

TEOREMA DE PITÁGORAS

(Demostración gráfica)

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Hipótesis

$\triangle ABC$ es rectángulo en A

Tesis

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Demostración

Se trazan cuadrados sobre cada uno de los lados del $\triangle ABC$ y las líneas AF ($\perp$ a la hipotenusa BC), BH y AE

En los $\triangle$ s ACE y BCH

$$\angle ACE = \angle BCH \quad (90^\circ + \angle ACB)$$

$$AC = CH \text{ y } CB = CE,$$

Luego

$$\triangle ACE = \triangle BCH \quad (2 \text{ lados y ángulo comprendido iguales})$$

$$\text{El área de } \triangle ACE = 1/2 \text{ CE} \times \text{CD}$$

$$1/2 \text{ base (CE) } \times \text{ altura (CD=AC')}$$

$$\text{El área de } \triangle BCH = 1/2 \text{ CH} \times \text{AC}$$

$$1/2 \text{ base (CH) } \times \text{ altura (AC=BC'')$$

Como $\triangle ACE = \triangle BCH$, sus áreas tam-

bién lo serán, luego $\text{CE} \times \text{CD} = \text{AC} \times \text{CH}$, pero $\text{AC} \times \text{CH} = \text{AC}^2$, entonces

$$\text{CE} \times \text{CD} = \text{AC} \times \text{CH} = \text{AC}^2$$

$$\text{El área de } \triangle ACH = \text{AC} \times \text{CH} = \text{AC}^2$$

$$\text{El área de } \text{CDFE} = \text{CE} \times \text{CD} = \text{AC}^2$$

$$\text{de donde } \text{CDFE (área)} = \triangle ACH \text{ (área)} = \text{AC}^2$$

Por iguales razonamientos se puede demostrar que

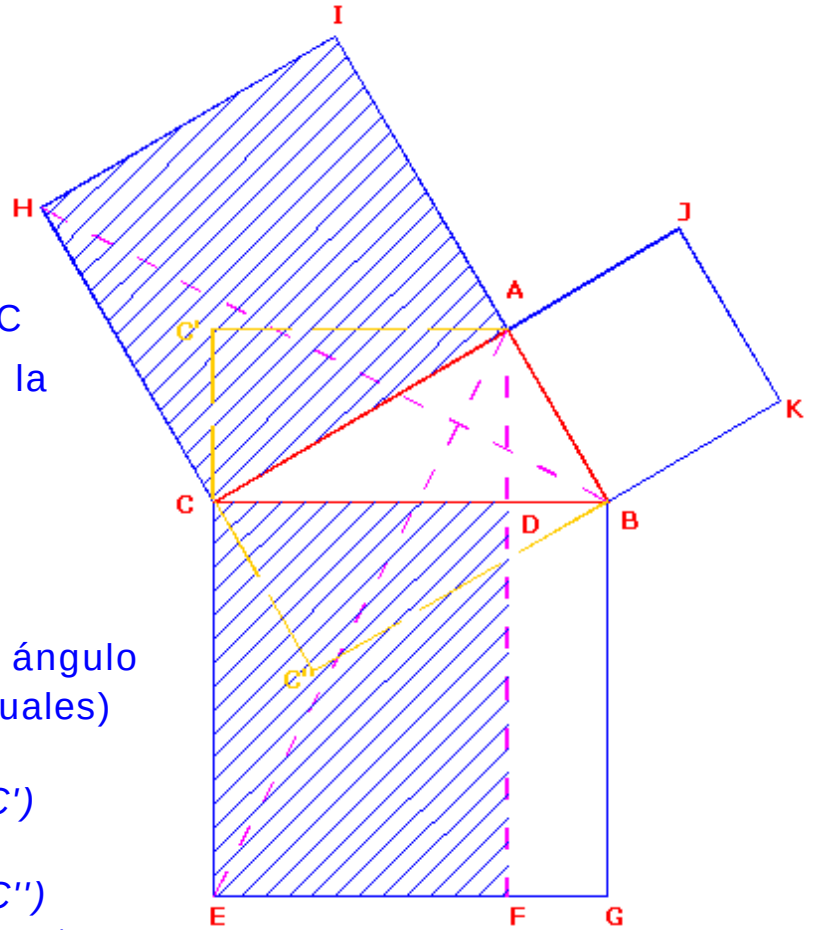
$$\triangle ABKJ \text{ (área)} = \triangle DBFG \text{ (área)} = \text{AB}^2$$

$$\triangle CBGE \text{ (área)} = \text{BC}^2 = \triangle CDEF \text{ (área)} + \triangle DBGF \text{ (área)}$$

Luego

$$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2} \quad (\mathbf{c^2 = a^2 + b^2})$$

l.q.q.d.



TEOREMA DE PITÁGORAS

(Demostración analítica)

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Hipótesis

$\triangle ABC$ es rectángulo en A

$AC=a$; $AB=b$; $BC=c$

Tesis

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Demostración

Si se traza la altura (AD) correspondiente a la hipotenusa (BC), se tiene:

$$BC/AC = AC/CD$$

$$BC/AB = AB/BD$$

(Teorema de Euclides)

o lo que es igual

$$c/a = a/CD$$

$$c/b = b/BD$$

Despejando en ambas los catetos

$$a^2 = c \cdot CD$$

$$b^2 = c \cdot BD$$

Sumando ambas ecuaciones y sacando c como factor común

$$a^2 + b^2 = c (CD + BD) \text{ pero } CD + BD = c, \text{ luego}$$

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

l.q.q.d.

COROLARIOS

$$\mathbf{a^2 = c^2 - b^2}$$

$$\mathbf{b^2 = c^2 - a^2}$$

