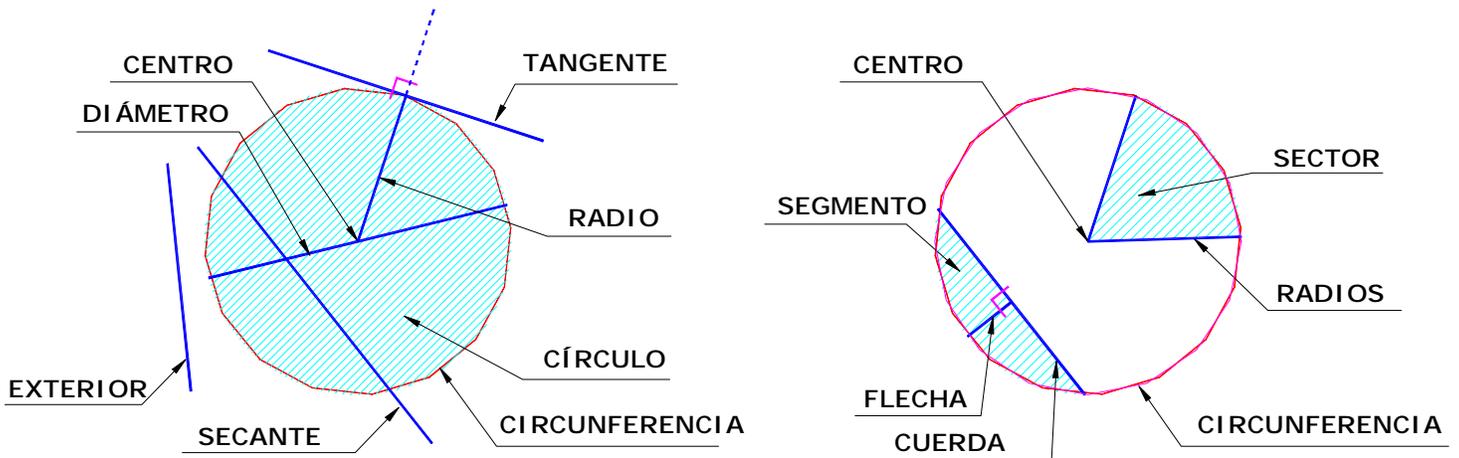


CIRCUNFERENCIA



CIRCUNFERENCIA Lugar geométrico de los puntos coplanares que equidistan de otro llamado centro.

CÍRCULO Conjunto de los puntos del plano contenidos dentro de una circunferencia.

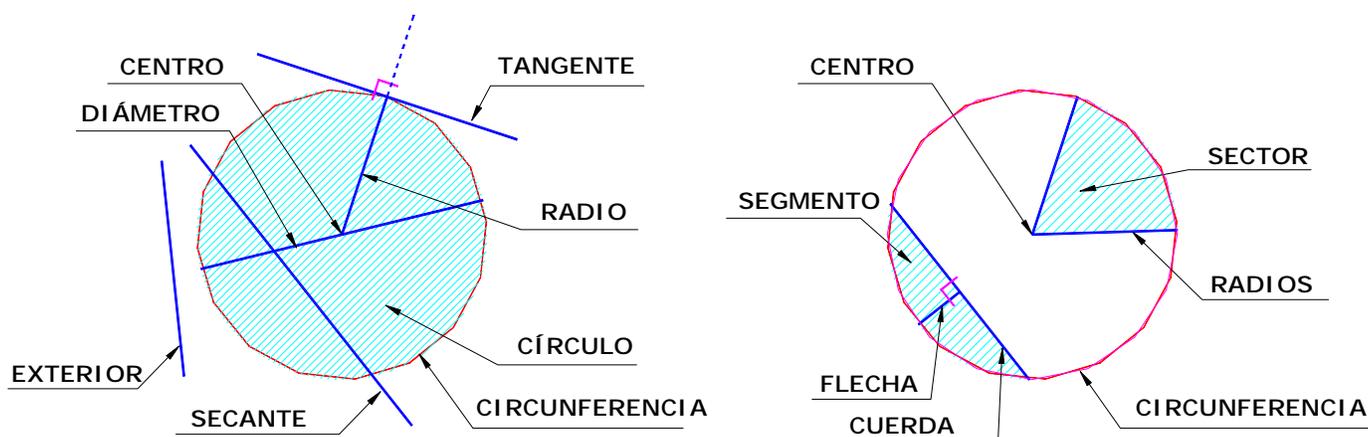
RADIO Es el segmento de recta comprendido entre el CENTRO y la circunferencia

SECANTE Es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

CUERDA Segmento de una secante comprendido entre los dos puntos de corte de la circunferencia.

DIÁMETRO Es una cuerda que pasa por el centro. Su longitud es de 2 radios y divide al círculo en dos partes iguales, por lo que todo diámetro es un eje de simetría de la circunferencia y del círculo.

FLECHA Es el segmento de recta comprendido entre el punto medio de una cuerda y la circunferencia



TANGENTE Es una recta externa a la circunferencia que la toca en un solo punto, denominado PUNTO DE TANGENCIA. El radio que pasa por el Punto de Tangencia, es PERPENDICULAR a la tangente.

RECTA EXTERIOR Es la recta que no tiene ningún punto en común con la circunferencia.

SECTOR Es la porción de círculo limitada por dos radios.

π (PI) 3,14159...

Número trascendente definido como:

- 1) La razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro.
- 2) La razón de la superficie de un círculo a la superficie de un cuadrado de lado igual al radio de aquel

$$L/D = \pi \quad A/r.r = \pi$$

La longitud (perímetro) de la circunferencia es igual al producto de π por su diámetro.

El área del círculo es igual al producto de π por el cuadrado de su radio.

RADIÁN: Ángulo al centro de una circunferencia cuyo arco correspondiente tiene igual longitud que el radio de la circunferencia

El radián es una unidad de medida de la longitud de los arcos de circunferencia como la abertura del ángulo, no expresa DIRECTAMENTE, el largo del arco medido en unidades de longitud (metro, etc.) el cual será función de su radio.

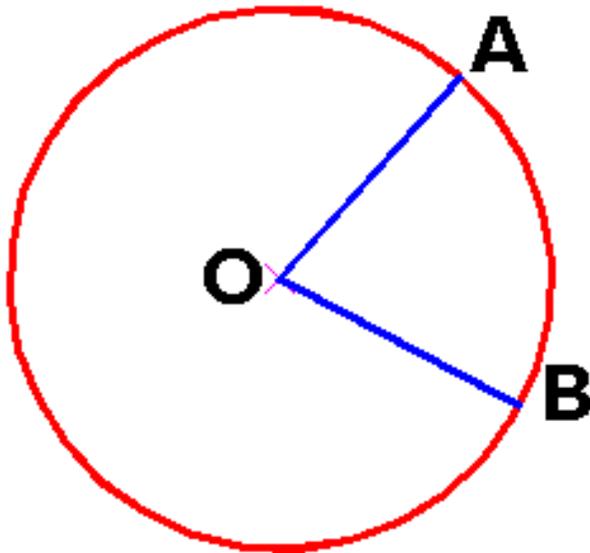
En una circunferencia de radio igual a la unidad (1,00), el perímetro es igual a 2π (Si $R=2 \rightarrow D=2$; $P=\pi \times D \rightarrow P=2\pi$). El ángulo al centro, que abarca la totalidad de la circunferencia vale 360° . Luego

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianes} \quad \rightarrow 1^\circ = 0,0174532\dots \text{ radianes}$$
$$\quad \rightarrow 1 \text{ radián} = 57,2958\dots^\circ$$

MEDIDA DE ÁNGULOS EN LAS CIRCUNFERENCIAS

ÁNGULO CENTRAL O AL CENTRO

Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia



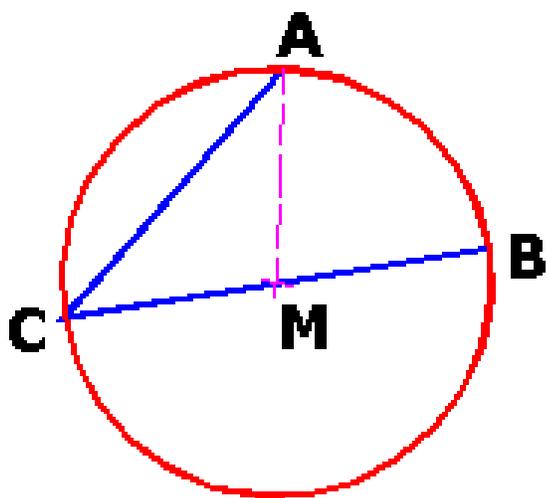
Por definición de la unidad de medida de los arcos (radián).

$\overset{\frown}{AB}$ es igual al $\angle AOB$.

Luego

$$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$$

El ángulo al centro de una circunferencia es igual al arco comprendido entre sus lados



ÁNGULO INSCRITO

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son secantes

Se pueden presentar tres casos o posibilidades:

1) Que uno de los lados pase por el centro de la circunferencia

Utilizando la construcción auxiliar MA se tiene:

En $\triangle AMC$ (Isósceles)

$$\angle C = \angle A$$

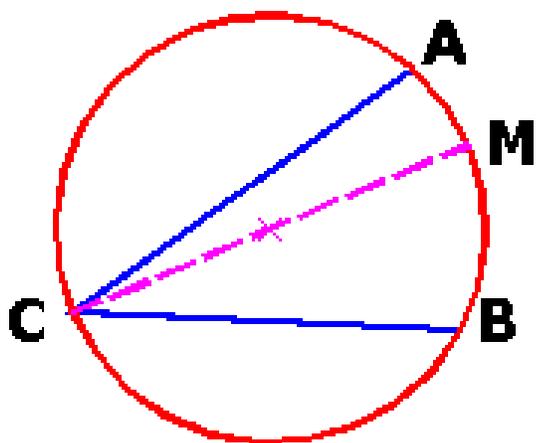
$$\angle C + \angle A = \angle AMB \text{ (Exterior del } \triangle AMC)$$

Sustituyendo

$$2 \angle C = \angle AMB$$

Pero $\angle AMB = \text{arc } AB$; luego

$$\angle C = \frac{1}{2} \text{arc } AB$$



2) Que el centro de la circunferencia esté dentro del ángulo

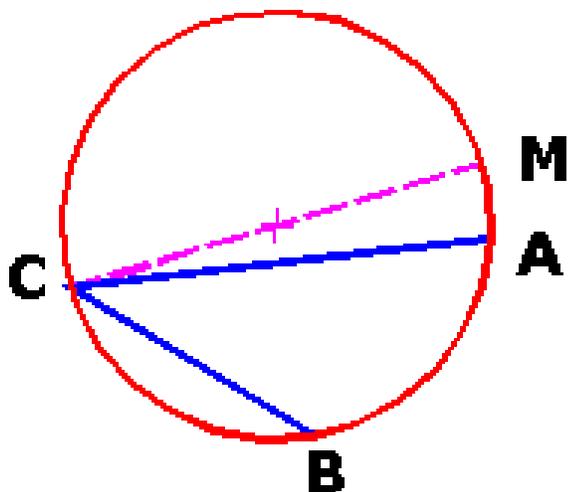
$$\text{arc } AB = \text{arc } AM + \text{arc } MB$$

Según demostración anterior

$$\angle ACM = \frac{1}{2} \text{arc } AM$$

$$\angle MCB = \frac{1}{2} \text{arc } MB; \text{ sumando}$$

$$\angle C = \frac{1}{2} \text{arc } AB$$



3) Que el centro de la circunferencia esté fuera del ángulo

$$\text{arc } AB = \text{arc } MB - \text{arc } MA$$

Según demostración anterior

$$\angle MCB = \frac{1}{2} \text{arc } MB$$

$$\angle MCA = \frac{1}{2} \text{arc } MA; \text{ restando}$$

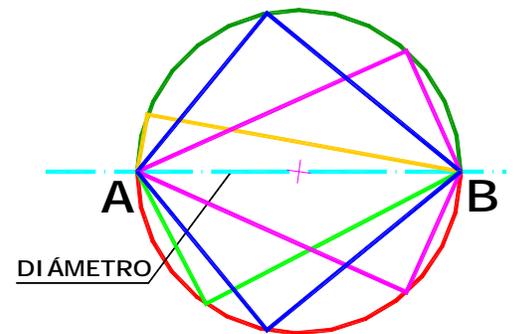
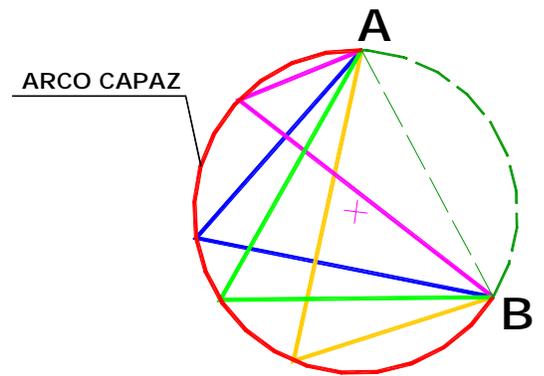
$$\angle C = \frac{1}{2} \text{arc } AB$$

ARCO CAPAZ

Todos los ángulos inscritos en una circunferencia o en circunferencias iguales, que abarcan un mismo arco, o sus extremos están sobre la misma secante (AB en la figura) son iguales. El arco donde se inscribe su vértice se denomina ARCO CAPAZ del ángulo.

Si el arco abarcado es una semicircunferencia, o sea la cuerda es un diámetro, el arco será igual a π (180°), el valor de los ángulos será igual a $1/2 \cap AB = 90^\circ$.

El Arco Capaz de los ángulos rectos es una semicircunferencia.



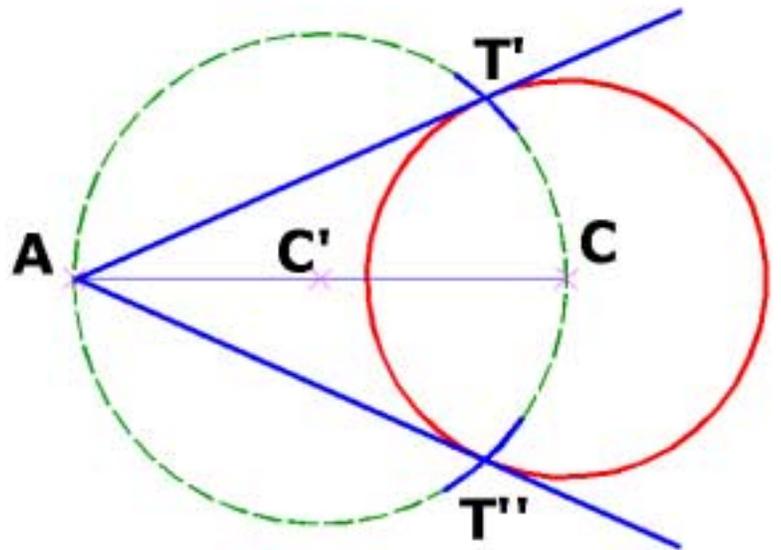
APLICACIÓN PRÁCTICA

Ubicar los puntos de tangencia sobre una circunferencia, de las rectas que pasan por un punto exterior a ella.

Sea el punto A un punto exterior a la circunferencia de centro C.

Las semicircunferencias $\cap AC$, son los arcos capaces de los ángulos rectos con el vértice (T' y T'') sobre ellas, y extremos en A y en C.

$T'C$ y $T''C$, que son radios de la circunferencia C' son perpendiculares a AT' y AT'' respectivamente. Luego AT' y AT'' son perpendiculares a $T'C$ y $T''C$ y T' y T'' son los puntos de tangencia.



ÁNGULO SEMI-INSCRITO

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia, uno de sus lados es secante y el otro tangente a la circunferencia

Se pueden presentar dos casos o posibilidades

1) Que el ángulo sea agudo

Sea $\angle BAT$ un ángulo semi-inscrito en la circunferencia C

$\angle BAT = \angle ADB$ por tener sus lados perpendiculares

$\angle ADB = \frac{1}{2} \cap AB$ por ser inscrito en C

Luego

$$\angle BAT = \frac{1}{2} \cap AB$$

2) Que el ángulo sea obtuso

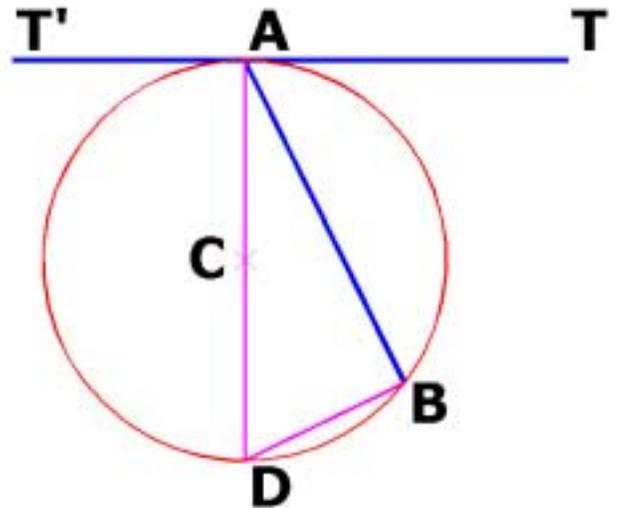
Sea $\angle BAT'$ un ángulo semi-inscrito en la circunferencia C

$\angle BAT' = \angle BAD + \angle ABD$ ($\angle T'AD$)

$\angle BAT' = \frac{1}{2} \cap BD + \frac{1}{2} \cap DA$

$\angle BAT' = \frac{1}{2} (\cap BD + \cap DA)$

$$\angle BAT' = \frac{1}{2} \cap ADB$$



ÁNGULO EX-INSCRITO

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia, uno de sus lados es una cuerda y el otro la rama exterior de una secante

Sea $\angle ABE$ un ángulo ex-inscrito en la circunferencia C

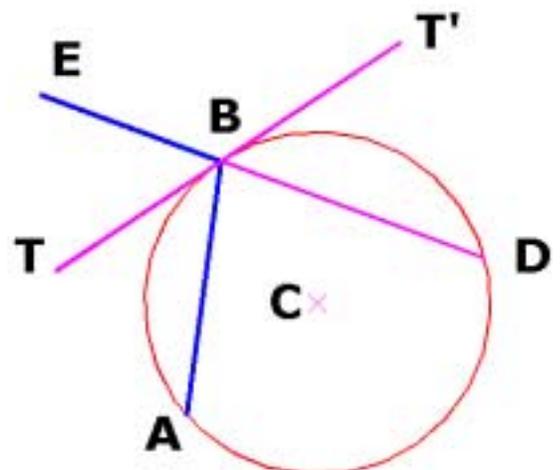
$\angle ABE = \angle ABT + \angle TBE$

$\angle TBE = \angle DBT'$ (Opuestos por el vértice)

$\angle ABE = \angle ABT + \angle DBT'$

$\angle ABE = \frac{1}{2} \cap AB + \frac{1}{2} \cap BD$

$$\angle ABE = \frac{1}{2} (\cap AB + \cap BD)$$



ÁNGULO INTERIOR

Es el que tiene su vértice en el área interna de la circunferencia

Sea $\angle AED$ un ángulo interior a la circunferencia O

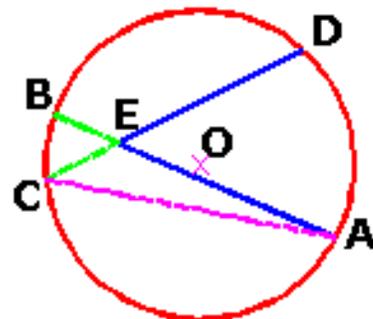
$\angle AED = \angle DCA + \angle BAC$ Externo a un triángulo

$\angle DCA = 1/2 \cap AD$

$\angle BAC = 1/2 \cap BC$

$\angle AED = 1/2 \cap AD + 1/2 \cap BC$

$\angle AED = 1/2 (\cap AD + \cap BC)$



ÁNGULO EXTERIOR

Es el que tiene su vértice fuera del área interna de la circunferencia

Se pueden presentar los siguientes casos:

Los dos lados secantes

Un Lado secante y el otro tangente

Los dos lados tangentes

(En los tres casos)

Sea $\angle CAD$ un ángulo exterior a la circunferencia O

$\angle CED = \angle CAD + \angle ACE$ Externo a un triángulo

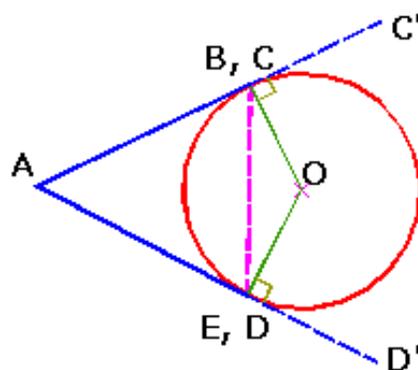
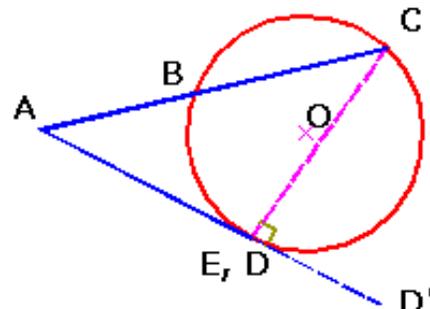
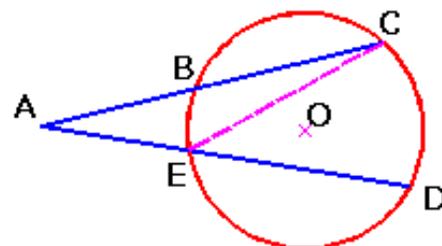
$\angle CAD = \angle CED - \angle ACE$

$\angle ACE = 1/2 \cap BE$

$\angle CED = 1/2 \cap CD$

$\angle CAD = 1/2 \cap CD - 1/2 \cap BE$

$\angle CAD = 1/2 (\cap CD - \cap BE)$



TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS

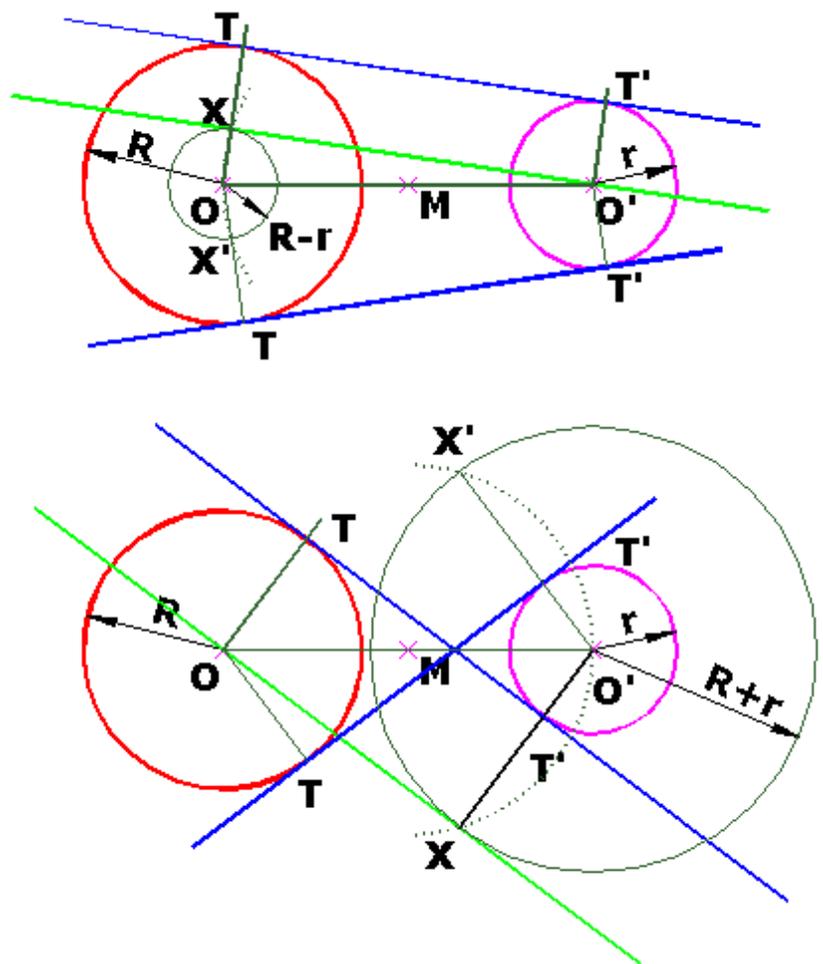
Un método aceptado en geometría para la solución de problemas consiste en suponerlos resueltos e inferir las acciones requeridas para llegar a esa solución. Un ejemplo de este método es encontrar las líneas tangentes a dos circunferencia que no tienen puntos en común.

Se plantean dos casos generales: Tangentes Externas y Tangentes Internas.

La solución al problema planteado son las rectas TT' , tangentes a ambas circunferencias en cada caso. Como esas rectas son tangentes a las circunferencias, serán perpendiculares a los radios en los puntos de tangencia. Las rectas $O'X$, trazadas paralelas a TT' , formarán con estas, los paralelogramos $TT'XO'$ luego, si se puede determinar la posición de $O'X$ (Caso 1) o de OX (Caso 2), una paralela a ella por el punto T' o T , será la tangente buscada.

La distancia $O'T'$ es r (Caso 1) entonces la distancia OX será $R-r$. En el segundo caso, la distancia OT es R y la distancia $O'X$ será $R+r$.

Los puntos X y T' podrán ser determinados trazando el LG del vértice recto del triángulo que tiene por hipotenusa OO' (Circunferencia de diámetro OO') que corte las circunferencias con centros O y O' de radios $R-r$ y $R+r$ respectivamente.



POR TRES PUNTOS COPLANARES PASA UNA Y SÓLO UNA CIRCUNFERENCIA

En efecto, sean los puntos A; B y C puntos coplanares.

La mediatriz (m) del segmento AB es el LG de los puntos que equidistan de sus extremos (A; B)

Por igual razonamiento, la mediatriz (n) del segmento BC, es el LG de los puntos que equidistan de B y de C.

En cada caso esas mediatrices serán los LG de los centros de las infinitas circunferencias que pasan por A y B y las que pasan por B y C, respectivamente.

La intersección de ambos LG será a su vez el LG de las circunferencias que pasan por A; B y C.

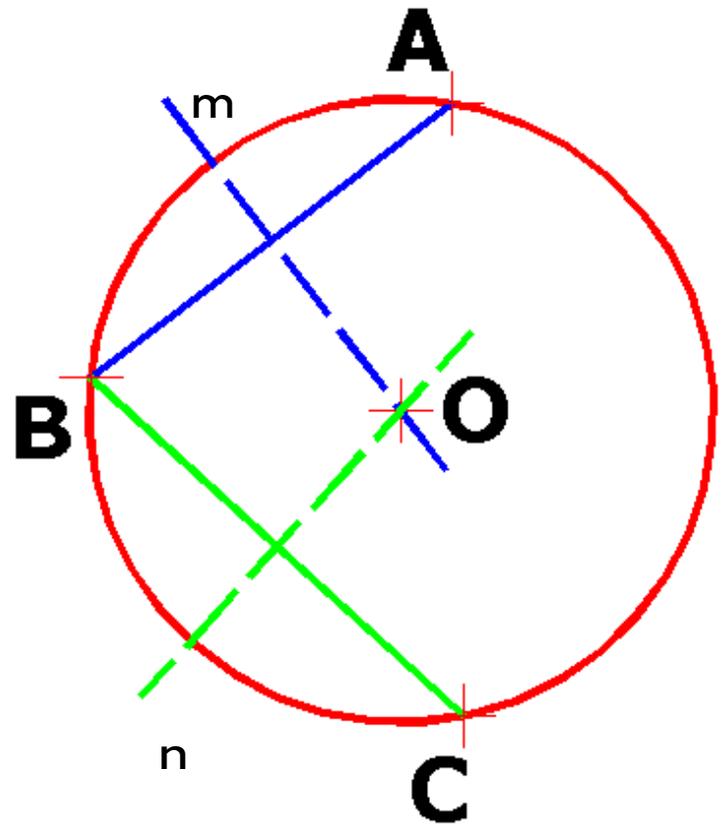
Dos rectas coplanares, que no sean paralelas sólo tienen en común un punto.

Luego el punto de intersección de ambas es único en el plano y será el centro de la única circunferencia que pasa por los tres puntos dados.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Conocido un arco de circunferencia hallar su centro.

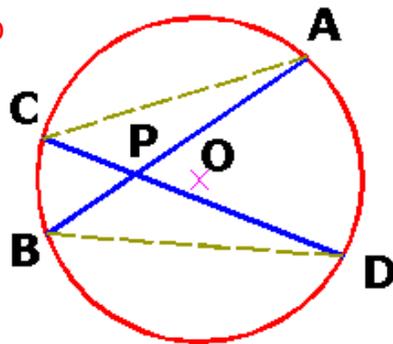
Conocidos tres puntos de una circunferencia o de un arco de circunferencia, bastará unirlos entre sí y trazar las mediatrices de dos de los segmentos que se formen. La intersección de ambas mediatrices será el centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos.



PROPORCIÓN DE LAS SECANTES A LA CIRCUNFERENCIA

El producto de las distancias desde un punto cualquiera del plano de la circunferencia, a los puntos de intersección de una secante que pase por dicho punto, es constante.

El punto puede ser interior o exterior a la circunferencia



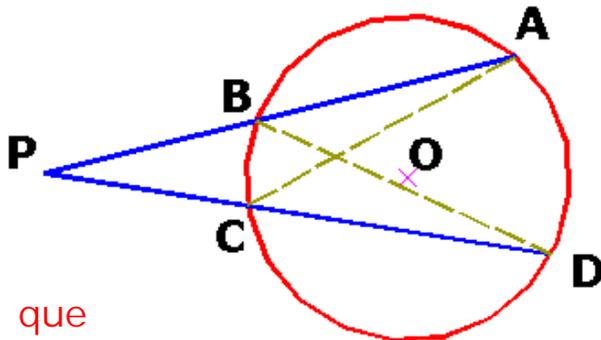
Sean AB y CD secantes a la circunferencia O que pasan por el punto P

En ambos casos

$\Delta PAC \sim \Delta PDB \rightarrow$ Tienen 3 ángulos iguales

$\angle DPB = \angle CPA \rightarrow$ Opuestos por el vértice o común

$\angle BDP = \angle PAC \rightarrow$ Ángulos inscritos que abarcan el mismo arco ($\cap BC$)



Si dos ángulos son iguales el tercero también lo será

Luego

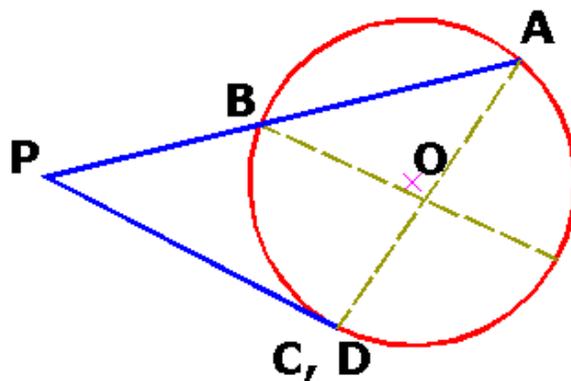
$PA/PD = PC/PB \rightarrow PA \times PB = PD \times PC = K$ (Constante)

Si los puntos C y D se acercan hasta coincidir en el punto de tangencia de la recta PC con la circunferencia

$PC = PD$

Luego

$PA \times PB = (PC)^2 = K$ (Constante)



Como se vio antes

$$PA \times PA' = PD \times PD' = K$$

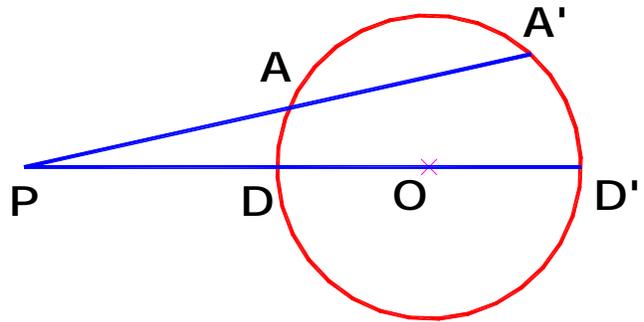
Pero

$$PD = PO - OD$$

$$PD' = PO + OD' = PO + OD$$

$$PA \times PA' = (PO - OD) \times (PO + OD)$$

$$PA \times PA' = PO^2 - OD^2$$



$$PA \times PA' = d^2 - R^2 = K$$

Siendo d la distancia al centro y R el radio de la circunferencia

Este producto constante de las distancias de un punto dado, hasta las intersecciones de una secante cualquiera, trazada desde él hasta la circunferencia, se llama

POTENCIA DEL PUNTO RESPECTO A LA CIRCUNFERENCIA.

Si el punto está en el exterior de la circunferencia, la potencia será un número positivo, si está sobre la circunferencia, uno de los segmentos será nulo, luego la potencia también lo será. Si el punto está en el interior de la circunferencia los segmentos tendrán sentido distinto, la potencia será negativa.

Si se analiza el segundo caso mostrado antes, se puede definir:

La potencia de un punto exterior respecto a una circunferencia, es igual al cuadrado del segmento de tangente a la circunferencia, comprendido entre el punto dado y el punto de contacto.

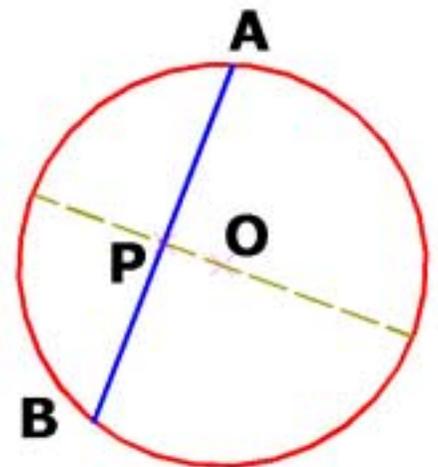
Para un punto interior, se puede definir:

La potencia de un punto interior respecto a una circunferencia, es igual al cuadrado, cambiado de signo, del segmento de la semicuerda perpendicular al diámetro de la circunferencia que pasa por el punto.

En efecto, en la semicuerda AB ; $AP = BP$

Por definición de potencia, esta es $PA \times PB$

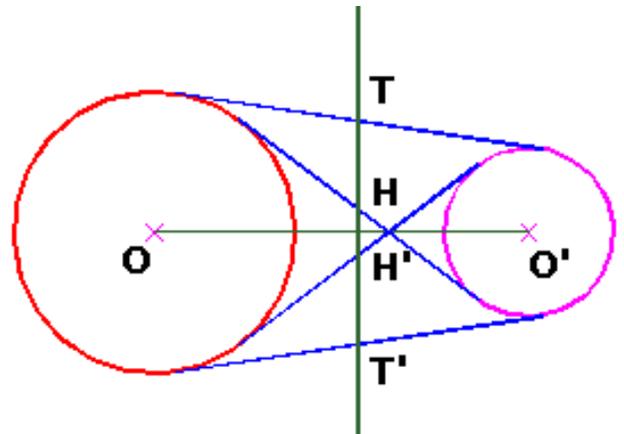
$$\text{pero } |PA| = -|PB| \rightarrow -|PA|^2 = -|PB|^2 = K$$



EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS

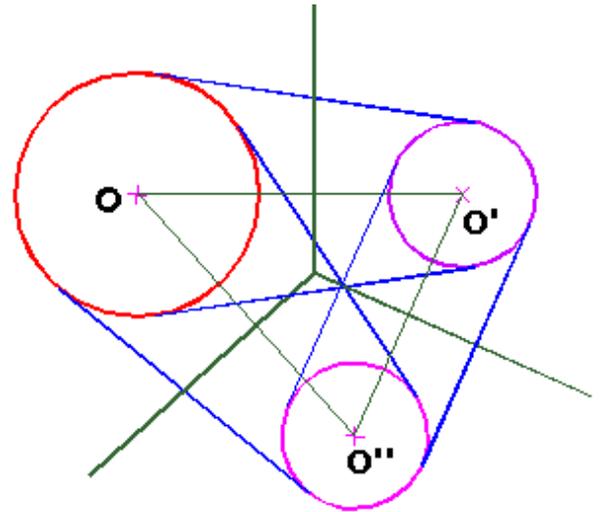
Se llama eje radical al LG de los puntos de igual potencia respecto a las circunferencias

La recta que pasa por los puntos medios de las tangentes comunes a las dos circunferencias es el Eje Radical, ya que los segmentos de tangentes son iguales y por lo tanto serán iguales sus cuadrados, o sea la Potencia de cada punto sobre la recta.



CENTRO RADICAL

Los ejes radicales de tres circunferencias tomadas dos a dos, se cortan en un punto que se llama el **Centro Radical** que necesariamente tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias.



CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES

Dos circunferencias que se cortan se definen como ortogonales, si los radios de cada una de ellas, a los puntos de intersección, son tangentes en esos puntos, a la otra circunferencia respectivamente.

O sea, ambos radios son perpendiculares entre sí.

La condición para que dos circunferencias que se cortan sean ortogonales, es que la potencia del centro de cada una respecto a la otra, sea igual al cuadrado de su radio.

