ymax}}{T/2}\ t \qquad y\ (t) = \frac{\mathrm{Ymax}}{T}\ t \qquad y\ (t) = \frac{\mathrm{Ymax}}{T/2}\ (t - T/2)$$



RESOLUCIÓN:

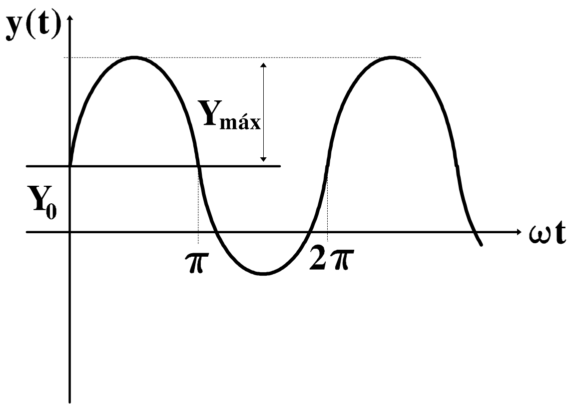
Los valores eficaces de las tres formas de onda son iguales. Para la segunda forma de onda se tiene que:

$$y(\ t\ ) = \frac{Y_m x}{T} t$$

$$Y^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{Y_m^2}{T^2} t^2\, d\ t = \frac{Y_m^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T = \frac{Y_m^2}{3}$$

$$Y = \frac{Y_m}{\sqrt{3}} = 0{,}577\, Y_m$$

EJERCICIO 2.- Hallar el valor medio y el valor eficaz de una onda sinusoidal alternada no simétrica de período 2π.



RESOLUCIÓN:

Sea la onda sinusoidal alternada no simétrica de la figura

La función de onda vendrá dada por: $y(t) = Y_0 + Y_m \, x \, sen \; \omega \; t$

El valor medio se obtendrá como:

$$Y_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Y_0 + Y_m \, x \, sen \; \omega \; t) \, dt = \frac{1}{2\pi} Y_0 \, 2\pi \quad Y_{med} = Y_0$$

El valor eficaz se calcula como:

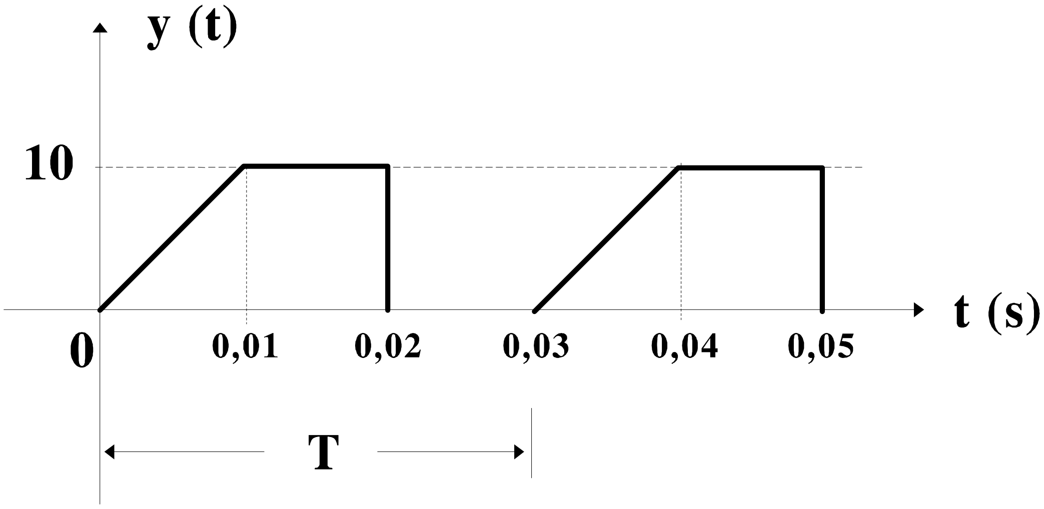
$$Y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Y_0 + Y_m \, x \, sen \; \omega \; t)^2 \, dt$$

$$Y^2 = \frac{1}{2\pi} \left[Y_0^2 \, 2\pi + 2 \, Y_0 \, Y_m \, x (-\cos \omega \, t)_0^{2\pi} + Y_{\max}^2 \left(\frac{\omega \, t}{2} - \frac{sen \; 2 \; \omega \; t}{4} \right)_0^{2\pi} \right]$$

$$Y^2 = \frac{1}{2\pi} \left[2\pi Y_0^2 + \frac{2\pi}{2} Y_m \, x^2 \right]$$

$$Y = \sqrt{Y_0^2 + \frac{Y_m \, x^2}{2}}$$

EJERCICIO 3.- Hallar el valor eficaz de la onda representada en la figura.



RESOLUCIÓN:

Por tratarse de una función discontinua habrá que considerar el valor de dicha función en cada intervalo dentro del período. Así se tiene que:

$$0 \leq t \leq 0{,}01 \, s \qquad y \, (t) = 1.000 \, t$$

$$0{,}01 \leq t \; 0{,}02 \; s \qquad y\;(t) = 10$$
$$0{,}02 \leq t \leq 0{,}03 \; s \qquad y\;(t) = 0$$

El valor eficaz vendrá dado por:

$$Y^2 = \frac{1}{0{,}03}\left[\int_0^{0{,}01} 1.000^2\, t^2\, d\;\; t + \int_{0{,}01}^{0{,}02} 10^2\, d\;\; t\right]$$

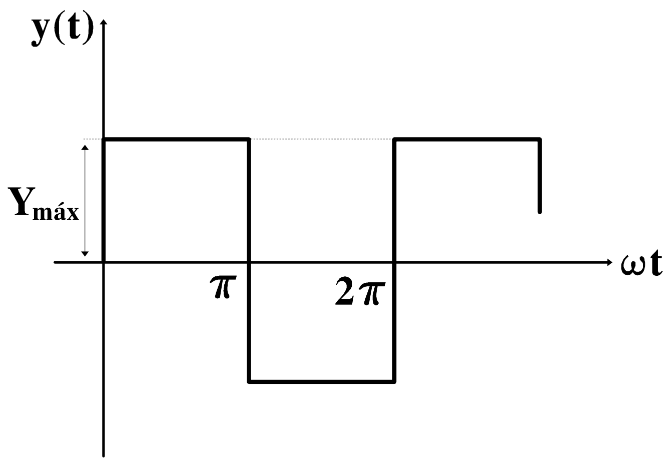
$$Y^2 = \frac{1}{0{,}03}\left[1.000^2 \left|\frac{t^3}{3}\right|_0^{0{,}01} + 10^2 \left|\, t \,\right|_{0{,}01}^{0{,}02}\right]$$

$$Y^2 = \frac{1}{0{,}03}\left[1.000^2 \; x \; \frac{0{,}01^3}{3} + 10^2 \; x \; 0{,}01\right] = 44{,}4$$

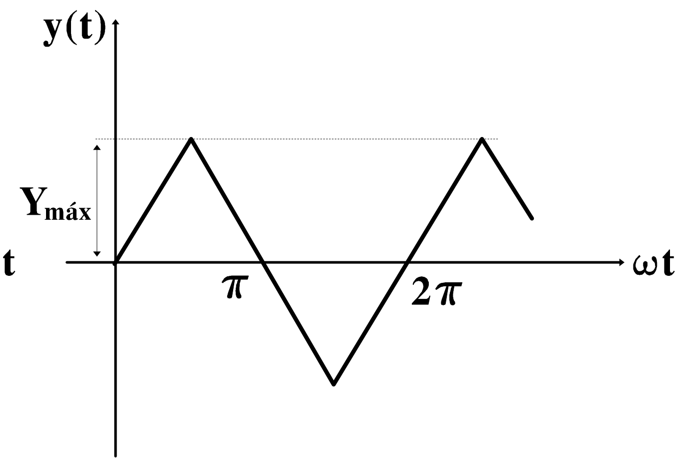
$$Y = 6{,}67$$

EJERCICIO 4.- Calcular los valores medios y eficaces de las siguientes formas de onda, utilizando las correspondiente definiciones:

Onda cuadrada:

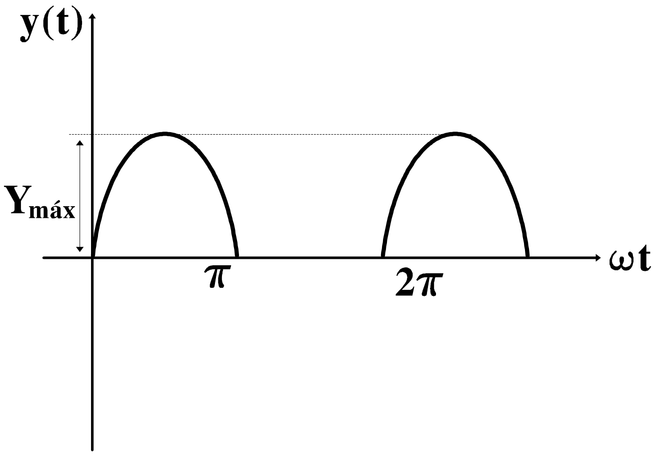


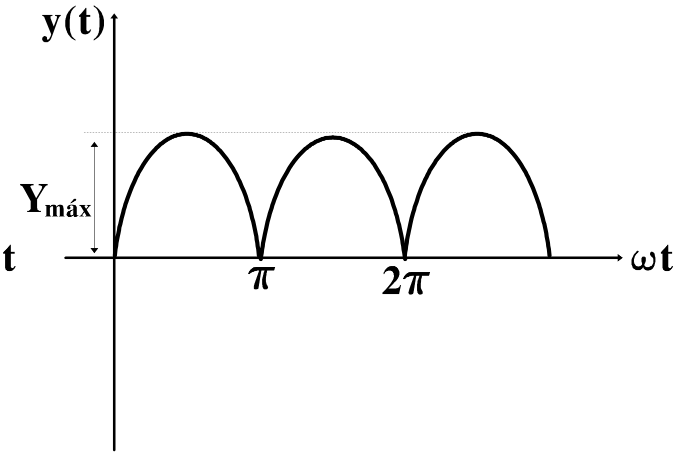
Onda triangular:



Onda rectificada:

Onda doblemente rectificada:





<u>RESOLUCIÓN</u>:

ONDA CUADRADA

La función de onda, de la onda cuadrada, se puede expresar como:

$$y(\omega t) = Y_m x \quad 0 \le \omega t \le \pi$$
$$y(\omega t) = -Y_m x \quad \pi \le \omega t \le 2\pi$$

la función tiene un período T = 2 π.

Valor medio:

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y(\omega t)\, d\omega t$$
$$Y_{med} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} Y_{\max}\, d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi} Y_{\max}\, d\omega t\right)$$
$$Y_{med} = 0$$

Valor eficaz:

$$Y^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(\omega t)\, d\omega t$$
$$Y^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} Y_{\max}^2\, d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} Y_{\max}^2\, d\omega t\right)$$
$$Y^2 = \frac{Y_{\max}^2}{2\pi}(\pi - 0 + 2\pi - \pi) = Y_{\max}^2$$
$$Y = Y_{\max}$$

Factor de amplitud:

$$F.A. = \frac{Y_{\max}}{Y} = \frac{Y_{\max}}{Y_{\max}} = 1$$

Factor de forma:

$$F.F. = \frac{Y}{Y_{med}(\ \text{doblemente rectificada}\ )} = \frac{Y_{\max}}{Y_{\max}} = 1$$

ONDA TRIANGULAR

La función de onda, de la onda triangular, puede venir dada por:

$$0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2} \quad y(\omega t) = Y_{\max}\left(\frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} \le \omega t \le \frac{3\pi}{2} \quad y(\omega t) = Y_{\max}\left(2 - \frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\frac{3\pi}{2} \le \omega t \le 2\pi \quad y(\omega t) = Y_{\max}\left(\frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}} - 4\right)$$

cuyo período es de: T = 2 π.

Valor medio:

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y(\omega t)\, d\omega t$$

$$Y_{med} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_{\max}\left(\frac{\omega t}{2}\right) d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} Y_{\max}\left(2 - \frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}}\right) d\omega t\right) + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} Y_{\max}\left(\frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}} - 4\right) d\omega t$$

$$Y_{med} = 0$$

Valor eficaz: $Y^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(\omega t)\, d\omega t$

$$Y^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_{\max}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)^2 d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} Y_{\max}^2\left(2 - \frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 d\omega t\right) + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} Y_{\max}^2\left(\frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}} - 4\right)^2 d\omega t$$

$$Y = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{3}}$$

Factor de amplitud:

$$F.A. = \frac{Y_{\max}}{Y} = \frac{Y_{\max}}{Y_{\max} / \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Factor de forma:

$$F.F. = \frac{Y}{Y_{med}(\ doblemente\ rectificada\ )} = \frac{Y_{\max} / \sqrt{3}}{Y_{\max} / 2} = 1'15$$

ONDA RECTIFICADA

La onda rectificada de una onda senoidal se expresa por:

$$y(\omega t) = Y_{\max} sen(\omega t) \quad 0 \le \omega t \le \pi$$
$$y(\omega t) = 0 \quad \pi \le \omega t \le 2\pi$$

con un período T = 2 π.

Valor medio:

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y(\omega t) d\omega t$$
$$Y_{med} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi Y_{\max} sen(\omega t) d\omega t$$
$$Y_{med} = \frac{Y_{\max}}{\pi}$$

Valor eficaz:

$$Y^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(\omega t) d\omega t$$
$$Y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi Y_{\max}^2 sen^2(\omega t) d\omega t$$
$$Y = \frac{Y_{\max}^2}{2\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{sen\ 2\omega t}{4}\right]_0^\pi$$
$$Y = \frac{Y_{\max}}{2}$$

Factor de amplitud:

$$F.A. = \frac{Y_{\max}}{Y} = \frac{Y_{\max}}{Y_{\max} / 2} = 2$$

Factor de forma:

$$F.F. = \frac{Y}{Y_{med}} = \frac{Y_{\max} / 2}{Y_{\max} / \pi} = 1'57$$

ONDA DOBLEMENTE RECTIFICADA

La función de onda será:

$$y(\omega t) = Y_{\max} sen(\omega t) \quad 0 \le \omega t \le \pi$$

con un período T = π.

Valor medio:

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y(\omega t) d\omega t$$

$$Y_{med} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Y_{\max} sen(\omega t) d\omega t$$

$$Y_{med} = \frac{2 Y_{\max}}{\pi}$$

Valor eficaz:

$$Y^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(\omega t) d\omega t$$

$$Y^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Y_{\max}^2 sen^2(\omega t) d\omega t$$

$$Y = \frac{Y_{\max}^2}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{sen\ 2\omega t}{4}\right]_0^\pi$$

$$Y = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{2}}$$

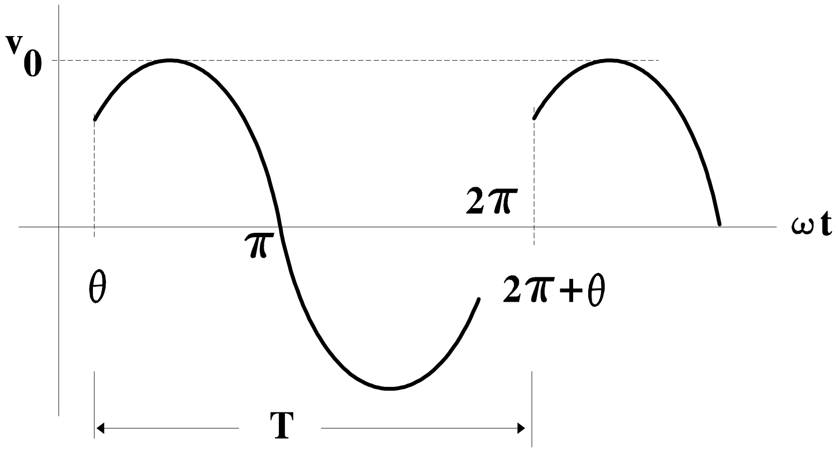
Factor de amplitud:

$$F.A. = \frac{Y_{\max}}{Y} = \frac{Y_{\max}}{Y_{\max} / \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Factor de forma:

$$F.F. = \frac{Y}{Y_{med}} = \frac{Y_{\max} / \sqrt{2}}{2 Y_{\max} / \pi} = 1'11$$

EJERCICIO 5.- Calcular las expresiones del valor medio y el valor eficaz de la onda rectificada de la figura en función de θ.



RESOLUCIÓN:

Dentro del intervalo correspondiente al período de la forma de onda, se presentan tres intervalos, en dos de los cuales la función es nula y, por tanto, solo en el intervalo θ - π la función es distinta de cero y con un valor de:

$$v(t) = v_o \, sen(\omega t)$$

El valor medio vendrá dado por la expresión:

$$V_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta}^{\pi} v_0 \, sen(\omega t) d\omega t$$

$$V_m = \frac{1}{2\pi} v_o \left[-\cos(\omega t)\right]_{\theta}^{\pi}$$

$$V_m = \frac{v_o}{2\pi}(1 + \cos\theta)$$

El valor eficaz se obtiene como:

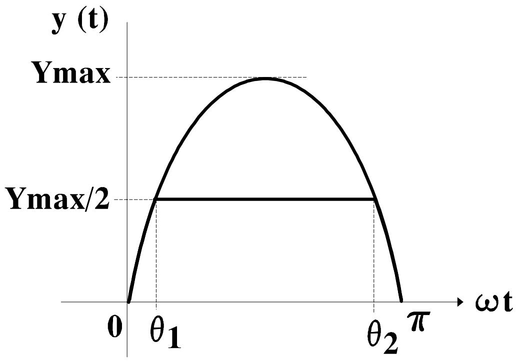
$$V^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta}^{\pi} v_0^2 \, sen^2(\omega t) d\omega t$$

$$V^2 = \frac{v_o^2}{2\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{sen\, 2\omega t}{4}\right]_{\theta}^{\pi}$$

$$V^2 = \frac{v_o^2}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{sen\, 2\theta}{4}\right]$$

$$V = \frac{v_o}{2}\sqrt{1 - \frac{\theta}{\pi} + \frac{sen\ 2\ \theta}{2\pi}}$$

EJERCICIO 6.- Hallar el valor eficaz de una onda completa senoidal rectificada cortada en la mitad de su valor máximo, tal como se indica en la figura.



RESOLUCIÓN:

Al cortar la onda por la mitad de su valor máximo se obtienen los dos ángulos de corte que definen los intervalos de discontinuidad de la función. Así se tiene que:

$$y\ (t) = Y_m\ sen\,\omega\ t \qquad 0{,}5\,Y_m = sen\,\omega\ t \qquad \omega\ t = 30°$$

por tanto:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} \qquad \theta_2 = \frac{5\pi}{6}$$

El valor eficaz de la función se expresará como:

$$Y^2 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} Y_m^2\,sen^2\ \omega\ t\,d\ \omega\ t + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 0{,}5^2\,Y_m^2\,d\ \omega\ t + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} Y_m^2\,sen^2\ \omega\ t\,d\ \omega\ t\right]$$

$$Y^2 = \frac{y_m^2}{\pi}\left[\left|\frac{\omega\ t}{2} - \frac{sen\ 2\ \omega\ t}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{6}} + o{,}5^2\left|\omega\ t\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \left|\frac{\omega\ t}{2} - \frac{sen\ 2\ \omega\ t}{4}\right|_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\right]$$

$$Y = 0{,}44\,Y_m$$

EJERCICIO 7.- Obtener los desarrollos trigonométricos en términos en series de Fourier de las formas de onda indicadas en el **EJERCICIO 4**.

RESOLUCIÓN:

ONDA CUADRADA

La función de onda, de la onda cuadrada, se puede expresar como:

$$y(\omega t) = Y_{max} \quad 0 \le \omega t \le \pi$$
$$y(\omega t) = -Y_{max} \quad \pi \le \omega t \le 2\pi$$

la función tiene un período T = 2 π.

El desarrollo pedido será de la forma: $y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n sen(n\omega t)$

siendo: $\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (T \text{ , periodo de la funcion })$

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt \qquad a_0 = 0 \quad \text{Onda simetrica alternada}$$

Por otro lado se sabe que, por ser una función impar los términos $a_n = 0$ y por tener simetría de semionda $b_n = 0$ con ***n impar***. Por tanto, el desarrollo sólo tendrá términos ***impares en seno***.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(n\omega t)\,d\omega t$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} Y_{\max}\cos(n\omega t)\,d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi} Y_{\max}\cos(n\omega t)\,d\omega t\right)$$

$$a_n = \frac{Y_{\max}}{\pi}\left[\frac{sen\ \omega t}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{sen\ n\omega t}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,sen(n\omega t)\,d\omega t$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} Y_{\max}\,sen(n\omega t)\,d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi} Y_{\max}\,sen(n\omega t)\,d\omega t\right)$$

$$b_n = \frac{Y_{\max}}{\pi}\left[\frac{-\cos\ \omega\ t}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos\ n\ \omega\ t}{n} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right]$$

$$b_n = \frac{Y_{\max}}{n\pi}\left[-\cos\ n\ \pi + \cos\ 0 + \cos\ 2\ n\ \pi - \cos\ n\ \pi \right] = \frac{Y_{\max}}{n\ \pi}\left[2 - 2\cos\ n\ \pi \right]$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que:

n	1	2	3	...	n
cos n π	- 1	1	- 1	...	$(-1)^n$

se tiene que: $b_n = \frac{2\,Y_{\max}}{n\pi}\left[1 - (-1)^n \right] = \frac{2\,Y_{\max}}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n} \right]$

y por tanto:

n	1	2	3	...	n
$[1 - (-1)^n]/n$	2 / 1	0	2 / 3	...	$2/n_{impar}$

Así pues, $b_n = \frac{4\,Y_{\max}}{\pi}\,\frac{1}{n_{impar}}$

El desarrollo buscado será: $y(\ \omega\ t\ ) = \frac{4\,Y_{\max}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,sen\ n\ \omega\ t$

Para los primeros armónicos se tiene:

$$y(\ \omega\ t\ ) = \frac{4\,Y_{\max}}{\pi}\left[sen\ \omega\ t + \frac{1}{3}sen\ 3\ \omega\ t + \frac{1}{5}sen\ 5\ \omega\ t + \frac{1}{7}sen\ 7\ \omega\ t \ldots \right]$$

para los cuales se verifica que:

$$c_0 = 0 \qquad c_1 = \frac{4\,Y_{\max}}{\sqrt{2}\,\pi} \qquad c_3 = \frac{4\,Y_{\max}}{3\sqrt{2}\,\pi} \qquad c_5 = \frac{4\,Y_{\max}}{5\sqrt{2}\,\pi} \qquad c_7 = \frac{4\,Y_{\max}}{7\sqrt{2}\,\pi}$$

como:

$$Y = \sqrt{c_0^2 + \frac{c_1^2}{2} + \ldots + \frac{c_n^2}{n}}$$

por tanto: $Y = 0'97\,Y_{\max}$

ONDA TRIANGULAR

La función de onda correspondiente a la onda triangular es:

$$0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2} \quad y(\omega t) = Y_{\max}\left(\frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} \le \omega t \le \frac{3\pi}{2} \quad y(\omega t) = Y_{\max}\left(2 - \frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\frac{3\pi}{2} \le \omega t \le 2\pi \quad y(\omega t) = Y_{\max}\left(\frac{\omega t}{\frac{\pi}{2}} - 4\right)$$

cuyo período es de: T = 2 π.

Como en el caso anterior, se trata de una función alternada simétrica por lo que su valor medio es nulo, es decir, a_0 = 0, es una función impar, por lo cual los términos a_n = 0, y por tener simetría de semionda
b_n = 0 con ***n impar***. Por tanto, el desarrollo sólo tendrá términos ***impares en seno***.

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES:

$$a_0 = 0$$
$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,sen(n\omega t)\,d\omega t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{Y_{\max}}{\pi/2}(\omega t)\,sen(n\omega t)\,d\omega t + \right.$$
$$+\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2Y_{\max}\,sen(n\omega t)\,d\omega t - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{Y_{\max}}{\pi/2}(\omega t)\,sen(n\omega t)\,d\omega t +$$
$$\left. + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{Y_{\max}}{\pi/2}(\omega t)\,sen(n\omega t)\,d\omega t - \int_{3\pi/2}^{2\pi} 4Y_{\max}\,sen(\omega t)\,d\omega t\right]$$

Operando se tiene que: $b_n = \frac{4Y_{\max}}{n^2\pi^2}\left[sen\,n\frac{\pi}{2} - sen\,n\frac{3\pi}{n}\right]$

por tanto:

$$sen\,n\frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \quad n = impar \qquad sen\,n\frac{\pi}{2} = 0 \quad n = par \quad (\text{ Simetria de semionda })$$

así, se obtiene:

$$b_n = \frac{8Y_{\max}}{\pi^2 n^2}\,sen\,n\frac{\pi}{2} \qquad b_n = \frac{8Y_{\max}}{\pi^2 n^2}(-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \quad para\ n = 1,3,5,\ldots$$

El desarrollo buscado es: $y(\omega t)=\dfrac{8Y_{\max}}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,...}\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}\operatorname{sen} n\omega t$

Para los primeros armónicos se tiene: $y(\omega t)=\dfrac{8Y_{\max}}{\pi^2}\left[\operatorname{sen}\omega t-\dfrac{1}{9}\operatorname{sen}3\omega t+\dfrac{1}{25}\operatorname{sen}5\omega t+...\right]$

ONDA RECTIFICADA

La función de onda se expresa por:

$$y(\omega t)=Y_{\max}\operatorname{sen}(\omega t)\quad 0\le\omega t\le\pi$$
$$y(\omega t)=0\quad \pi\le\omega t\le 2\pi$$

con un período T = 2 π.

<u>CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES</u>:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T y(\omega t)\,d\omega t$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{\max}\operatorname{sen}\omega t\,d\omega t=\frac{Y_{\max}}{2\pi}(2)$$

$$a_0=\frac{Y_{\max}}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T y(\omega t)\cos n\omega t\,d\omega t$$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{\max}\operatorname{sen}\omega t\cos n\omega t\,d\omega t$$

$$a_n=\frac{-Y_{\max}}{n^2-1}(1+\cos n\pi)$$

$$Para\ n=1\ =>\ a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Y_{\max}\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\,d\omega t=0$$

$$Para\ n\ge 2\ =>\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Y_{\max}\operatorname{sen}\omega t\cos n\omega t\,d\omega t$$

pero para ***n impar*** se verifica que ***cos n π = - 1***, por tanto, $\boldsymbol{a_n = 0}$

$$a_n=\frac{-2Y_{\max}}{n^2-1}\quad para\ n=2,4,6,...$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T y(\omega t)\operatorname{sen} n\omega t\,d\omega t$$

$$Para\ n=1\ =>\ b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Y_{\max}\operatorname{sen}^2\omega t\,d\omega t=\frac{Y_{\max}}{2}$$

$$Para\ n \geq 2 \ => \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Y_{\max}\, sen\ \omega\ t\, sen\ n\ \omega\ t\, d\ \omega\ t = 0$$

El desarrollo buscado es: $$y(\omega t) = \frac{Y_{\max}}{\pi} + \frac{Y_{\max}}{2} sen\ \omega\ t - \frac{2Y_{\max}}{\pi}\sum_{n=2,4,6,\ldots}\frac{1}{n^2-1}\cos n\ \omega\ t$$

Para los primeros armónicos se tiene:

$$y(\omega t) = \frac{Y_{\max}}{\pi} + \frac{Y_{\max}}{2} sen\ \omega\ t - \frac{2Y_{\max}}{\pi}\left[\frac{1}{3}\cos 2\ \omega\ t + \frac{1}{15}\cos 4\ \omega\ t + \ldots\right]$$

ONDA DOBLEMENTE RECTIFICADA

La función de onda será: $y(\omega t) = Y_{\max}\, sen(\omega t) \quad 0 \leq \omega t \leq \pi$

con un período T = π.

<u>CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES</u>:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(\omega t)\, d\ \omega\ t \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Y_{\max}\, sen\ \omega\ t\, d\ \omega\ t = \frac{Y_{\max}}{\pi}(2)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(\omega t)\cos n\ \omega\ t\, d\ \omega\ t$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Y_{\max}\, sen\ \omega\ t \cos n\ \omega\ t\, d\ \omega\ t$$

$$a_n = -\frac{2Y_{\max}}{\pi}\,\frac{\cos n\ \pi + 1}{n^2-1}$$

$$a_0 = \frac{2Y_{\max}}{\pi}$$

De la tabla de valores:

n	1	2	3	...	n
cos n π	- 1	1	-	...	$(-1)^n$

se obtiene:

$$Para\ n\ impar \ => \ a_n = 0 \qquad Para\ n\ par \ => \ a_n = -\frac{4Y_{\max}}{\pi}\,\frac{1}{n^2-1}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(\omega t)\, sen\ n\ \omega\ t\, d\ \omega\ t$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} Y_{\max}\, sen\ \omega\ t\, sen\ n\ \omega\ t\, d\ \omega\ t = 0$$

$$b_n = 0$$

El desarrollo buscado es: $$y(\omega t) = \frac{2 Y_{\max}}{\pi} - \frac{4 Y_{\max}}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos n \omega t$$

Para los primeros armónicos se tiene:

$$y(\omega t) = \frac{2 Y_{\max}}{\pi} - \frac{4 Y_{\max}}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos 2 \omega t + \frac{1}{15} \cos 4 \omega t + \frac{1}{35} \cos 6 \omega t + \ldots \right]$$
