

Unidad 1

Conceptos básicos de metrología - Incertidumbres de medición - Errores

Introducción

Una *magnitud física* es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o sustancia, susceptible de ser medido. Ejemplos de magnitudes son la longitud, la masa, la potencia, la velocidad, etc. A una magnitud específica de un *objeto* que estamos interesado en medir la llamamos *mesurando*. Por ejemplo, si estamos interesado en medir la longitud de una barra, esa longitud específica será el *mesurando*.

Para establecer el valor de un *mesurando* tenemos que usar *instrumentos de medición* y un *método de medición*. Asimismo es necesario definir *unidades de medición*. Por ejemplo, si deseamos medir el largo de una varilla, el instrumento de medición será una regla. Si hemos elegido el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad será el metro y la regla a usar deberá estar calibrada en esa unidad o en submúltiplos de ella. El método de medición consistirá en determinar cuantas veces la unidad y fracciones de ella contenidos en el valor del *mesurando*.

Nuestras mediciones están afectadas de *errores o incertidumbres* de medición que proviene de las limitaciones impuestas por:

- la precisión y exactitud de los instrumentos usados,
- la interacción del método de medición con el *mesurando*,
- la definición del objeto a medir,
- la influencia del observador u observadores que realizan la medición.

En ciencias e ingeniería, el concepto de *error* tiene un significado diferente del uso habitual de este término. Coloquialmente, es usual el empleo del término error como análogo o equivalente a equivocación. En ciencias e ingeniería, el error de una medición está más bien asociado al concepto de *incertidumbre* en la determinación del resultado de la misma. Más precisamente, lo que procuramos en toda medición es conocer las cotas o límites probabilísticos de estas incertidumbres. Gráficamente, buscamos establecer un intervalo

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

como el de la Fig. 1.1, donde con cierta probabilidad, podamos decir que se encuentra el *mejor valor* de la magnitud x . Este mejor valor $\bar{x}$ es el valor más representativo de nuestra medición y al semiancho Δx lo denominamos la *incertidumbre absoluta o error absoluto* de la medición.

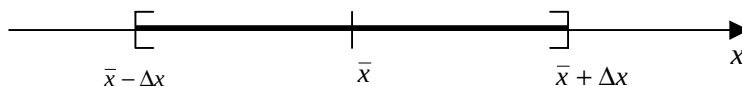


Figura 1.1. Intervalo asociado al resultado de una medición. Notamos que, en lugar de dar un único número, definimos un intervalo. Al valor representativo del centro del intervalo ($\bar{x}$) lo llamamos el mejor valor de la magnitud en cuestión. El semiancho del intervalo (Δx) se denomina la *incertidumbre absoluta o error absoluto de la medición*.

Los instrumentos de medición tienen una *precisión* finita. La precisión de un instrumento está asociada a la variación mínima de la magnitud que el mismo puede detectar. Por ejemplo, con una regla graduada en milímetros no podemos detectar variaciones menores que una fracción del milímetro. La mínima cantidad que detecta un instrumento se denomina la *apreciación nominal* del instrumento.

La *interacción* del método de medición con el mesurando también puede introducir errores. Tomemos como ejemplo una medición de temperatura. Cuando usamos un termómetro para medir la temperatura, parte del calor del objeto fluye al termómetro (o viceversa), de modo que el resultado de la medición de la temperatura es un valor modificado del original debido a la inevitable interacción que debemos realizar. Es claro que esta interacción podrá o no ser significativa. Si estamos midiendo la temperatura de un metro cúbico de agua, la cantidad de calor transferida al termómetro puede no ser significativa, pero sí lo será si el volumen en cuestión es de una pequeña fracción del mililitro. Siempre que realizamos una medición, interactuamos con el objeto de la medición.

A su vez, las magnitudes a medir tampoco están definidas con infinita precisión. Imaginemos que queremos medir el largo de un listón de madera. Es posible que al usar instrumentos cada vez más precisos empecemos a notar las irregularidades típicas del corte de los bordes o, al ir aun más allá, finalmente detectemos la naturaleza atómica o molecular del material que la constituye. En este punto la longitud dejará de estar bien definida. En la práctica, es posible que mucho antes de estos casos límites, la falta de paralelismo en sus bordes haga que el concepto de la “longitud del listón” comience a hacerse cada vez menos definido, y a esta limitación intrínseca la denominamos *denomina incertidumbre intrínseca* debida a la falta de definición de la magnitud en cuestión.

Otro ejemplo es el caso en que se cuenta la cantidad de partículas alfa emitidas por una fuente radioactiva en un intervalo de cinco segundos. Sucesivas mediciones arrojarán diversos resultados (similares, pero en general distintos). En este caso, de nuevo, estamos frente a una manifestación de una incertidumbre intrínseca asociada a la magnitud “número de partículas emitidas en cinco segundos” (en este caso más que a las incertidumbres que tienen como fuente el error de los instrumentos o del observador).

Todas estas limitaciones derivan en que no podamos obtener con certeza “el” valor de un mesurando, sino que solo podamos establecer un rango posible de valores donde pueda estar razonablemente contenido, lo que hacemos evaluando e informando la incertidumbre de la medición.

Una forma de expresar el resultado de una medición es con la notación

$$\bar{x} \pm \Delta x \quad (1.1)$$

e indicando a continuación la *unidad de medición*. Además de la incertidumbre absoluta Δx se definen:

- la incertidumbre relativa o error relativo: $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$, que expresa cuán significativa es la incertidumbre comparada con el valor medido,
- la incertidumbre relativa porcentual o error relativo porcentual: $\varepsilon \% = \varepsilon_x \cdot 100\%$.

Estas dos últimas cantidades son descriptivas de la calidad de la medición que el error absoluto.

Precisión y exactitud

Como vimos, la precisión de un instrumento o un método de medición está asociada a la sensibilidad o menor variación de la magnitud que se pueda detectar con dicho instrumento o método. Así, decimos que un tornillo micrométrico (con una apreciación nominal de 10 μm) es más preciso que una regla graduada en milímetros; que un cronómetro con una apreciación de 10 ms es más preciso que un reloj común, etc.

Además de la *precisión*, otra fuente de error que se origina en los instrumentos es la *exactitud* de los mismos. La exactitud de un instrumento o método de medición está asociada a la calidad de la calibración del mismo.

Imaginemos que el cronómetro que usamos es capaz de determinar la centésima de segundo pero adelanta dos minutos por hora, mientras que un reloj de pulsera común no lo hace. En este caso decimos que el cronómetro es todavía más preciso que el reloj co-

mún, pero menos exacto. La exactitud es una medida de la calidad de la calibración de nuestro instrumento respecto de *patrones de medida* aceptados internacionalmente. En general los instrumentos vienen calibrados, pero dentro de ciertos límites. Es deseable que la calibración de un instrumento sea tan buena como la apreciación del mismo. La Fig. 1.2 ilustra de modo esquemático estos dos conceptos.

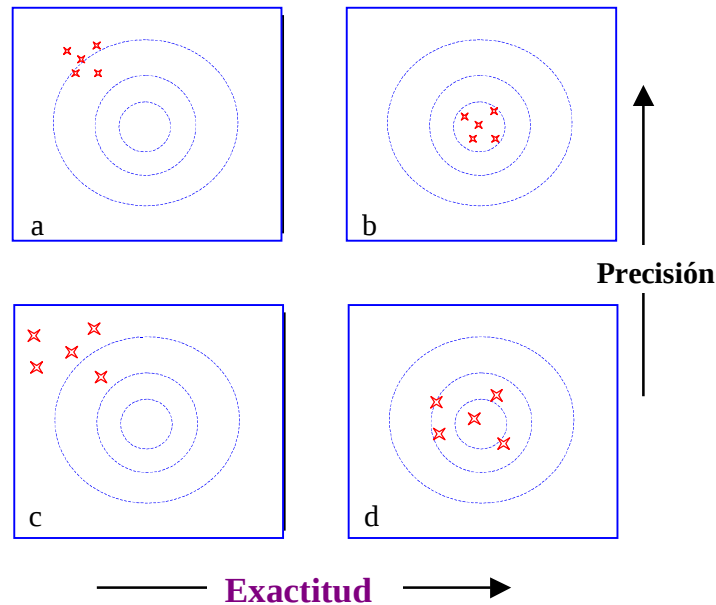


Figura 1.2. Ilustración de modo esquemático de los conceptos de precisión y exactitud. Los centros de los círculos indican la posición del “verdadero valor” del meditando y las cruces los valores de varias determinaciones del centro. La dispersión de los puntos da una idea de la precisión, mientras que su centro efectivo (centroide) está asociado a la exactitud. a) es una determinación precisa pero inexacta, mientras d) es más exacta pero imprecisa; b) es una determinación más exacta y más precisa; c) es menos precisa que a).

Fuente de errores

Las fuentes de error tienen orígenes diversos y pueden clasificarse del siguiente modo:

I. Errores introducidos por el instrumento

- ✓ **Error de apreciación, σ_{ap} :** si el instrumento está correctamente calibrado la incertidumbre que tendremos al realizar una medición estará asociada a la mínima división de su escala que podemos resolver con algún método de medición. Nótese que no decimos que el *error de apreciación* es la mínima división del instrumento, sino la mínima división que es discernible. El error de apreciación

puede ser mayor o menor que la apreciación nominal (mínima variación que se puede detectar), dependiendo de la habilidad (o falta de ella) del observador. Así, es posible que un observador entrenado pueda apreciar con una regla común fracciones del milímetro mientras que otro observador, con la misma regla pero con dificultades de visión, sólo pueda apreciar 2 mm.

- ✓ **Error de exactitud, σ_{exac} :** representa el error absoluto con el que el instrumento en cuestión ha sido calibrado frente a patrones confiables.
- II. **Error de interacción, σ_{int} :** proviene de la interacción del método de medición con el objeto a medir. Su determinación depende de la medición que se realiza y su valor se estima de un análisis cuidadoso del método usado.
- III. **Falta de definición en el objeto sujeto a medición, σ_{def} :** proviene del hecho de que las magnitudes a medir no están definidas con infinita precisión. Con σ_{def} designamos la incertidumbre asociada con la falta de definición del objeto a medir y representa su incertidumbre intrínseca.

En general, en un dado experimento, todas estas fuentes de error estarán presentes, de modo que resulta útil definir la *incertidumbre o error nominal de una medición* σ_{nom} , como:

$$\sigma_{nom}^2 = \sigma_{ap}^2 + \sigma_{def}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{exac}^2 + \dots \quad (1.2)$$

Este procedimiento de sumar los cuadrados es un resultado de la estadística y proviene de suponer que las distintas fuentes de error son todas independientes unas de otras^[1]. Los puntos suspensivos indican los aportes de otras fuentes. Por ejemplo, una medición de tiempo con un cronómetro manual se ve afectada por el *tiempo de reacción* del operador cuando define los límites de los intervalos. En este caso debe incluirse en la Ec. (1.1) un término que tenga en cuenta esta nueva contribución.

 Se desea determinar el diámetro del tronco de un árbol, d , y el área de su sección transversal, A . ¿Cómo procederíamos y cuáles son las fuentes principales de incertidumbre en esta determinación? Un método podría consistir en medir el perímetro, P , con una cinta métrica y luego determinar el diámetro a partir de la relación $P = \pi \cdot d$, usando este valor calculamos el área. En este caso, la mayor contribución a la incertidumbre proviene de la definición del diámetro. Una forma de estimar la incertidumbre sería determinar los valores máximos y mínimos del diámetro usando una serie de mediciones y tomar como $\sigma_{diámetro}$ la semidiferencia de estos valores, $\sigma_{def} = \sigma_{diámetro} \cong \frac{1}{2}(D_{max} - D_{min})$.

Clasificación de los errores

Según su carácter los errores pueden clasificarse en sistemáticos, estadísticos e ilegítimos o espurios.

- a) **Errores sistemáticos:** Se originan por las imperfecciones de los métodos de medición. Por ejemplo, pensemos en un reloj que atrasa o adelanta, en una regla dilatada, en el error de paralaje, etc.

Los errores introducidos por estos instrumentos o métodos imperfectos afectarán nuestros resultados siempre en un mismo sentido. Los errores de exactitud constituyen una fuente de error sistemático, aunque no son los únicos ni lo mismo. Imaginemos el caso de una balanza bien calibrada (exacta) que se usa para conocer el peso de las personas en los centros comerciales u otros negocios. Como es usual que en público todas las personas nos pesemos vestidas, los valores registrados con estas balanzas tendrán un error sistemático debido al peso de la vestimenta.

La única manera de detectar y corregir errores sistemáticos es comparando nuestras mediciones con otros métodos alternativos y realizando un análisis crítico y cuidadoso de los instrumentos y procedimientos empleados. Por esto es aconsejable intercalar en el proceso de medición patrones confiables que permitan calibrar el instrumento durante la medición.

- b) **Errores estadísticos:** Son los que se producen al azar. En general son debidos a causas múltiples y fortuitas. Ocurren cuando, por ejemplo, nos equivocamos eventualmente en contar el número de divisiones de una regla, o si estamos mal ubicados frente al fiel de una balanza. Estos errores pueden cometerse con igual probabilidad tanto por defecto como por exceso. Por tanto, midiendo varias veces y promediando el resultado, es posible reducirlos considerablemente. Es a este tipo de errores a los que comúnmente hace referencia la teoría estadística de errores de medición que formularemos sucintamente en lo que sigue. A estos errores lo designaremos con σ_{est} .
- c) **Errores ilegítimos o espurios:** Son los que cometemos por equivocación o descuido. Supongamos que deseamos calcular el volumen de un objeto esférico y para ello determinamos su diámetro. Si al introducir el valor del diámetro en la fórmula nos equivocamos en el número introducido, o lo hacemos usando unidades incorrec-

tas, o bien usando una expresión equivocada del volumen, claramente habremos cometido “un error.” Esta vez este error es producto de una equivocación. A este tipo de errores los designamos como ilegítimos o espurios. Para este tipo de errores no hay tratamiento teórico posible y el modo de evitarlos consiste en poner mucha atención en la ejecución y análisis de los procedimientos involucrados en las mediciones.

Un error de este tipo puede dar lugar a situaciones incorrectibles y hasta dramáticas. Al respecto pensemos que la misión espacial Mars Climate Orbiter de la NASA fracasó en setiembre de 1999 debido a un error cometido en el cambio de unidades inglesas a unidades métricas en las fórmulas usadas para dirigir su sistema de navegación.

La expresión final de la incertidumbre Δx de una medición tiene que tener en cuenta todas las distintas contribuciones, de diferente origen y tipo. La prescripción usual es combinarlas de la siguiente manera:

$$\Delta x = \sigma_{def} = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{nom}^2} = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{ap}^2 + \sigma_{def}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{exac}^2 + \dots} \quad (1.3)$$

A Δx llamamos la *incertidumbre combinada o error efectivo* de la medición.

Cifras significativas

El resultado de una medición, expresado en la forma

$$\bar{x} \pm \Delta x,$$

tiene que ser consistente en cuanto al número de cifras que se informen para $\bar{x}$ y Δx . Esto tiene que ver con el número de *cifras significativas* que incluyamos en cada una de ellas.

Pensemos en una medición con una regla graduada en milímetros. Está claro que, si somos cuidadosos, podremos asegurar nuestro resultado hasta la cifra de los milímetros o, en el mejor de los casos, con una fracción del milímetro, pero no más. De este modo nuestro resultado podría ser

$$L = (95.2 \pm 0.5) \text{ mm},$$

o bien

$$L = (95 \pm 1) \text{ mm.}$$

En el primer caso decimos que nuestra medición tiene tres *cifras significativas* y en el segundo caso sólo dos. El número de cifras significativas es igual al número de dígitos contenidos en el resultado de la medición que están a la izquierda del primer dígito afectado por el error, incluyendo este dígito. El primer dígito, o sea el que está más a la izquierda, es el más significativo (9 en nuestro caso), y el último, el menos significativo. Nótese que carece de sentido incluir en nuestro resultado de L más cifras que aquellas en donde tenemos incertidumbre. De modo que no es correcto expresar el resultado como, por ejemplo,

$$L = (95.\textcolor{red}{321} \pm 1) \text{ mm,}$$

ya que si tenemos una incertidumbre del orden de 1 mm, mal podemos asegurar el valor de centésimas y milésimas del milímetro. Operativamente, lo que hacemos es: una vez que calculamos la incertidumbre de la medición redondeamos el valor del mesurando (que puede provenir de un promedio y tener muchas cifras) y adaptamos su número de cifras significativas para que sea compatible con el valor de la incertidumbre.

Es usual expresar las incertidumbres o errores con *una sola cifra significativa*, y sólo en casos excepcionales y cuando exista fundamento para ello, se pueden usar más. También es usual considerar que la incertidumbre en un resultado de medición afecta a la última cifra si es que no se la indica explícitamente. Por ejemplo, si sólo disponemos de la información que una longitud es $L = 95 \text{ mm}$, podemos suponer que la incertidumbre es del orden del milímetro y, como dijimos antes, el resultado de L tiene dos cifras significativas.

Una posible fuente de ambigüedad se presenta con el número de cifras significativas cuando se hace un cambio de unidades. Si en el ejemplo que tratamos deseamos expresar L en μm , el resultado sería $L = (95000 \pm 1000) \mu\text{m}$. ¿Cuántas cifras significativas tenemos en este resultado? Claramente dos, igual que antes, ya que la última cifra significativa sigue siendo 5. Nótese que $95 \text{ mm} \neq 95000 \mu\text{m}$ en cuanto al número de cifras significativas: dos cifras y cinco, respectivamente (a propósito, es útil comparar los costos de los instrumentos para realizar estas dos clases de determinaciones.)

Para evitar estas ambigüedades se emplea la notación científica. Podemos escribir la siguiente igualdad:

$$9.5 \times 10^1 \text{ mm} = 9.5 \times 10^4 \mu\text{m}.$$

Notamos que los números en ambos miembros de la igualdad tienen igual número de cifras significativas, siendo la única diferencia las unidades usadas.

Bibliografía

1. P. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1993).
2. D. C. Baird, *Experimentación*, 2^a ed. (Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1991).
3. *Guide to the expression of uncertainty in measurement*, 1st ed., International Organization of Standardization (ISO), Suiza (1993); <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html>.

Actividad 1 Órdenes de magnitud

Objetivo

Estimar el orden de magnitud de una longitud microscópica a partir de mediciones de longitudes macroscópicas. Medición de pequeñas distancias: dimensiones moleculares

Introducción

La molécula de ácido oleico consiste en una larga cadena hidrocarbonada que tiene un extremo ácido hidrófilo (polar), mientras el resto de la cadena de hidrocarburo es hidrófobo (no polar), como lo son las cadenas de hidrocarburo en general. De este modo, en contacto con agua, los extremos hidrófilos de las moléculas de ácido se asocian con el entorno acuoso y los extremos hidrófugos se alejan lo más posible del agua. Así, sobre la superficie del agua las moléculas de ácido oleico se orientan formando una película que consiste de una capa de moléculas (monocapa). Por lo tanto, midiendo el espesor de la capa se puede estimar el tamaño de la molécula.

Propuesta 1.- Estimación de las dimensiones de una molécula

Equipamiento recomendado: Acido oleico de concentración conocida. Bandeja playa de unos 30 cm de diámetro aproximadamente o más grande.

Para realizar este experimento, se requiere preparar una solución de ácido oleico en alcohol etílico de 0.5% en volumen aproximadamente y disponer de una cubeta de agua con un diámetro algo mayor que 30 cm.

- Usando una probeta graduada y un cuentagotas, determine el volumen promedio de una gota de la solución preparada. ¿Cuál es el volumen de ácido oleico en la misma?
- Midiendo el diámetro de la mancha de aceite que deja al caer la gota sobre la cubeta de agua, donde se haya espolvoreado previamente talco, tiza o pimienta para visualizar mejor la mancha, determine el espesor de la capa de aceite.
- Verifique que la capa de ácido oleico tiene aproximadamente siempre el mismo espesor. Para ello vierta distintos volúmenes V de ácido oleico al agua y mida el diámetro D de la mancha resultante. Si el espesor e de la mancha se mantuviera constante, independientemente del volumen vertido, esperaríamos que el área $A = V / e$ de la mancha fuese proporcional al volumen V , o lo que es lo mismo, D^2 sería proporcional a V . Represente, por ejemplo, D^2 versus V . ¿Qué concluye de sus observaciones respecto de la constancia o no del espesor? Estime el orden de magnitud de la longitud de la molécula de ácido oleico. Estime los errores involucrados en estas mediciones.



Bibliografía

1. *Guía del laboratorio de física*, Physical Science Study Committee (PSSC), Reverté, Madrid (1972).

Actividad 2 - Tiempo de reacción

Objetivo

Determinación del tiempo de reacción de personas ante estímulos visuales y auditivos.

Introducción

Cuando una persona tiene que realizar alguna acción en respuesta a un dado estímulo (visual, auditivo, táctil), transcurre un cierto tiempo entre la recepción del estímulo y la ejecución de la acción. Este intervalo de tiempo se conoce como tiempo de reacción de una persona. Esto sucede, por ejemplo, cuando una persona que conduce un vehículo tiene que frenarlo luego de visualizar un obstáculo en el camino, o cuando un atleta en la línea de partida debe decidir que empieza la carrera después de que escucha la señal de largada dada por el juez de la competencia. Estas demoras en la reacción están reguladas por dos efectos. El primero es el tiempo de tránsito del estímulo en los órganos sensible correspondientes (ojo, oído, etc.). El segundo tiene que ver con el tiempo que pasa entre los impulsos nerviosos y el movimiento de los músculos.



Actividad

Equipamiento recomendado: regla de unos 30 cm o más larga.

El propósito de esta actividad es medir el tiempo de reacción de por lo menos tres personas: Ud. y algunos de sus compañeros. Para ello puede realizar el siguiente experimento. Sujete una regla de por lo menos 50 cm de longitud entre sus dedos y pida a la persona a la que le desea medir el tiempo de reacción que coloque una mano unos 10 cm más debajo de la suya y en la posición de un punto bien definido de la regla, con los dedos índice y pulgar abiertos alrededor de la regla. Por ejemplo, los dedos podrían estar en la marca de los 10 cm., cuidando de que no toquen la regla. Esta persona deberá asir la regla apenas vea que Ud. la soltó. Desde luego, no debe haber ningún aviso previo, solo debe tratar de agarrar la regla con los dedos cuando se dé cuenta que la misma ha sido soltada por Ud.

- Mida en cada prueba la distancia que la regla cayó desde la marca de referencia (los 10 cm). Suponiendo que la regla cae con movimiento uniformemente ace-

lerado y que g , la aceleración debida a la gravedad es aproximadamente 9.8 m/s^2 , calcule para cada prueba el tiempo de reacción.

- De ser posible trate de realizar un histograma de los distintos tiempos de reacción. ¿Cuál es el valor medio de este tiempo para cada uno de los participantes y cuál es la desviación estándar de la misma?
- El tiempo de reacción obtenido es en respuesta a un estímulo visual. Diseñe un experimento con el que pueda medir el tiempo de reacción ante un estímulo auditivo. Compare los tiempos de reacción en respuesta a los distintos estímulos.
- En lo posible consulte la Ref.[1] y compare sus datos con los de otras fuentes.

Observaciones

En mediciones de tiempos usando un instrumento activado manualmente, como por ejemplo cuando se emplea un cronómetro (analógico o digital), el operador introduce una incertidumbre en la definición de los intervalos que está asociada a su tiempo de reacción. Esta incertidumbre debe considerarse en el momento de estimar la incertidumbre total de la medición de tiempos.

Bibliografía

1. *The time delay in human vision*, D. A. Wardle, Phys. Teach. **36**, 442 (1998).
2. Ver, por ejemplo, el artículo de Romi Nijhawan, Nature **370**, 256 (1995).