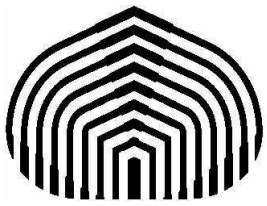
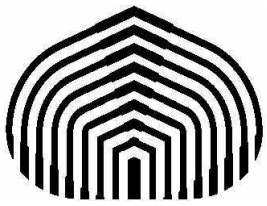


Universidad Simón Bolívar
Decanato de Estudios Profesionales
Coordinación de Ingeniería Geofísica

Simulación numérica de Paisajes montañosos, cuencas hidrográficas y de procesos de lluvia, erosión y depositación

Por: Cindy Valeris Herrera Moya

Sartenejas, Octubre 2007



Universidad Simón Bolívar
Decanato de Estudios Profesionales
Coordinación de Ingeniería Geofísica

Simulación numérica de Paisajes montañosos, cuencas hidrográficas y de procesos de lluvia, erosión y depositación

Por: Cindy Valeris Herrera Moya

Con la asesoría de:
Dr. Rafael Angulo (I.V.I.C)
Prof. Ana Cabrera (U.S.B)

Proyecto de Grado
Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar
Como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Geofísico
Sartenejas, Octubre 2007

Este trabajo ha sido aprobado en nombre de la Universidad Simón Bolívar por el siguiente jurado calificador:

_____

Presidente

_____

_____

Resumen

Simulación numérica de paisajes montañosos, cuencas hidrográficas y de procesos de lluvia, erosión y depositación.

Por:

Herrera M., Cindy V.

En investigaciones pasadas los modelos de simulación de fenómenos naturales y los avances tecnológicos han proporcionado métodos que condensan el resultado de procesos que debido a las largas escalas de tiempo en que desarrollan son difíciles de controlar. La geometría fractal de Maldenbrôt provee una descripción y un modelo matemático para formas aparentemente complejas de la naturaleza. La naturaleza, montañas, líneas de costa, ríos, a menudo permanecen invariantes bajo cambios de escala. Esta auto-semejanza estadística es la característica esencial de fractales en la naturaleza, la cual puede ser cuantificada a través del exponente de Hurst el cual esta relacionado con la dimensión fractal, un número que concuerda con la noción intuitiva de dimensión pero no necesariamente es un entero. Este trabajo consta de una caracterización matemática formal con Movimiento Browniano Fraccional(fBm) como prototipo en la simulación de montañas y lluvia a través del algoritmo adiciones aleatorias sucesivas. Detalles matemáticos, dificultades y discusiones acerca de los métodos de estimación de auto-semejanza forman parte del desarrollo de este trabajo. La implementación de los algoritmos para la simulación de los fenómenos naturales mencionados fueron programados en C++ con el apoyo del compilador para Windows Borland 6.0, los gráficos fueron hechos en el programa SELFIS y en Easyplot para los registros unidimensionales. La generación de los datos sintética muestra que la estimación del exponente de Hurst varia considerablemente con cada estimador, y que a pesar de la existencia de varios algoritmos para la simulación de fBm, éstos no afectan la tendencia de la serie ya que para todos los casos se genera la misma serie temporal.

A mi mami...

Gracias

Agradecimientos

Cada vez que agradecemos, nos estamos permitiendo cerrar un círculo, completar una historia. Agradezco a aquellas experiencias que vinieron a despertar una conciencia mayor,más compasiva y generosa.

Gracias Dios por esa energía profunda y maravillosa que ha permitido que lo que al inicio fue un pensamiento se convierta ahora en realidad.

Gracias mami por tu dedicación y amor incondicional, gracias a mi madrina bella, Mariana, que ha sido un ángel en el camino. A Manolo por lo que nos dejó.

A mis tutores Ana y Rafael, en especial al Prof. Angulo por su simpatía, por sus palabras llenas de paciencia y sabiduría, por mostrarme los objetivos y encaminarme hacia ellos de una manera fácil, simple y divertida.

A mi novio adorado y amigo, Juancho, que ha sido quien convivió y convive con mis días llenos de impaciencia y frustración, gracias por tus oportunas palabras llenas de amor.

A mis amigos: David por ser tan divertido, Ricardo por tener juntos tantas cosas en común, Vanadis por ser tan receptiva, Anita y Flia. por estar ahí en cada momento, Lucía por ser natural, Laura por su gran talento, Ornella y Flia. por su gran cariño y empatía, Yilmar por su dulzura, Débora por su espontaneidad y buena voluntad, Feto por su espiritualidad, Alejandra por las buenas épocas y las que faltan, Jóse por espíritu jovial, Enrique por apoyarme en cada paso, Justin y Victor por la risas, Maga por sus buenos consejos y simpatía, Amarilys por su optimismo, María por los buenos tiempos.

A mis compañeros del I.V.I.C: Jorge siempre dispuesto a ayudar y a escuchar, Mariella por ser tan humana y sencilla, Frank por las largas charlas y buenos chistes.

A los que tuvieron alguna palabra amorosa, una ayuda precisa o un gesto de atención.

Gracias!!

Índice general

1. Introducción **2**

2. Marco teórico **6**

2.1. Las montañas 6

2.1.1. Tipos y Origen 6

2.2. Erosión 8

2.3. Los Ríos 12

2.3.1. El ambiente fluvial 15

2.4. Formación de un Paisaje 16

2.5. Fractales 18

2.5.1. Fractales aleatorios 21

2.6. Registros de Hurst 23

2.7. Larga dependencia 27

2.7.1. Estimadores de H 29

2.8. Movimiento Browniano 36

2.8.1. Caminata aleatoria 38

2.9. Movimiento Browniano Fraccional o fBm 39

2.9.1. Algoritmo de Voss 45

2.10. Ruido fraccional Gaussiano 50

3. Resultados: Análisis y Discusión **52**

3.1. Registros de Hurst 1-D 52

4. Conclusiones y Recomendaciones **67**

A Comunicación privada **69**

B SELFIS **73**

C Rutina Registros de Hurst 1-D **77**

Índice de figuras

2.1. Los Himalayas 8
2.2. Ejemplo de la formación de un paisaje por erosión 11
2.3. Tipo de ríos 15
2.4. Ambiente fluvial 16
2.5. Erosión diferencial 17
2.6. Geomorfología y tectónica 17
2.7. Conjunto de Maldenbrôt 19
2.8. Otra vista del conjunto de Maldenbrôt 19
2.9. Comparación estadística de patrones fractales 21
2.10. Fractal aleatorio 22
2.11. Construcción del rango muestral $R(s)$ 26
2.12. Registro de movimiento browniano. 36
2.13. Ruido blanco 40
2.14. Ruido 1/f 40
2.15. Caminata aleatoria 41
2.16. Representación de las densidades espectrales 41
2.17. fBm para H=0.2, con escalamiento $B_H = r^{-H} B_H$ 44
2.18. Diagrama esquemático del algoritmo de adiciones aleatorias sucesivas. 48
2.19. Diagrama del algoritmo de Voss en dos dimensiones. 50

3.1. Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional, H=0.1, n=10 54
3.2. Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional, H=0.5, n=10 55
3.3. Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional, H=0.9, n=10 56
3.4. Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional, H=0.1, n=15 57
3.5. Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional, H=0.5, n=15 58
3.6. Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional, H=0.9, n=15 59
3.7. Método R/S con el programa SELFIS, H=0.8,n=10 59
3.8. Método de la varianza agregada con el programa SELFIS,H=0.8,n=10 60
3.9. Método de la varianza residual con el programa SELFIS,H=0.8,n=10 60

3.10. Método de los momentos absolutos con el programa SELFIS,H=0.8,n=10 . . 60
3.11. Estimación del exponente de Hurst con el método de Richard Voss.H=0.2 . . 61
3.12. Estimación del exponente de Hurst con el método de Richard Voss.H=0.5 . . 61
3.13. Estimación del exponente de Hurst con el método de Richard Voss.H=0.8 . . 62
3.14. fBm algoritmo de Feder 63
3.15. fBm algoritmo de Feder con factor adicional 64
3.16. fBm algoritmo de Feder con paso adicional 65
3.17. fBm algoritmo de Feder con factor adicional y paso adicional 66

Capítulo 1

Introducción

Debido a las largas escalas temporales y espaciales sobre las cuales evolucionan los paisajes es difícil implementar estudios observacionales o experimentos controlados de los mismos, surgen entonces importantes modelos de simulación como aproximación metodológica. Los modelos de simulación de paisajes proporcionan un marco para sintetizar conocimientos geofísicos derivados de diversos estudios, y determinan el resultado de procesos espaciales múltiples que obran recíprocamente y se llevan a cabo en cierto tiempo y espacio. Los avances tecnológicos y el incremento de las simulaciones numéricas implican que el modelado de fenómenos naturales ahora es una herramienta de gran alcance para los investigadores de ciencias de la tierra.

El ingeniero hidrólogo Harold Edwing Hurst (1880-1978), desarrolló un método estadístico el cual descubre una importante ley empírica relacionada con la dependencia de rango largo en geofísica. Hurst estudió los problemas relacionados con el almacenamiento de agua en el Río Nilo con un método de invención propia, analizó series temporales en distintas ventanas de tiempo, el valor de la herramienta desarrollada por este ingeniero es que determina si en una serie temporal los valores del pasado afectan los valores futuros, tal análisis reveló luego que la mayoría de los objetos y procesos de interés geofísico, tales como montañas, cuencas hidrográficas y la erosión de las aguas de lluvia, satisfacen leyes universales de escala. Hurst investigó varios fenómenos naturales, utilizó una medida adimensional que la llamo R/S la cual describe una ecuación, una relación empírica [16] como es:

$$R/S = (\tau/2)^H$$

donde el exponente H es el exponente de Hurst, el cual es la medida de autosimilitud de un proceso [11].

La geometría tradicional describía rectángulos, círculos, rectas... Todas formas puras y perfectas que no existen en la naturaleza, salvo excepciones, o son fabricadas por el hombre. Maldenbrôt desarrolló una teoría que describe mejor los contornos irregulares y aparentemente caóticos del mundo que nos rodea: sus fórmulas permiten estudiar la configuración de árboles y nubes, cordilleras y costas, células y órganos, compuestos químicos y galaxias. La geometría fractal describe los contornos irregulares de la naturaleza además son simples de generar en computadores, la característica más importante de los fractales es que son similares si se los ve de cerca y a la distancia, es decir poseen infinitos detalles en todas las escalas.

Las series de tiempo son comúnmente usadas para describir la evolución de sistemas, en ocasiones, tienen estructura fractal y esta circunstancia se puede poner de manifiesto, eventualmente, por comportamientos en ley de potencia y a través de una dimensión fractal. Además, el posible carácter fractal de estos conjuntos, tiene su expresión en forma de dos conceptos: la autosemejanza estadística y la autoafinidad. Un modelo matemático general para las series temporales, se puede establecer a través de las funciones aleatorias. En nuestro caso, interesa saber si la(s) serie(s) son consistentes con modelos matemáticos que describiremos más adelante, como el movimiento browniano.

Partiendo de que diferentes estructuras de la naturaleza pueden ser descritas con geometría fractal, y que éstas cumplen con dos características principales que son autosimilitud y autoafinidad, se decidió trabajar en este proyecto de grado con la simulación de paisajes geofísicos creados a partir de series temporales del movimiento fraccional browniano, esta generación de series temporales ha sido usada desde hace décadas en varios estudios de simulación numérica de imágenes fractales [11], [16], [26], [28], [30], [31], [33] entre otros.

Jens Feder (1988) en su libro "Fractals" [16], realiza la simulación 1-D y 2-D de super-

ficies montañosas con Movimiento Fraccional Browniano y además genera líneas de costas a partir de la teoría de Maldenbrôt. *Ignacio Rodriguez − Iturbe*, un reconocido investigador venezolano que actualmente trabaja en la Universidad de Princeton, desde la década de los ochenta ha realizado simulaciones de procesos hidrológicos, hidrogeomorfología, y dinámica de procesos fractales a partir de la diferenciación del ruido fraccional Browniano mejor conocido como ruido fraccional Gaussiano. *Maldenbrôt* a partir de su contribución con la teoría fractal [28] caracteriza, entre varios tópicos, superficies montañosas y sugiere la innovación del tradicional cuadrado por un triángulo o hexágono en la implementación del algoritmo del punto medio para la generación 2-D de montañas, este investigador junto con Van Ness, también ha contribuido con un análisis exhaustivo en lo que se refiere a larga dependencia y estimación del parámetro H. *Richard Voss* [30] mejoró el método del punto medio para la generación de ruido fraccional Browniano con un método llamado Adiciones Aleatorias Sucesivas y generó superficies fractales tales como paisajes, los cuales pueden ser apreciados a color en [33]. *Dietmar Saupe*, físico alemán, a finales de los 80's publicó "The Science of Fractal Images", libro en el cual explica de manera muy clara y sencilla en que consiste el movimiento fraccional Browniano y desarrolla algoritmos en lenguaje pseudo-formal para la generación de paisajes a partir del algoritmo de Voss. *Sarah Callaghan y Enric Villar* (2002) [31], simularon procesos de lluvia con el propósito de observar el desarrollo del proceso sobre sistemas de comunicaciones de radio, para tal fin utilizaron el algoritmo de Voss.

Karagiannis y otros (2002) [11] realizan un estudio acerca de la estimación de larga dependencia a través del exponente de Hurst, ellos logran crear un software orientado a objetos llamado SELFIS que analiza data y realiza la detección y validación de larga dependencia a través de varios métodos (Método de valores absolutos, Varianza, R/S, Periodograma, Estimador de Whittle, Varianza Residual y Abry-Veitch). Por otro lado *Murad Taqqu*, ha investigado acerca de procesos aleatorios con varianza infinita, procesos autosimilares, detección y estimación de larga dependencia para la cual publicó un libro en el 2003 [27], adicionalmente contribuye con el desarrollo de los métodos estadísticos para la estimación de larga dependencia [22].

Las series temporales creadas a partir del movimiento fraccional browniano cumplen con las características de fractalidad, una de ellas, la autosimilitud que es descrita por el exponente de Hurst, el cual será cuidadosamente estimado a fin de corroborar la autosemejanza de las series sintéticas generadas, y por tanto la autosemejanza de los paisajes.

El trabajo tiene como objetivos, dar una introducción sobre la geometría fractal y su aplicación en la naturaleza, del mismo modo se ofrece una recopilación acerca de los registros de Hurst, el exponente H que caracteriza tales registros, los diferentes métodos que se han desarrollado para estimar H, el movimiento Browniano, la caminata aleatoria, el movimiento fraccional Browniano, y el algoritmo de Voss en sus diferentes versiones que servirá como base para crear las superficies fractales. Estos puntos se llevaran a cabo a través de una vasta revisión bibliográfica.

Los programas generados para las soluciones numéricas de los problemas inicialmente planteados fueron realizados a través del lenguaje de programación C++ de la mano con el compilador Borland 6.0. Como introducción a la resolución del problema se procedió a generar superficies montañosas en 1-D a través del algoritmo de Voss unidimensional para cierto valor de H el cual verificamos era consistente con la data generada. Al finalizar esta etapa preliminar y verificar que el algoritmo generaba los datos esperados, se generaron superficies en 2-D a las cuales luego se le agregan procesos de flujo, acumulación de aguas y procesos de erosión.
Finalmente se dan unas breves conclusiones y unas recomendaciones para posibles abordajes posteriores del tema.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Las montañas

Montaña (del latín montanea, de mons, montis) es una eminencia superior a 700 metros respecto a su base, es decir, una elevación natural del terreno [1]. Las montañas cubren 53 % de Asia, 36 % de Norteamérica, 25 % de Europa, 22 % de Sudamérica, 17 % de Australia y 3 % de Africa. En total, un 24 % de la litosfera constituye masa montañosa. Un 10 % de la población mundial habitan regiones montañosas. Todos los ríos mayores del mundo nacen en áreas montañosas y más de la mitad de la humanidad depende del agua de las montañas. Montaña es la elevación o de grupo elevaciones originadas por fuerzas endógenas (orogénesis), y modeladas y divididas por fuerzas exógenas [2].

2.1.1. Tipos y Origen

1. *Según su altura.* Se distingue entre montañas medias, de formas generalmente redondeadas a consecuencia de diferencias de altura escasas, y montañas altas, de formas agudas y pendientes abruptas, consecuencia de una erosión intensa determinada por el carácter enérgico del relieve (los Alpes).

2. *Según su forma y extensión.* Se distinguen montañas en cadena (cordillera, cadenas montañosas), con una serie de cadenas paralelas alargadas, y montañas-macizos, en las que la extensión es, más o menos, igual en todas las direcciones.

3. *Según su origen.* Se distinguen montañas volcánicas, surgidas por la actividad volcánica,

y montañas tectónicas, que, a su vez, pueden ser plegadas (en ellas los pliegues determinan aún las formas y el agrupamiento de las cadenas), falladas o fracturadas (en ellas las fracturas y fallas son las que determinan los rasgos esenciales de la estructura) y plegado-fracturadas (los plegamientos están entremezclados en fallas).

Algunos montes se formaron por la confluencia de placas tectónicas en desplazamiento y la afluencia de las rocas en sus límites[2]. En este proceso las rocas sedimentarias originarias del fondo oceánico se elevan y forman mesetas intermontañas donde enormes capas horizontales son levantadas, como el Tíbet en el Himalaya a 4200 metros de altitud o la meseta de Colorado en el Gran Cañón a 1600 metros de altura. También forman montañas plegadas, cuando el empuje contra escudos supone el plegamiento de depósitos geosinclinales con espesores de 10 kms, ejemplo Andes, Alpes, Himalaya y Rocallosas.

Otras montañas pueden alzarse por fractura; tales son las montañas de bloque como las de Ruwenzori entre Uganda y Zaire. Un tercer tipo de montes puede formarse como resultado de la actividad volcánica y ello puede ocurrir en regiones de plegamiento orogénico activo como a lo largo de la costa Pacífico donde está el Santa Helena, el Ruiz y el Misti [2]. Hay otro tipo fundamental de montaña, la que nace empujada hacia arriba por una intrusión magmática o de un diapiro salino bajo la superficie.

El origen de las montañas está en fuerzas endógenas (orogénesis oro=montaña; génesis=origen), posteriormente modificadas por factores exógenos, como la erosión. Las orogénesis que han dejado más huellas en el relieve y en la configuración actual de los continentes derivan del plegamiento herciniano, en la Era Primaria, y del plegamiento alpino, en la Terciaria. En la Era Cuaternaria las glaciaciones han erosionado las cadenas montañosas dando lugar a muchos de los paisajes montañosos característicos. Un ejemplo de formación montañosa terciaria es la Cordillera de los Andes.

En la historia de la Tierra ha habido al menos tres períodos de formación de montañas:

1. Caledoniano, cuyos relieves montañosos se formaron hace 400 millones de años, como

sucede en Escocia (cuyo nombre latino era el de Caledonia), cuyo pico más elevado es el Ben Nevis.

2. Herciniano, con relieves que se formaron hace 270 millones de años. Como por ejemplo, los Urales (pico Narodnaya de 1.873 msnm) y los Apalaches en Norteamérica (con el Monte Mitchell, de 2.025 msnm).

3. Alpino, con relieves montañosos elevados formando largas cordilleras, volcánicas o no, que se formaron hace unos 35 millones de años, como sucede en los Alpes (Europa) y el Himalaya en Asia. Son los relieves más jóvenes y muchos de ellos todavía se están levantando, resultando además que la erosión ha actuado sobre ellos durante menos tiempo, por lo que las montañas alpinas presentan las mayores alturas del relieve terrestre. Ejemplos representativos de este tipo de montañas son el Mont Blanc de 4.810 msnm. y el Everest de 8.848 msnm.

Figura 2.1: **Los Himalayas, la cordillera más alta de la tierra con catorce cimas de más de 8.000 metros de altura. Tomado de [5]**

2.2. Erosión

Se denomina erosión al proceso natural de naturaleza física y química que desgastan y destruyen continuamente los suelos y rocas de la corteza terrestre; incluyen el transporte de

material pero no la meteorización estática. La mayoría de los procesos erosivos son resultado de la acción combinada de varios factores, como el calor, el frío, los gases, el agua, el viento, la gravedad y la vida vegetal y animal. En función del principal agente causante de la erosión y del tiempo que sus efectos sobre la superficie terrestres tardan en manifestarse, se habla de erosión geológica o natural y de erosión acelerada. La primera es debida a la acción de agentes y procesos naturales que actúan a lo largo de millones de años; mientras que la erosión acelerada es el resultado de la acción antrópica y sus efectos se dejan sentir en un periodo de tiempo mucho menor [4].

Erosión Geológica

Los fenómenos climáticos inician la erosión de los suelos y causan alteraciones en la superficie de sus estratos. En climas secos, el estrato superior de la roca se expande debido al calor del sol y acaba resquebrajándose, ya que si la roca está compuesta por varios minerales, éstos sufren diferentes grados de expansión y la tensión que se genera conduce a su fragmentación. El viento puede arrastrar diversos fragmentos y acumularlos en otro lugar, formando dunas o estratos de arena. El material perdido por la roca también puede ser arrastrado por la arroyada en fenómenos de escorrentía.

En climas húmedos, la lluvia actúa tanto química como mecánicamente en la erosión de las rocas. El vapor de agua contenido en la atmósfera absorbe dióxido de carbono y lo transforma en ácido carbónico; al precipitar, en forma de lluvia (lluvia ácida), disuelve algunos minerales y descompone otros. El duro feldespato del granito se transforma en arcilla; y determinados minerales del basalto, combinados con oxígeno y agua, forman óxidos de hierro como la limonita. Las altas temperaturas intensifican este tipo de erosión.

En climas fríos, el hielo rompe las rocas debido al agua que se introduce por sus fisuras y poros y se expande con las heladas. Las rocas también se agrietan por la acción de las raíces de las plantas.

El agua de los arroyos y de los ríos es un poderoso agente erosivo; disuelve determinados minerales y los cantos que transporta la corriente desgastan y arrastran los depósitos y lechos fluviales. Los ríos helados también erosionan sus valles; el lento movimiento del glaciar remueve gradualmente todo el material suelto de la superficie por la que se desliza, dejando algunas partes de roca desnuda cuando el hielo se derrite. Además de movilizar los materiales sueltos, los glaciares erosionan activamente la roca por la que se desplazan; los fragmentos de roca inmersos en el fondo y en los lados de la masa de hielo en movimiento actúan como un abrasivo, al arañar y pulir el lecho rocoso de los lados y del fondo de los valles.

En la costa, la erosión de acantilados rocosos y playas de arena es el resultado de la acción del mar, las olas y las corrientes. Ésta es especialmente fuerte durante las tormentas. En muchos lugares del mundo, la pérdida de terreno debido a la erosión costera representa un serio problema; de cualquier modo, la acción de las olas es superficial, por lo que la erosión marina tiende a modelar una característica plataforma plana sobre las rocas de la costa.

El agua tiene un papel aún más importante en lo que se refiere al transporte de material erosionado. Desde el momento en el que cualquier lugar reciba más agua (en forma de lluvia, nieve derretida o hielo) de la que el terreno pueda absorber, el excedente fluirá hacia niveles más bajos arrastrando el material suelto. Las laderas suaves sufren una erosión laminar y abarrancamientos, durante los cuales la denominada escorrentía arrastra la fina capa superior del suelo sin dejar rastros visibles de haber erosionado esa superficie. Este tipo de erosión puede compensarse con la formación de nuevos suelos. A menudo, especialmente en zonas áridas con escasa vegetación, los arroyos dejan un rastro de cárcavas. Parte de los detritos y de los suelos que arrastran los arroyos se depositan en los valles, pero una gran parte llega hasta el mar a través de los cursos de agua. El río Mississippi deposita todos los años unos 300 millones de m3 de sedimentos en el golfo de México.

La erosión esculpe constantemente nuevos relieves en la superficie de la tierra. La forma de los continentes cambia continuamente, a medida que las olas y las mareas invaden tierra firme y el limo de los ríos gana terreno al mar. De igual modo que los arroyos y ríos ahondan

sus cauces, las cárcavas se convierten en barrancos y éstos en valles. El Gran Cañón, en Estados Unidos, con más de 2 km de profundidad, es el máximo ejemplo de un cañón producido por la erosión a lo largo de un millón de años, no sólo por la acción del viento y las temperaturas extremas, sino también por la del río Colorado, cortando grandes espesores de roca.

El efecto conjunto del desgaste de montañas y mesetas tiende a nivelar el terreno; existe una propensión a la reducción del relieve al nivel del mar (nivel de base). Por ejemplo, cada 7.000 ó 9.000 años, la cuenca del Mississippi pierde un promedio de 30 cm de altitud. La tendencia contraria la representan las erupciones volcánicas y movimientos de la corteza terrestre, que levantan montañas, mesetas y nuevas islas. Gran parte de la geología y de la geografía (en particular la geomorfología) se ocupa de las fuerzas y resultados de las formas de erosión sobre la tierra.

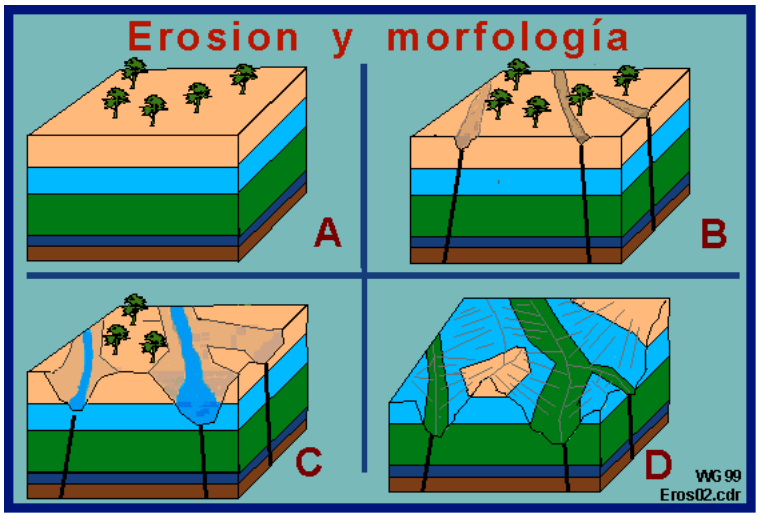


Figura 2.2: **Ejemplo de la formación de un paisaje por erosión . Tomado de [3]**

La figura 2.2 muestras cuatro etapas, la etapa **A** muestra Sector con estratos horizontales no erosionada, la etapa **B** Comienzo de la erosión y del transporte en sectores más blandas (en este caso fallas o fracturas), la etapa **C** Erosión avanzada: los valles son más profundo, abajo afloran las capas más antiguas (capa azul) y finalmente la etapa **D** Erosión muy avanzada: De la capa superior se quedan solamente restos arriba de las montañas, los valles

muestran una alta profundidad, abajo afloran rocas más antiguas (capa verde).

Erosión Acelerada

Sin la intervención humana, las pérdidas de suelo debidas a la erosión probablemente se verían compensadas por la formación de nuevos suelos en la mayor parte de la Tierra. En terreno sin alterar, los suelos están protegidos por el manto vegetal. Cuando la lluvia cae sobre una superficie cubierta por hierba u hojas, parte de la humedad se evapora antes de que el agua llegue a introducirse en la tierra. Los árboles y la hierba hacen de cortavientos y el entramado de las raíces ayuda a mantener los suelos en el lugar, frente a la acción de la lluvia y el viento. La agricultura y la explotación forestal, la urbanización, la instalación de industrias y la construcción de carreteras destruyen parcial o totalmente el dosel protector de la vegetación, acelerando la erosión de determinados tipos de suelos. Ésta es menos intensa en zonas con cultivos como el trigo, que cubren uniformemente el terreno, que en zonas con cultivos como el maíz o el tabaco, que crecen en surcos.

El exceso de pastoreo, que a la larga puede transformar la pradera en desierto, y las prácticas agrícolas poco cuidadosas, han tenido efectos desastrosos en determinadas regiones del mundo. Algunos historiadores piensan que la erosión del suelo ha sido un factor determinante en el conjunto de causas que han provocado algunos desplazamientos de población, debidos a la sequía, y en la decadencia de algunas civilizaciones. Las ruinas de pueblos y ciudades encontradas en regiones áridas, como los desiertos de Mesopotamia, indican que hubo un momento en el que la agricultura fue una actividad generalizada por toda la zona.

2.3. Los Ríos

Un río es una corriente de agua continua o perenne, intermitente o no, que desemboca en el mar, en otro río (afluente) o en un lago (emisor) o que pierde por el terreno (endorreismo). Como modeladores del relieve los ríos son los agentes geológicos más importantes, ya por la acción geológica que realizan, ya por la extensión de las áreas sobre las que actúan [2]. Como las características de erosión y sedimentación van variando y en consecuencia también las

formas erosivas y de acumulación.

El río principal con todos sus afluentes, constituye una red fluvial, también llamada cuenca hidrográfica. El caudal de un río depende de las fuentes que lo alimentan, de la cuantía de las precipitaciones y aguas de deshielo, del grado de permeabilidad de los terrenos que atraviesa. Los ríos resultan de la unión de las aguas de los torrentes. Las líneas que forman los puntos más altos de relieve son las divisorias, quienes distribuyen hacia uno y otro lado las aguas de las precipitaciones. La zona geográfica que alimenta a un mismo río está limitada por dos divisorias y se denomina cuenca hidrográfica. Un río de montaña se alimenta con el agua de los arroyos confluentes en las zonas de recepción, donde se forman torrentes que llevan agua rápida al valle principal. Aquí la velocidad disminuye y el sedimento se deposita en un cono aluvial o de deyección. En consecuencia, en los torrentes fluviales pueden distinguirse claramente el tramo alto, el medio y el inferior, los que reciben los nombres de cuencas de recepción, canal de desagüe y cono de deyección.

En la cuenca tributaria o de recepción, se concentran las aguas que provienen de la fusión de la nieve o de las tormentas. Como la pendiente es fuerte y la vegetación escasa, la erosión actúa con intensidad. La forma de la cuenca es triangular, con un vértice en la parte más baja y formada por numerosos barrancos que confluyen unos con otros hasta formar un único cauce, el canal de desagüe. El canal de desagüe corresponde al recorrido más largo del torrente. La principal acción geológica es el transporte, pero también se producen erosión y sedimentación. Al final del canal se encuentra el cono de deyección. El cono de deyección se forma en el valle de salida, por los sedimentos que deja el río cuando pierde velocidad. Este cono inestable tiende a suavizar el cambio de pendiente entre la ladera de la montaña y el fondo del valle.

En las áreas sometidas a la acción de torrentes y ríos, los relieves con el tiempo se van suavizando en función de los niveles de base hasta la situación hipotética en la que los ríos alcanzan sus perfiles de equilibrio y toda el área se transforma en penillanura (llanura erosiva suavemente inclinada hacia el mar). Las aguas corrientes ejercen un papel en la preparación

y evolución de las formas del relieve continental. Las formas elementales primitivas, de las zonas emergidas por orogénesis y epirogénesis, son atacadas inmediatamente por las aguas meteóricas y el arroyamiento. Las aguas salvajes ejercen una acción de erosión, de horadación, que determina la constitución de una red hidrográfica que colecta las aguas de arroyamiento. Estas aguas corrientes transportan los materiales arrancados al relieve y terminan por depositarlos en el camino; los más finos en el mar.

Deltas. Los deltas se forman cuando un río penetra en el mar o en un lago y toda su carga se sedimenta formando un montículo extenso y de suave pendiente que al ir creciendo obliga al río a fluir sobre él para llegar a la desembocadura.

Abanicos. Los abanicos o conos aluviales son depósitos formados en la intersección de la montaña con el valle de salida de los ríos. Estos depósitos se dan cuando la fuerza de la corriente pasa bruscamente de fuerte a suave.

Valles. Un valle se forma por dos procesos. El río va excavando la tierra arrancando una estrecha franja de roca de su lecho, y de éste modo produce un perfil en V. Posteriormente la meteorización ensancha el valle transformando las rocas que forman los márgenes del suelo. Al disminuir la velocidad del agua la erosión lateral ensancha el fondo del valle. En su estadio avanzado el río discurre lentamente sobre un llano aluvial en el que el material depositado forma diques laterales.

Terrazas. Es una franja de tierra plana situada a lo largo de la pared del valle justamente sobre el valle de crecidas. Una terraza se forma cuando sube la tierra o baja el nivel del mar y el río empieza a cortar su llano de crecidas para formar otro nuevo a un nivel más bajo.

Corrientes trenzadas y corrientes con meandros. Cuando los ríos encuentran los valles de salida, suelen presentar corrientes trenzadas, particularmente aquellos ríos que arrastran gran cantidad de sedimentos, cuyo cauce deriva de izquierda a derecha entre una u otra época de avenida. Es el caso de los ríos de la cordillera Oriental, en su llegada al llano.

Más adelante, cuando se encuentran en valles amplios, los ríos son lentos, se favorecen los depósitos, que hacen serpentear la corriente; los meandros se producen si hay poca pendiente, pero el agua puede romper los meandros dejando sus vestigios, los que marcan el área de influencia del río, para recuperar viejos canales. En una curva del río el agua va más lenta por la margen interior y erosiona por la contraria para acentuar el meandro, hasta que se produce una intersección de dos curvaturas que permitan al flujo seguir un camino más corto [3].

En general los ríos se pueden clasificar en: rectos, meandricos y tipo braided como se muestra en la figura:

Figura 2.3: **Tipo de ríos. Tomado de [3]**

2.3.1. El ambiente fluvial

Cada paisaje se formó por acción de agua y viento. Los ríos hacen erosión, transporte y sedimentación. El tipo de paisaje depende fuertemente del comportamiento del agua. Es decir los factores como inclinación, energía del agua, velocidad del agua, cantidad del agua, tipo de roca, cantidad de precipitación, tipo de vegetación manejan la morfología de una paisaje [3]. En un río modelo (véase figura) se conocen tres regiones: 1) Sector de montañas, 2)sector de colinas y 3) sector de llanura. En las montañas altas normalmente hay una buena cantidad de precipitaciones además los taludes tienen ángulos mayores y la vegetación no es tan densa. En estas regiones los ríos principalmente hacen erosión y transporte. Solo en algunos pocos lugares depositan su carga.

Figura 2.4: **Ambiente fluvial . Tomado de [3]**

2.4. Formación de un Paisaje

La geomorfología estudia las formas del relieve terrestre; estudia las formas de la superficie de la tierra y su desarrollo. La meteorización, erosión y el transporte forman la superficie terrestre como nosotros conocemos. Por las fuerzas de agua viento y hielo se forman cerros, valles o llanuras. Principalmente los sectores más altos sufren más erosión y/o transporte en comparación de las regiones cercanas del nivel del mar. Los factores más importantes de la "construcción" de un paisaje son:

- Factores climáticos
- Tipo de roca
- Desgaste estructural o tectónico geomorfológico

Distintas rocas tienen una diferente manera de erosionar y una diferente resistencia contra el desgaste. Eso finalmente es la razón por que existe morfología y desniveles. Un flanco de un cerro nunca muestra en toda las partes el mismo ángulo. Pequeños cambios en la resistencia de la roca inmediatamente se traduce en un mayor o menor ángulo del talud.

Fuerzas tectónicas compresivas logran que la corteza terrestre en su búsqueda de un equilibrio se desplaza hacia arriba. Sí se forman montañas se llama el proceso orogénesis.

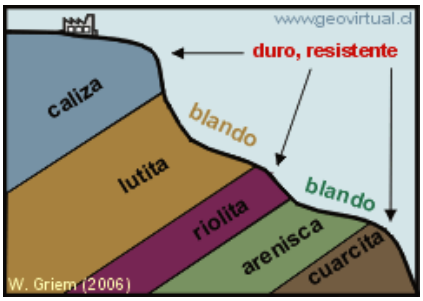


Figura 2.5: **La erosión diferencial: El desgaste se manifiesta más fuerte en rocas de menor resistencia. Las diferencias entre distintas litologías pueden ser muy pequeñas, pero suficiente para modelar un talud irregular. Tomado de [3]**

Aquí toman posesión los fenómenos de la erosión y del transporte: Cada cerro es un obstáculo más y la erosión lo ataca. El objetivo del sistema meteorización - erosión - transporte es la construcción de una superficie terrestre plana. Las fuerzas sedimentarias nunca van a cumplir su objetivo porque una "contrafuerza",la tectónica no lo permite y levanta partes de la corteza terrestre.

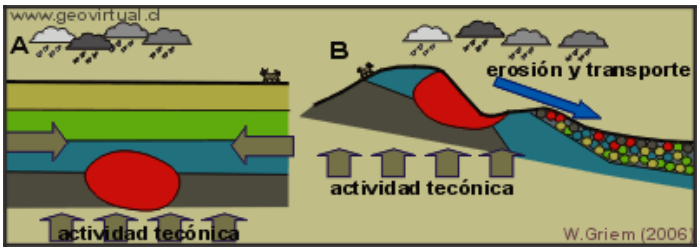


Figura 2.6: **Geomorfología y tectónica . Tomado de [3]**

En la figura 2.6, la actividad tectónica provoca el alzamiento tectónico y entonces una erosión más fuerte. Paulatinamente llegan las rocas de origen en la profundidad (aquí por ejemplo la roca plutónica - roja) a la superficie. La erosión y el transporte forman grandes depósitos clasticos. Un detalle: Los clastos provenientes de los estratos jóvenes (amarillo y verde) erosionan al primero y forman la base de los depósitos clasticos, las unidades más antiguas (rojo y gris) entran al sistema de erosión y transporte más tarde y se depositan como clasto en los estratos superiores.

2.5. Fractales

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite en diferentes escalas [6]. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrôt en 1975. En muchos casos, los fractales pueden ser generados por un proceso recursivo o iterativo, capaz de producir estructuras auto-similares independientemente de la escala específica. Los fractales son estructuras geométricas que combinan irregularidad y estructura. Han sido propuestas otras definiciones, de hecho estamos ante un concepto geométrico para el que aún no existe una definición precisa, ni una teoría única.

Aunque muchas estructuras naturales tienen comportamiento fractal, un fractal matemático es un objeto que tiene por lo menos una de las siguientes características [6]:

- Tiene detalles en escalas arbitrariamente pequeñas.
- Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- Tiene auto-similaridad exacta o estadística.
- Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch no es entera y es mayor a su dimensión topológica, que se mantiene a diferentes escalas, lo que equivale a que el todo es semejante a las partes.
- Puede ser definido de forma recursiva.

Cuando Maldenbrôt introdujo el concepto de fractal lo relacionó con la invarianza en escala, por ejemplo la longitud de una línea de costa es obtenida usando una regla de longitud específica, debido a la invarianza de escala, la longitud de la línea de costa aumenta a medida que la longitud de la regla disminuye [7], es decir sigue una ley de potencia, una ley de potencia es la única distribución que no incluye características de escala, la potencia determina la dimensión fractal de la línea de costa. No es posible obtener un valor especifico de la longitud de la costa debido a las pequeñas indentaciones realizadas, [8]. Los objetos fractales poseen

longitud infinita, por el contrario aunque resulte paradójico poseen área finita.

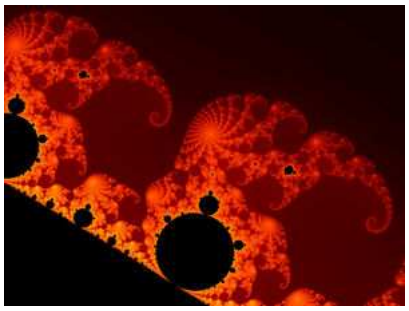


Figura 2.7: **Conjunto de Maldenbrôt. Tomado de [9]**

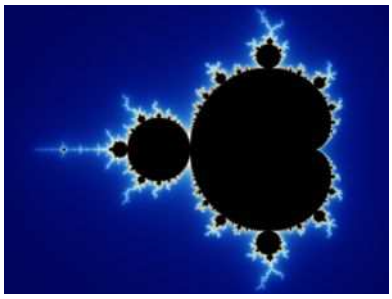


Figura 2.8: **Otra vista del conjunto de Maldenbrôt. Tomado de [9]**

Los fenómenos autosimilares tienen el mismo aspecto o comportamiento cuando se visualizan con distintos grados de ampliación o a distintas escalas en cierta dimensión [10]. En [11] auto-similitud se observa cuando una serie de tiempo tiene la misma función de autocorrelación en diferentes niveles de agregación, esto es una serie estacionaria de tiempo X_t es autosimilar, si definimos una serie agregada $X^{(m)}_k$ usando bloques de tamaño m, y X_t tiene las misma función de autocorrelación r con $X^{(m)}_k$ para cada nivel de agregación m, donde:

$$r(k) = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sigma^2} \tag{2.1}$$

de manera intuitiva, esto significa que la serie de tiempo presenta las misma propiedades estadísticas a diferentes niveles de agregación. Si la función de autocorrelación sigue un ley de

potencia, esto es $r(k) \sim k^{\beta}$ y $k \to \infty$, entonces se dice que el proceso tiene larga dependencia, concepto que será ampliado en una próxima sección.

En relación al término dimensión, éste tiene un significado matemático muy amplio. La dimensión topológica es la que nos resulta más intuitiva y pragmática para comprender. Esta establece la dimensión de un punto = 0, la de una curva = 1, la de una superficie = 2, la de un volumen =3 [12]. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch es la expresión matemática de la dimensión de los objetos. La dimensión fractal sirve para cuantificar el grado de irregularidad o fragmentación de un conjunto geométrico u objeto natural.

De manera formal en [12], un objeto tiene dimensión topológica m cuando cualquier recubrimiento de ese objeto, tiene como mínimo una dimensión topológica $= m + 1$ (estableciendo previamente que el punto tiene dimensión topológica = 0). La dimensión definida por Félix Hausdorff en 1919, y perfeccionada más tarde por Besicovitch (dimensión Hausdorff-Besicovitch) está recogida en la definición de fractal que propone Benôit B. Mandelbrôt *"Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica"*. Definimos entonces dimensión fractal:

$$N_n = \frac{C}{r_n^D} \tag{2.2}$$

Donde N_n es el número de objetos(por ejemplo fragmentos), con una dimensión lineal característica r_n, C es una constante de proporcionalidad, y D es la dimensión fractal. La dimensión fractal puede ser un entero en cuyo caso es equivalente a la dimensión Euclidiana [8]. Usando una línea de segmento de longitud uno, operamos para despejar D:

$$D = \frac{ln(N_{n+1}/N_n)}{ln(r_n/r_{n+1})} \tag{2.3}$$

La dimensión de Hausdorff- Besicovitch, es una generalización de la dimensión euclidiana, que con carácter general, tiene valores enteros e iguales a la dimensión topológica para las líneas, polígonos y sólidos y valores fraccionarios y superiores a su dimensión topológica en los fractales.

Los fractales suelen visualizarse como similares en todos los niveles de la ampliación, los fractales se consideran a menudo ser infinitamente complejos (en términos informales). Los objetos naturales que se aproximan a fractales incluyen las nubes, montañas, relámpagos, las líneas de la costa, las escamas de la nieve, árboles (Fig.2.9), etc. Sin embargo, no todos los objetos auto-similares son fractales por ejemplo, una línea (una línea euclidiana recta) es formalmente auto-similar pero no posee características fractales.

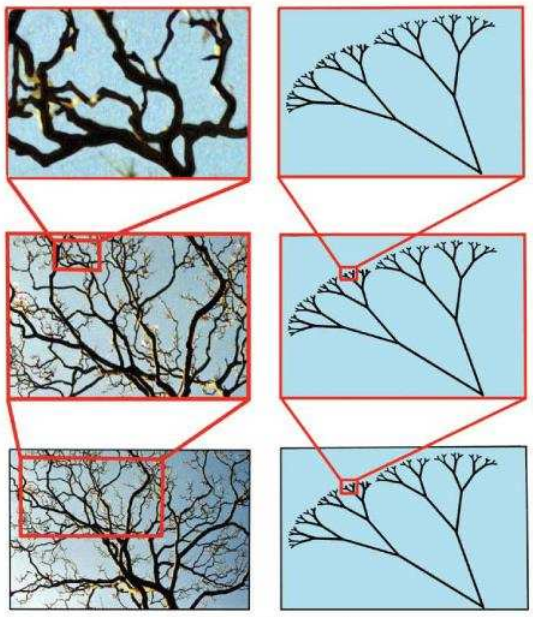


Figura 2.9: **Comparación estadística de patrones fractales. Tomado de [14]**

2.5.1. Fractales aleatorios

Un fractal se considera aleatorio cuando en su construcción intervienen elementos condicionados por el azar. Por ejemplo, imaginemos que queremos reproducir el perfil de una montaña partiendo de una figura regular como un triángulo (Figura 2.10(a)). Iniciemos el trabajo localizando los puntos medios de cada lado, y desplacémoslos verticalmente a una distancia d determinada por algo que produzca números aleatorios. Si unimos con líneas los puntos desplazados (Figura 2.10(b)), la forma resultante estará constituida por cuatro triángulos más pequeños no son necesariamente iguales. Si sobre cada una de estas nuevas

partes se repite el mismo procedimiento (Figura 2.10(c)), y se continúa haciéndolo sobre las figuras resultantes (Figura 2.10(d)) hasta que sea imposible distinguir los lados de cada triángulo, el resultado será una estructura poligonal muy rugosa y compleja que con un manejo adecuado de tintes, luces y sombras puede convertirse en una excelente reproducción de una montaña.

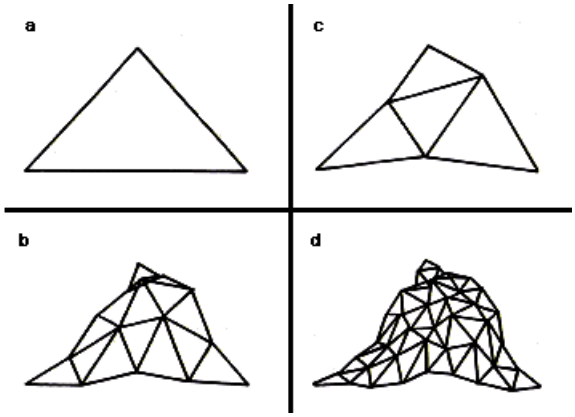


Figura 2.10: **Fractal aleatorio. Tomado de [6]**

Otros métodos de simulación de imágenes desarrollados por B. Mandelbrôt y sus colaboradores recurren al uso de los patrones generados en *caminatas aleatorias* o señales de ruido de radiofrecuencia, para generar los contornos de costas, nubes o macizos rocosos. En este caso, aunque las escenas obtenidas pueden ser muy realistas, existen serias desventajas asociadas al hecho de que la técnica no es sistemática y requiere de un largo periodo de prueba y error.

Los fractales que se obtienen por métodos matemáticos o geométricos como los descritos anteriormente son en ocasiones demasiado regulares y perfectos como para servir de modelo para patrones naturales. Esto ha llevado a tratar de incluir en los algoritmos matemáticos las características conocidas sobre los procesos de crecimiento y formación de objetos reales.

2.6. Registros de Hurst

Harold Edwin Hurst (1880-1978) científico británico conocido por ser el pionero en el estudio de persistencia en fenómenos hidrológicos, un tópico que llamó su atención cuando estudió las series de tiempo del Río Nilo, registros que obtuvo tras décadas de investigación. En la década de los cincuenta Hurst al estar estudiando el comportamiento de los torrentes de Río Nilo para encontrar un diseño óptimo de represas, descubrió que muchos fenómenos naturales exhiben un comportamiento que puede ser caracterizado por un proceso aleatorio sesgado, en el cual existe "memoria de largo plazo"entre las observaciones, es decir que los eventos de un periodo influenyen en todos los siguientes.

Durante la década de los años sesenta y setenta , Maldenbrôt expandió el trabajo de Hurst colocándolo en un contexto más general con el nombre de *"análisis del rango reescalado"* [15]. El análisis del rango reescalado o análisis R/S, es un método estadístico usado para estudiar la frecuencias de eventos poco frecuentes, la aplicación del análisis R/S no tiene sólo que limitarse a eventos poco comunes puede ser usado en cualquier serie de tiempo.

El análisis R/S fue desarrollado originalmente para estudiar la forma en que el nivel del agua de una represa fluctúa a través del tiempo. Denotemos $\langle x \rangle_t$ como la cantidad de agua que lleva el río al reservorio, el flujo anual del río. Si se predice la tasa anual de descarga del río durante "s'' años con un volumen regulado de agua $\langle x \rangle_s$ será descargado, hacia una ciudad por ejemplo, este volumen es justamente el flujo promedio del río en la represa donde el promedio es tomado sobre la cantidad "s'' de años.

$$\langle x \rangle_s = \frac{1}{s} \sum_{u=1}^{s} x_u \tag{2.4}$$

El flujo anual hacia la presa será distinto al flujo medio, ya que el flujo del río depende de factores naturales como la lluvia. Si el flujo es menor al flujo anual promedio durante un año particular, se puede proveer a la ciudad con un flujo $\langle x \rangle_s$. Si el flujo del río es mayor al promedio anual, el exceso será almacenado en la represa, este esquema funcionará bien siempre y cuando se escoja el correcto tamaño de la presa,un reservorio de agua ideal nunca

se desborda y nunca llega a vaciarse [16], inicialmente se desea acumular suficiente agua para satisfacer necesidades futuras en caso de que el flujo del río sea menor que el promedio.

Las desviaciones acumuladas de los flujos x_u, podrán ser útiles para examinar la efectividad de manejo de la represa

$$X(t,s) = \sum_{u=1}^{t} [x_u - \langle x \rangle_s] \tag{2.5}$$

se observa que $X(t,s)$ es función de dos variables, el rango de las desviaciones acumuladas R, es la diferencia entre la máxima y mínima desviación acumulada

$$R(s) = \max_{0 \le t \le s}[X(t,s)] \min_{o \le t \le s}[X(t,s)] \tag{2.6}$$

el rango depende del periodo "s'' considerado, y corresponde a la fluctuación del nivel de agua de la represa. La medida ideal de la presa es (2.6).El rango depende del tiempo s considerado, se espera que el rango R incremente si aumenta s, esta cantidad de tiempo s, sobre la cual el registro en tiempo es analizado es llamada *lag* o *retardo* [16].

En [13] se detalla el procedimiento para obtener el rango y definen algunos conceptos.
Rango poblacional: Sea x_t un proceso estocástico discreto, y sea un intervalo de tiempo de longitud s. Se define la desviación acumulada con respecto a la media poblacional para el intervalo de longitud s como sigue:

$$X(t,s) = \sum_{u=1}^{t} [x_u - E(x)] \tag{2.7}$$

donde $E(x)$ es el valor esperado del proceso estocástico x_t. Entonces, el rango población para el intervalo de longitud $s, R_p(s)$, es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de (2.7):

$$R_p(s) = \max_{0 \le t \le s}[X(t,s)] \min_{o \le t \le s}[X(t,s)] \tag{2.8}$$

Con el objetivo de poder comparar los rangos de diferentes series de tiempo, Hurst

reescaló el rango dividiéndolo entre la desviación estándar de x_t, $var(x)$

$$\frac{R_p}{\sqrt{var(x)}} \tag{2.9}$$

la esperanza $E(x)$, la varianza $var(x)$, son desconocidos sin embargo, Hurst reemplazó $E(x)$ por la media muestral $\langle x \rangle_s$, dando como resultado la función $R(s)$, definida como:

Rango muestral: Sea x_t un proceso estocástico discreto, y sea un intervalo de tiempo de longitud s. Se define la desviación acumulada con respecto a la media muestral para el intervalo de longitud "s''

$$X(t,s) = \sum_{u=1}^{t} [x_u - \langle x \rangle_s] \tag{2.10}$$

donde $\langle x \rangle_s$ es la media muestral de x_t en el intervalo de longitud s. El rango muestral para el intervalo de longitud $s, R(s)$, es la diferencia entre los dos valores máximo y mínimo de (2.10)

$$R(s) = \max_{0 \le t \le s}[X(t,s)] \min_{o \le t \le s}[X(t,s)] \tag{2.11}$$

De manera similar, Hurst reemplazó la $var(x)$ por la varianza muestral S^2, que se define como:

$$S^2(s) = \frac{1}{s}\sum_{u=1}^{s}\left[x_u - \frac{1}{s}\sum_{t=1}^{s} x_t\right] = \frac{1}{s}\sum_{u=1}^{s}[x_u - \langle x \rangle_s]^2 \tag{2.12}$$

Se define entonces el rango muestral como:

$$R(s)/S(s) \tag{2.13}$$

Observar que $R(1)/S(1)$ da la forma indeterminada $0/0$; si $s = 2$ se obtiene el resultado trivial $R(2)/S(2) = 1$. Por tanto, será posible obtener valores no triviales de $R(s)/S(s)$ sólo si $s \geq 3$.

Maldenbrôt y Wallis [15] demostraron empíricamente que el rango reescalado R/S está relacionado con el tamaño de la muestra s:

$$R(s)/S(s) \approx cs^H \tag{2.14}$$

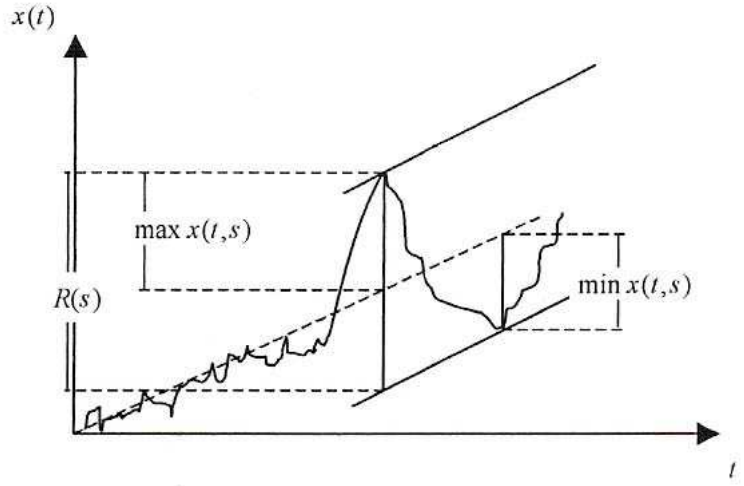


Figura 2.11: **Construcción del rango muestral $R(s)$. Tomado de [13]**

donde c es una constante y H es la medida de intensidad de dependencia de largo plazo, la cual en honor a Hurst se conoce como *coeficiente de Hurst*. Además demostraron que, para series de tiempo cuyas observaciones son independientes, el radio R/S es asintóticamente proporcional a la raíz cuadrada del tiempo

$$R(s)/S(s) \sim \sqrt{s} \tag{2.15}$$

esto $H = 0{,}5$ que evidencia un comportamiento aleatorio, esto es, ausencia de dependencia de largo plazo. Para muchos fenómenos naturales el valor de H es mayor a 0,5; esto es, el rango reescalado se incrementa más rápido que la raíz cuadrada del tiempo, lo cual significa que el sistema ha cubierto mayor distancia que un proceso aleatorio [13].

De acuerdo con la intensidad de la dependencia de largo plazo, es posible dividir a los procesos o series de tiempo, de tal manera que cada clase contenga procesos para los cuales la dependencia de largo plazo no cíclica tenga la misma intensidad.

Un proceso estocástico satisface la ley $R/S \sim s^H$ en media, si el rango reescalado $[R(s)/S(s)]$ está relacionado con la longitud del intervalo s de la siguiente manera [13]:

$$E[R(s)/S(s)] \sim s^H \tag{2.16}$$

el valor de H puede estar entre cero y uno, y se puede decir que todos los procesos que satisfacen la ley $R/S \sim s^H$ en media con idéntico valor de H forman una clase de equivalencia.

Resulta factible tener también procesos que no satisfagan ninguna ley $R/S \sim s^H$ en media con $0 \leq H \leq 1$. Estos procesos carecen, en apariencia, de aplicaciones prácticas que podrían considerarse como miembros de una sola clase, la clase restante de procesos para los cuales no se puede tener una intensidad R/S.

Cuando el valor de "s'' tiende a infinito, se espera que H tenga un comportamiento asintótico del rango reescalado. Para un valor de "s'' muy grande, se espera que el coeficiente de Hurst de la serie de tiempo converja al valor $H = 0{,}5$ es decir, se espera que las observaciones exhiban propiedades similares a una caminata aleatoria pura, en tanto que el efecto de la memoria a largo plazo se disipe. Este punto de pérdida de la memoria corresponde al final del periodo natural del sistema. Este comportamiento asintótico del rango reescalado, nos dice que existen ciclos para los cuales el efecto de la memoria a largo plazo esta presente, y que a partir de determinado valor "s'' son independientes. Estos ciclos no son regulares en su ocurrencia, y son llamados por Maldenbrôt "ciclos no periódicos", no se puede predecir exactamente cuando puede ocurrir un cambio en la tendencia, pero si se puede calcular un promedio de duración de los ciclos con la ayuda del comportamiento del rango reescalado.

2.7. Larga dependencia

El parámetro **H** de Hurst es una medida del nivel de la auto-similitud de una serie de tiempo que exhiba dependencia de largo alcance. H adquiere valores a partir de la 0.5 a 1. Un valor de 0.5 indica la ausencia de auto-similitud. El valor de H más cercano a 1, es el mayor grado de persistencia o la dependencia de largo alcance. Cuando el exponente de Hurst es mayor a 0.5, aparece el fenómeno de Larga Dependencia (Long Range Dependence, LRD). En los más diversos campos se ha observado empíricamente que muchas series de tiempo o espacio tienen funciones de autocorrelación que decaen a cero como una función de ley de potencia, tienden a cero tan lentamente que la suma de las funciones divergen. Con frecuencia

en la naturaleza, economía, telecomunicaciones e hidrología, este concepto esta relacionado con la auto-similitud.

Mencionamos ahora de manera formal la definición de un proceso con LRD [17]:
Definición: Un proceso estacionario Y_t (con varianza finita), tiene larga dependencia si su función de autocorrelación $C(\tau) = corr(Y_t, Y_{t+\tau})$ decae como la potencia del retardo τ .

$$C(\tau) = corr(Y_t, Y_{t+\tau})\ \tau \overset{\sim}{\to} \infty\ \frac{L(\tau)}{\tau^{1-2d}}; \qquad 0 < d < \frac{1}{2} \tag{2.17}$$

Cuando la serie *"L"* varía lentamente a infinito, se verifica que $\forall a > 0$, $\frac{L(at)}{L(a)} \to 1$, como $\to \infty$.

Según [13], la propiedad de poseer larga dependencia depende del comportamiento de la función de autocorrelación para "τ" (lags) largos, una cantidad que se hace difícil de estimar empíricamente , por esta razón los modelos de LRD son por lo general formulados en términos de procesos autosimilares, que extrapola escalas de tiempo y deduce comportamientos de largo tiempo a partir de comportamientos de corto tiempo lo cual es más fácil de observar.

Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$, es auto-similar si existe un $H > 0$, tal que cualquier factor de escala $c > 0$, el proceso $(X_{ct})_{t\geq 0}$ y $(c^H X_t)_{t\geq 0}$ tienen en común:

$$(X_{ct})_{t\geq 0} \overset{d}{=} (c^H X_t)_{t\geq 0} \tag{2.18}$$

H es llamado el exponente de autosimiliraridad del proceso X. Recordemos que un proceso auto-similar no es estacionario, la ecuación anterior no es aplicable para un proceso auto-similar. En 1968 Mandelbrôt y Van Ness [18] obtuvieron el nexo entre un proceso autosimilar y uno de larga dependencia en series de tiempo estacionarias, a través de *Ruido Fraccional Gaussiano* (fGn), calcularon la densidad espectral $f(\lambda) \sim c_H|\lambda|^{1-2H}(1/2 < H < 1)$, con un polo integrable en el origen, dando la noción de *ruido* $\frac{1}{f}$. El ruido fraccional browniano es un ejemplo típico de auto-similitud donde los incrementos presentan LRD. Un movimiento

fraccional Browniano con un exponente de auto-similitud H$\epsilon[0,1]$, es un proceso Gaussiano real centrado con incrementos estacionarios $(B_t^H)_{t\geq 0}$ con una función de covarianza que va como:

$$cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) \tag{2.19}$$

para *H=1/2* tenemos un movimiento browniano, cuando $H \neq 0$, la covarianza de los incrementos decae muy lentamente, como la potencia del retardo; para $H > 1/2$ sugiere larga dependencia en los incrementos.[18] , [19]

Un proceso con Larga Dependencia tiene las siguientes caracteristicas[20]:

1. Hay períodos relativamente largos en los cuales las observaciones tienden a mantenerse altas y períodos largos con niveles bajos.

2. Cuando se miran períodos de tiempo cortos se observan ciclos o tendencias locales. Sin embargo al mirar toda la serie, no hay ciclos o tendencias aparentes. Pareciera que los ciclos se producen en casi todas las frecuencias, superpuestos y de manera aleatoria.

3. La serie parece estacionaria.

4. La varianza de la media muestral parece decaer a cero a una tasa menor que *1/n*, donde n es el tamaño de la muestra.

5. La autocorrelación de la muestra decae a cero a una tasa que es aproximadamente proporcional a k^a para algún $0 > a > 1$, donde k es el *lag* o el retardo.

Valores típicos del exponente H:

- Muchos procesos en la naturaleza tienen un valor cerca de H=0.73
- Un proceso exactamente autosimilar tiene un valor de H=1.
- Cualquier proceso enteramente aleatorio tiene un H=0.5

2.7.1. Estimadores de H

Muchos investigadores tienen como expectativa identificar y usar LRD en sus análisis y simulaciones, surgen entonces interrogantes acerca de los posibles cálculos relacionados con

procesos de larga dependencia, no existe una forma determinada o sistemática de calcular larga dependencia. La manera más usual de cuantificar LRD es a través del *exponente de Hurst*, el cual es un valor entero, un escalar, este exponente no se puede calcular sino estimar, existen diferentes métodos para estimar Hurst sin embargo, no está definido que estimador da el mejor resultado y como consecuencia no existe un punto de partida común a usar. Mencionamos a continuación los estimadores usados para estimar el exponente de Hurst, la descripción de todos los métodos fueron extraídos de [22].

Varianza Agregada Considere la siguiente ecuación de series agregadas obtenida dividiendo la serie dada de longitud N en bloques de longitud m y promediando la serie de cada bloque.

$$X^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} X_i, \ k = 1, 2, ...[N/m] \tag{2.20}$$

Se calcula la varianza de la muestra:

$$\widehat{Var} X^{(m)} = \frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} (X^{(m)}(k) - \overline{X})^2 \tag{2.21}$$

La serie $X^{(m)}(k)$ escala como m^{H-1}, si es Gaussiana o al menos posee varianza finita, la varianza muestreada será asintóticamente proporcional a m^{2H-2} para longitudes largas de N/m y m.

Para sucesivos valores de m, la varianza de la series agregadas es graficada con respecto a m en escala logarítmica, el resultado esperado debe ser una línea recta con pendiente igual a *2H-2*. En la practica, la pendiente es calculada ajustando una recta por mínimos cuadrados con los puntos del gráfico, se asume que N/m y m son lo suficientemente largos, esto asegura que la longitud de cada bloque y el número de cada bloque es larga. Si la serie no posee larga dependencia o varianza finita, entonces **H=0.5** y la pendiente de la recta ajustada será igual a -1.

Momentos Absolutos Considere la siguiente ecuación de series agregadas obtenida dividiendo la serie (que se asume es ruido Gaussiano fraccional o fGn) de longitud *N*.

$$X^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \tag{2.22}$$

Se toma el n-ésimo momento de esta serie.

$$AM_n^{(m)} = \frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} |X^{(m)}(k) - \overline{X}|^n \tag{2.23}$$

Donde $X^{(m)}$ y $\overline{X}$ es la media sobre toda la serie. La serie agregada $X^{(m)}$ se comporta asintóticamente como $Cm^{n(H-1)}$ para m largos, de esta manera $AM_n^{(m)}$ es proporcional a $Cm^{n(H-1)}$.

Este método es usado para *n=1*, o primer momento, para *n=2* tenemos el método anterior, varianza agregada. Para sucesivos valores de m, los momentos absolutos de la serie agregada es graficada con respecto a m en escala logarítmica. El resultado esperado es un línea recta con pendiente *n(H-1)*. En la practica la pendiente es calculada ajustando una recta por mínimos cuadrados con los puntos del gráfico, se asume que *N/m* y m son lo suficientemente largos, esto asegura que la longitud de cada bloque y el número de cada bloque es larga. Si la serie no posee larga dependencia o varianza finita, entonces **H=0.5** y la pendiente de la recta ajustada será igual a *n/2*.

Periodograma Un periodograma se define como:

$$I(\nu) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{j=1}^{N} X(j) e^{ij\nu} \right|^2 \tag{2.24}$$

donde ν es la frecuencia , N la longitud de las series, y X las series de tiempo. En caso de varianza finita, $I\nu$ es un estimador de la densidad espectral de X, las series de tiempo con larga dependencia tendrá densidad espectral proporcional a $|\nu|^{1-2H}$ para frecuencias cerca del origen. Se espera un gráfico log-log del periodograma vs. la frecuencia que muestre una línea recta con pendiente igual a *1-2H*, en la práctica se usa solo el 10 % de las frecuencias

mas bajas para realizar el calculo, ya que el comportamiento antes descrito solo se observa en frecuencias cercanas a cero.

Varianza Residual La serie se divide en bloques de tamaño m, dentro de cada bloque se calcula la suma parcial de la serie $Y(t) = \sum_{i=1}^{t} X_i$. Una línea de mínimos cuadrados es ajustada, $a+bt$, es ajustada a las sumas parciales de cada bloque y la varianza residual de las muestras es calculada

$$\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}(Y(t) - a - bt)^2 \tag{2.25}$$

la varianza de los residuos es proporcional a m^{2H}, ésta es calculada para cada bloque. Un gráfico log-log de la varianza residual vs. m seguirá una línea recta con pendiente *2H*.

Cociente de Varianza Residual Este método está basado en el anterior, la serie de tiempo original con longitud N se divide en bloques de tamaño m , luego en cada bloque se calcula la suma parcial de la serie, la suma parcial de cada bloque son llamadas *Y(i),i=1,2...,m.* Una línea ajustada por mínimos cuadrados es ajustada a *Y(i)* y la varianza residual de las muestras es calculada, se repite este procedimiento para cada bloque, resulta entonces una aproximación estimada *N/m* de la varianza de los residuos. Taqqu y Teverosvky [21] muestran que para varianzas finitas en series de larga dependencia con un parámetro de escalamiento **H**, la varianza residual escala como m^{2H} y m tiende a infinito.

Para obtener una estimación de varianza residual, se toma la media de los *N/m* estimados. La media se comporta como la estimación original, al menos en términos de escala, este quiere decir que la varianza residual escala como m^{2H}. De manera alternativa se puede tomar de igual manera la media de los *N/m* estimados. A partir de que la varianza de la muestras envuelve a los cuadrados de la serie de tiempo original, el comportamiento de la media de la serie original es contrario a lo que pudiese pensar en un primer momento cuando aparecen series de varianza infinita. El cuadrado de la variable aleatoria con el parámetro de cola pesada (heavy tail) α se comporta como una variable aleatoria con el parámetro de cola pesada $\alpha/2 < 1$, de esta manera si se toma el promedio sobre los resultados *N/m* tenemos un

escalamiento adicional de $(m/N)^{1-2/\alpha}$, N es un valor que no cambia, así que la observación se concentrará en m. Como las varianzas escalan como $m^{2H} = m^{2d+2/\alpha}$ y desde que el promedio introduce un nuevo factor $(m/N)^{1-2/\alpha}$, el promedio de las muestras de varianza residual escalarán como $(m)^{2d+1}$. Un gráfico log-log de las muestras de varianza residual vs. m tiene entonces a una línea recta con pendiente *2H* o *2d +1* para fGn o ruido del tipo FARIMA respectivamente.

R/S Este es uno de los métodos mejor conocidos, discutido en detalle en Maldenbrôt y Wallis [15] y Maldenbrôt y Taqqu [23]. Para una serie de tiempo $X = X_i, i \geq 1$, con la suma parcial $Y(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$, y una varianza muestral

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}Y(n)^2 \tag{2.26}$$

El rango reescalado o cálculo R/S es:

$$\frac{R}{S}(n) = \frac{1}{S(n)}\left[\max_{0\leq t\leq n}\left(Y(t) - \frac{t}{n}Y(n)\right) - \min_{0\leq t\leq n}\left(Y(t) - \frac{t}{n}Y(n)\right)\right] \tag{2.27}$$

Para ruido gaussiano fraccional

$$E[R/S(n)] \sim C_H n^H \tag{2.28}$$

cuando $n \to \infty$, y C_h es un valor constante positivo que no depende de n.

Para determinar H usando el cálculo R/S, se procede de la siguiente manera: Una serie de longitud N, se subdivide en bloques de tamaño K, cada bloque de tamaño N/K, luego para cada retardo n se calcula $R(k_i, n)/S(k_i, n)$, comenzando por lo puntos $K_i = iN/K + 1, i = 1, 2, ...$, tal que $K_i + n \leq N$. Para valores de n más pequeños que N/K, se obtiene K diferentes estimaciones de $R(s)/S(s)$. Para valores de n cercanos a N, se obtienes unos pocos valores, tan pocos como cuando $n \geq N - N/K$.

Se escoge un espaciado logarítmico de los valores de n, se grafica $logR[(k_i, n)/S(k_i, n)]$ vs. $log[n]$, y se obtiene para cada n varios puntos en el gráfico, gráfico como este es usual-

mente llamado Gráfico Pox. El parámetro H puede ser estimado ajustando una línea a los puntos de gráfico Pox. Existe una zona de transición, en los puntos bajos del gráfico, de la serie para dependencia de corto rango, se procede entonces a realizar un punto de corte y los puntos antes mencionados no se usan para estimar H, también existe puntos problemas en los punto altos de gráfico, igualmente se realiza un punto de corte para esa parte del gráfico; así tenemos dos cortes, uno superior y otro inferior, la línea a ajustar será aquella que pase entre estos dos cortes, la pendiente de la recta será el valor estimado de H.

Aproximación de Whittle El estimador de Whittle es el valor del vector η que minimiza la función.

$$Q(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} fracI(\nu) f(\nu;\eta) d\nu + \int_{-\pi}^{\pi} log f(\nu;\eta) d\nu \tag{2.29}$$

El término $\int_{-\pi}^{\pi} log f(\nu;\eta) d\nu$, puede considerarse cero renormalizando $f(\nu;\eta)$. La normalización sólo depende del parámetro de escala, y no del resto de los componentes de ν. Así, se reemplaza f por f^*, tal que $f^* = \beta f$ y $\int_{-\pi}^{\pi} log f(\nu;\eta) d\nu = 0$. El primer término en (2.29) se mantiene excepto que ahora se dividirá por β, β se considera como un parámetro extra que no afecta la estimación. A partir que β no depende de otros parámetros, la minimización de Q no se verá afectada. En aplicaciones actuales, en lugar de la integral, se calcula la correspondiente suma de la frecuencias de Fourier, $\nu_j = 2\pi j/N$ donde j=1,2,...[(N-1)/2] y N es la longitud de la serie. La función minimizada queda como:

$$Q^*(\nu) = \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} \frac{I(\nu)}{f^*(\nu;\eta)} \tag{2.30}$$

Cuando se trata de ruido Gaussiano fraccional ν es el parámetro H, si se trata de ruido del tipo FARIMA ν es el parámetro d.

Adicionalmente en este método puede estimar un valor más robusto a través del **Estimador Whittle Agregado**, puede ser usado cuando las series de tiempo son lo suficiente-

mente largas. La idea es de agregar data, los cuales crean nuevas series cortas.

$$X_m^i = \frac{1}{m} \sum_{j=m(i+1)+1}^{mi} X_j \tag{2.31}$$

Las series cortas incrementan la desviación estándar del estimador, si el nivel de agregación m es lo suficientemente alto y existe larga dependencia, las nuevas series estarán cerca del ruido Gaussiano fraccional.

Whittle Local El estimador de Whittle es semi-paramétrico, sólo especifica la forma paramétrica de la densidad espectral cuando ν está cerca de cero.

$$f(\nu) \sim G(H)|\nu|^{1-2H} \qquad \nu \to 0 \tag{2.32}$$

El estimador de Whittle local está además basado en el periodograma. Se introduce un nuevo parámetro m, el cual es entero menor que $N/2$ y satisface que, cuando $N \to \infty$, $\frac{1}{m} + \frac{m}{N} \to 0$. Cuando la densidad espectral satisface (2.32), la función análoga discreta de Q en el estimador de Whittle es:

$$G(G, H) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{I(\nu_j)}{G\nu_j^{1-2H}} \right) \tag{2.33}$$

donde $\nu = 2\pi j/N$. Hasta ahora se observan dos diferencias con el estimador de Whittle.

- Las frecuencias están integradas (sumadas) hasta $2\pi m/N$, no hasta $2\pi[(N-1)/2]/N$.
- La densidad espectral f es reemplazada por su forma asintótica (2.32).

Reemplazando en (2.33) la constante G por $\hat{G} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{I(\nu_j)}{\nu_j^{1-2H}}$, se obtiene:

$$R(H) = Q(\hat{G}, H) - 1 = log\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{i(\nu_j)}{\nu_j^{1-2H}} \right) - (2H-1) \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} log(\nu_j) \tag{2.34}$$

El método que mejor funcione depende esencialmente de que tan conocidos son los datos de la serie, si la serie conocida es fGn, entonces seguramente el estimador de Whittle da

el menor error. Data real uso [24] y concluyó que existe la necesidad de ser sumamente cuidadoso usando estos estimadores, por lo general es necesario examinar el periodograma u otra representación gráfica de la data para descubrir cualquier estructura oculta de la serie

2.8. Movimiento Browniano

El **movimiento browniano** es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas nanoscópicas que se hallan en un medio fluido (Fig.2.12).El movimiento aleatorio de éstas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por las moléculas del fluido sometidas a una agitación térmica. Este bombardeo a escala atómica no es siempre completamente uniforme y sufre variaciones estadísticas importantes. Así la presión ejercida sobre los lados puede variar ligeramente con el tiempo provocando el movimiento observado.Tanto la difusión como la ósmosis son fenómenos basados en el movimiento browniano.

Otra definición sería que el movimiento browniano es una sucesión de pequeños desplazamientos en cualquier dirección sin ninguna norma, es decir, se trata de un movimiento caótico que puede estudiarse como un fractal estadístico.

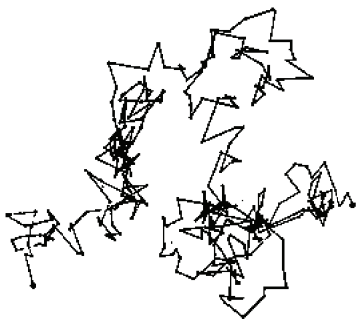


Figura 2.12: **Registro de movimiento browniano. Extraído del libro "Les Atomes"**

Robert Brown,un botánico inglés, tuvo una serie de experiencias durante el año 1827, en las que observó el movimiento de partículas de polen en agua. En 1785, el mismo fenómeno había sido descrito por Jan Ingenhousz sobre partículas de carbón en alcohol. [25], El primer estudio matemático del movimiento browniano (como proceso estadístico, no específicamente

como la danza de los granos del polen) fue realizado por Louis Bachelier en 1900 en su tesis doctoral "Theorie de la speculation", un modelo matemático de la bolsa .

En 1905 Albert Einstein explicó el fenómeno del movimiento browniano; él mostró que el desplazamiento *B(t)*, desde el origen hasta un tiempo t, de una partícula con movimiento browniano tiene una función de probabilidad Gaussiana con media cero y varianza *2Dt*, donde D es el coeficiente de difusión del medio.

En [26], un modelo del movimiento browniano es determinado por una partícula que experimenta una caminata aleatoria. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ independientes y variables aleatorias idénticamente distribuidas con media E[X]=0 y varianza finita $E[X^2]$. La suma B(n)=$X_1 + X_2 + ... + X_n$, representa un desplazamiento desde la posición inicial de una partícula bajo una caminata aleatoria en línea recta. Después de n pasos el desplazamiento total *B(n)* tiene una media dada por:

$$E[B(n)] = 0 \tag{2.35}$$

y una varianza dada por:

$$E[B^2(n)] = nE[X^2] \tag{2.36}$$

De esta manera, si X tiene varianza igual a uno, podemos decir que la principal propiedad del movimiento Browniano es que para cada $\epsilon > 0$, la secuencia de incrementos $B(t+\epsilon)-B(t)$, con t múltiplo de ϵ, es una secuencia de variables aleatorias Gaussianas con media=0 y varianza=ϵ. Esta secuencia es llamada Ruido Blanco Gaussiano discreto en tiempo. Se puede escribir entonces para una caminata aleatoria.

$$B(t) = \int_{-\infty}^{t} X(\nu)\, d\nu \tag{2.37}$$

y el ruido blanco deriva del movimiento browniano.

El movimiento browniano es autosimilar y satisface la ley $r^{1/2}$. Esto significa que si se define una nueva escala de tiempo a través de un radio r tal que el nuevo tiempo u y el tiempo anterior a este t estén relacionados como t=ru, entonces las funciones

$$B(t) - B(0) = B(ru) - B(0) \tag{2.38}$$

y

$$[B(u) - B(0)]r^{0,5} \tag{2.39}$$

son generadas bajo el mismo proceso probabilístico. Autosimilaridad implica que la varianza de $[B(t+u)-B(t)]/\sqrt{r}$ sea igual a 1 y entonces la desviación estándar de $[B(t+u)-B(t)] = \sqrt{r}$ para cada t y r. Autosimilaridad también implica que el valor esperado del rango ajustado es:

$$E[R^*(r)] = Kr^{0,5} \tag{2.40}$$

con K como constante.

Según el modelo de Einstein, la partícula browniana ejecuta un movimiento libre (Movimiento Rectilíneo Uniforme MRU) hasta que comienza a chocar contra las moléculas de agua. Entre 1908 y 1911 Jean Perrin demostró experimentalmente que esas curvas tenían lugar, dando una confirmación experimental de la naturaleza atómica de la materia. Por este trabajo, Perrin recibió el premio Nobel en 1926.

El movimiento browniano describe una curva que, es continua en todos los puntos y al mismo tiempo no es diferenciable en ningún punto. La autosimilitud interna no es, en este caso, de tipo geométrico sino estadístico. Una particularidad muy interesante del movimiento browniano es que se trata de una curva que rellena una superficie.

2.8.1. Caminata aleatoria

Una caminata aleatoria, o al azar (random walk) es una formalidad en Matemática, Física, Computación, que se refiere a la idea intuitiva de tomar sucesivos pasos, cada uno en direc-

ción aleatoria.

La caminata al azar mas simple es una trayectoria donde:

- Existe un punto de partida.
- La distancia de un punto al otro dentro de la misma trayectoria es constante.
- La dirección entre un punto y otro en la misma trayectoria es elegido de manera aleatoria,todas las direcciones tienen la misma probabilidad.

El movimiento browniano en varias dimensiones es el límite del escalamiento de la caminata al azar en el mismo número de dimensiones . Esto significa que al tomar una caminata al azar con pasos muy pequeños se obtiene una aproximación al movimiento browniano. Es decir, si el paso es de tamaño ϵ, se necesita hacer un camino de longitud L/ϵ^2, para una aproximación a un movimiento browniano de longitud L.

2.9. Movimiento Browniano Fraccional o fBm

El modelo matemático más útil de fractales aleatorios en la naturaleza ha sido el movimiento Browniano fraccional de Maldenbrôt y Van Ness, el cual es un extensión del movimiento browniano o caminata aleatoria. La mayoría de las simulaciones gráficas están basadas en el fBm, además el comportamiento de escala de este tipo de ruido es caracterizado por el parámetro H, de forma simple, la generalización del parámetro H dentro del rango $0 < H < 1$, es llamado *ruido Browniano fraccional* [33].

Maldenbrôt [18] explica que la principal característica de movimientos brownianos fraccionales es que el lapso de interdependencia entre los incrementos se dice es infinito. Muchas fluctuaciones en sólidos, niveles de ríos, líneas de costa, son llamadas $ruido 1/f$, debido a que su densidad espectral va como λ^{1-2H} , donde λ es la frecuencia y **H** es un número que satisface $1/2 < H < 1$ y por lo general este valor es cercano a cero, una de las características más resaltantes de este tipo de ruido es su comportamiento de baja-frecuencia donde se concentra la mayor potencia del espectro. Según Maldenbrôt [18] el término *ruido 1/f* es difícil

de manejar por lo que propone el término *ruido fraccional*.

A continuación mostramos en las siguientes figuras ruidos típicos como son: el ruido blanco, ruido 1/f o ruido rosa, y la caminata aleatoria o ruido marrón.

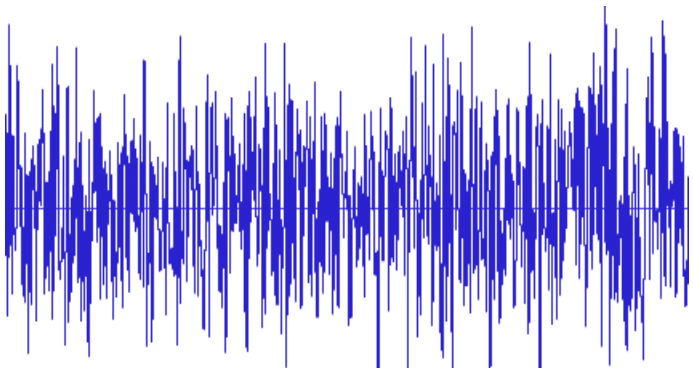


Figura 2.13: **Ruido blanco, el más aleatorio. Tomado de [34]**

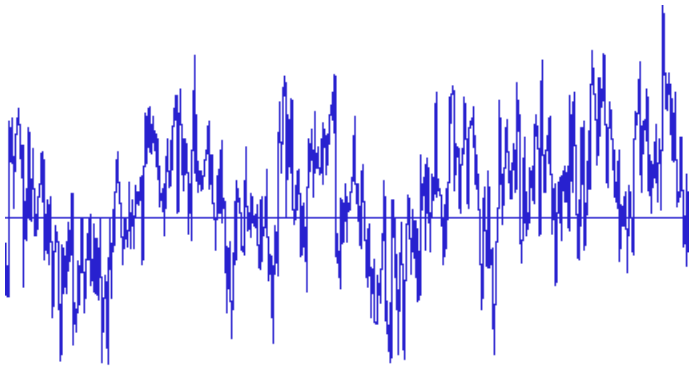


Figura 2.14: **Ruido 1/f, una forma común de fluctuación en la naturaleza, su origen aún un misterio. Tomado de [34]**

La figura 2.13 puede ser producida por un generador de números pseudo-aleatorios, su densidad espectral es una línea plana representando iguales cantidades en todas las frecuencias. La figura 2.16 muestra una caminata aleatoria, es el ruido más correlacionado de los tres ejemplos, consiste en su mayoría de bajas frecuencias o fluctuaciones lentas, y su densidad espectral es bastante empinada y varia como $1/f^2$. Formalmente el movimiento Browniano es la integral del ruido blanco. La figura 2.14 es un tipo de ruido intermedio conocido como $1/f$ debido a la forma de su densidad espectral, en general el término $1/f$ es aplicado a cualquier cantidad $B(t)$ que posea fluctuaciones y la densidad espectral $S_B(f)$ varíe como $1/f^\beta$ donde

Figura 2.15: **Caminata aleatoria, Movimiento browniano o ruido marrón. Tomado de [34]**

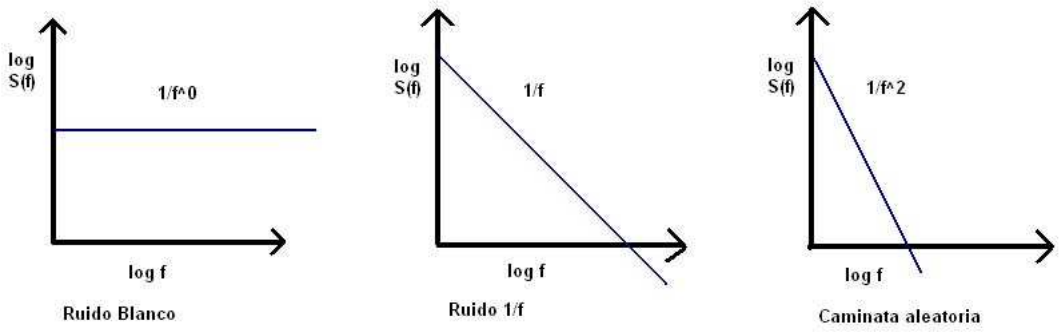


Figura 2.16: **Representación de las densidades espectrales. Tomado de [33]. Modificado por Cindy Herrera**

$0{,}5 < \beta < 1{,}5$.

El movimiento fraccional browniano o fBm por su siglas en inglés, posee las siguientes características [27]:

1. Es un proceso Gaussiano con media igual a cero.
2. La función de covarianza es $EX^2(t) = \sigma^2|t|^{2H}$, para valores de varianza $\sigma > 0$ y $0 < H < 1$
3. Tiene incrementos estacionarios y es autosimilar

Maldenbrôt y Van Ness [18] definieron el fBm como un movimiento promedio de un ruido blanco en tiempo pasado.

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H+0{,}5)}\left\{\int_{-\infty}^{0}[(t-u)^{H-0,5} - (u)^{H-0,5}]dB(u) + \int_0^t (t-u)^{H-0,5}dB(u)\right\} \tag{2.41}$$

donde *dB(u)* es ruido blanco o un incremento infinitesimal de un movimiento browniano ordinario. $B_H(0)$ es el valor inicial del proceso y quizás un número real arbitrario, éste proceso tiene la propiedad de ser autosimilar, que hace:

$$B_H(t) - B_H(0) \tag{2.42}$$

y

$$T^{-H}[B_H(tT) - B_H(0)] \tag{2.43}$$

un proceso aleatorio con el mismo comportamiento probabilístico.

La varianza del movimiento fraccional browniano es análogamente dada por:

$$var[B_H(t-T) - B_H(t)] = T^{2H}V_H \tag{2.44}$$

donde V_H es la varianza de los incrementos unitarios del fBm. Se obtiene una expresión similar a (2.40):

$$E[R^*(T)] = bT^H \qquad 0 < H < 1 \tag{2.45}$$

representaciones continuas de los incrementos del fBm son necesarias a través de su derivada, sin embargo el movimiento browniano fraccional no posee derivada.

La trayectoria del fBm es no diferenciable y continua. Dependiendo del valor del valor de **H**, se definen tres clases:

- *Anti-persistencia,* $0 < H < 1/2$: La correlación es negativa; una tendencia creciente en el pasado implica una tendencia decreciente en el futuro, para el caso contrario una tendencia decreciente en el pasado implica una tendencia creciente en el futuro. La correlación negativa permite modelar fenómenos que fluctuen fuertemente alrededor de la media. La intensidad de este comportamiento dependerá de qué tan cercano sea el

valor de H a cero.

- *Aleatorio,* $H = 1/2$: No hay correlación entre los incrementos de antes y después, pasado-futuro, $\rho_\tau = 0; \forall \tau \neq 0$. Este es un proceso aleatorio con incrementos independientes, es el caso especial de movimiento browniano.

- *Persistencia,* $1/2 < H < 1$: La correlación es positiva, $\rho_\tau \neq 0$, independiente de τ. Aquí si en algún tiempo pasado hubo una tendencia al aumento, entonces en el futuro se tendrá también aumento; para el caso contrario, si existe una tendencia decreciente en el pasado, en el futuro existirá también una tendencia decreciente. Adicionalmente, este tipo de procesos se llaman de memoria larga porque su función de autocovarianza no converge. La intensidad del comportamiento persistente se incrementa cuando H se aproxima a uno, este efecto de memoria de largo plazo es el que causa la apariencia de tendencias y ciclos en el proceso. Maldenbrôt llamó a éste **Efecto José** por la historia bíblica de los siete años de abundancia seguidos de los siete años de escasez [28].

Para el cálculo de la dimensión fractal de un ruido del tipo fBm se tiene que, para un plano la dimensión fractal es:

$$D = 2 - H \tag{2.46}$$

y para un paisaje fractal

$$D = 3 - H \tag{2.47}$$

Cuando una serie de tiempo tiene un valor de H diferente de 0.5 las observaciones no son independientes. Cada observación acarrea una memoria de todos los eventos que la precedieron, es decir, existe un efecto de sesgo o de memoria. Sin embargo, esta no es una memoria de corto plazo, comúnmente llamada *Markoviana*, esta memoria es distinta, es de largo plazo. Eventos más recientes tienen un impacto mayor que eventos distantes, pero estos últimos siguen influenciando el proceso [13]. Un sistema que exhibe un coeficiente de Hurst distinto a 0.5 es el resultado de una cadena de eventos interrelacionados, el tiempo tiene un papel muy importante.

El escalamiento que exhibe el fBm es autoafín, en el caso en que H=1/2 se obtiene el

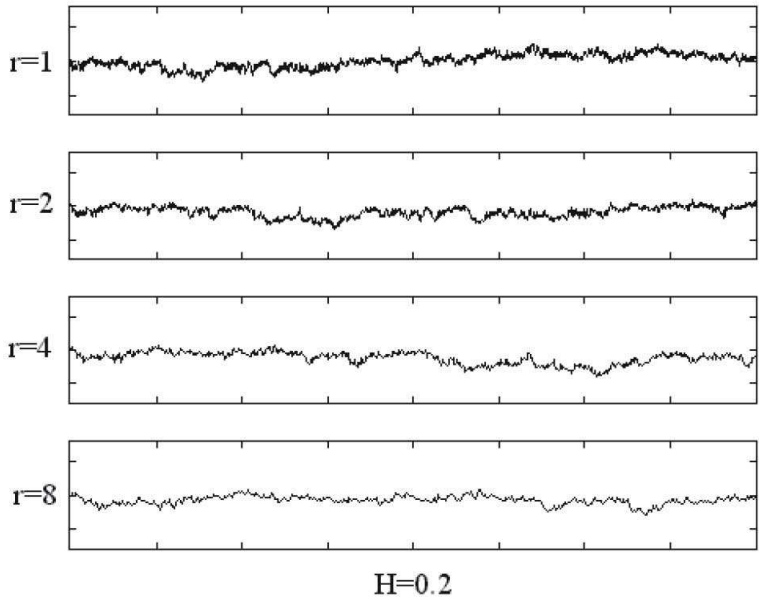


Figura 2.17: **fBm para H=0.2, con escalamiento $B_H = r^{-H} B_H$. Tomado de [29]**

movimiento browniano que es un escalamiento autosemejante o autosimilar y constituye el caso más simple de fractal aleatorio. La diferencia entre estos dos tipos de escalamiento es que, al someter a un factor de aumento (o reducción) una porción del objeto, las formas serán idénticas si el escalamiento es autosimilar, mientras que para que las formas se mantengan idénticas si el escalamiento es autoafín, deben utilizarse factores de aumento (o reducción) en las direcciones paralelas o perpendiculares al objeto [29].

La figura (2.17) describe un fBm, la figura muestra un proceso anti-persistente con su respectiva propiedad(estadística) de escalamiento autoafín, las muestras del fBm se repiten estadísticamente sólo cuando t y $B_H(t)$ son aumentadas por cantidades diferentes, de esta manera si t se incrementa con un factor r, donde t llega a ser rt, B_H aumenta un factor como r^H, donde B_H llega a ser $r^H B_H$, en esta figura presentamos el parámetro r, introducido por Maldenbrôt, mejor conocido como *lacunaridad*, el cual produce cambios observables del fractal sin alterar el valor del exponente H o la dimensión fractal.

2.9.1. Algoritmo de Voss

R.F Voss introdujo un método llamado **adición aleatoria sucesiva** [30], el cual forma parte de una familia de modelos conocidos como **modelos cascada**, las cascadas discretas son las que exploran autoafinidad y autosemejanza para producir simulaciones de fenómenos naturales a partir de procedimientos cascada aleatorios iterativos [31]. Este algoritmo es una versión óptima del método del punto medio, el cual en teoría genera curvas de ruido browniano, sin embargo este método no cumple con la propiedad de que el fBm sea estacionario.

Definamos un fBm en una dimensión como una función aleatoria $G(x)$, con incrementos estacionarios $G(x+\tau) - G(x)$ sobre la distancia o retardo τ, tales incrementos son una distribución Gaussiana con media cero y varianza σ^2, para cualquier τ. Una distribución gaussiana cumple con ciertas propiedades como son: La suma de las N variables independientes con media cero y varianza σ^2 continua siendo una distribución Gaussiana (cumpliendo con el Teorema del Límite Central) y posee una desviación estándar que va como

$$\sigma = \left(\sum_{1}^{N} \sigma_i^2 \right)^{1/2} \tag{2.48}$$

igualmente si una Gaussiana con media cero y varianza σ^2 es multiplicada por una constante A, la distribución sigue siendo gaussiana pero con $\sigma^2 = A^2\sigma^2$, las propiedades descritas anteriormente son usadas para el desarrollo del algoritmo de **adición aleatoria sucesiva**.

La autoafinidad estadística puede ser expresada relacionando la desviación estándar con los incrementos $G(x+\tau) - G(x)$ del retardo τ, [32].

$$\sigma^2(\tau) = \sigma^2(1)\tau^{2H} \tag{2.49}$$

con H como parámetro de escalamiento, donde H es el exponente de Hurst.

Para generar fBm unidimensional,encontramos varias versiones del mismo algoritmo [16], [32], [31], ante la presencia de diferentes versiones del algoritmo logramos obtener en físico el

algoritmo del autor y su aplicación por medio del libro de Dietmar Saupe [33]. Describimos a continuación la cantidad de versiones recopiladas(3) para la generación de $2^n + 1$ puntos siendo n el máximo nivel de generación de puntos.

En [16] generaron curvas Brownianas fraccionales donde la altura o posición vertical $X(t)$ es fBm, para tal fin se requiere que la varianza de los incrementos esta dada por:

$$V(t) =< [X(t) - X(0)]^2 >= |t|^{2H}\sigma_0^2 \tag{2.50}$$

donde σ_0^2 es la varianza inicial.

En[16] comienzan con una secuencia de posiciones $X(t_1), X(t_2), ..., X(t_N)$ para tiempos $t_1, ..., t_N$, un número de puntos igual a $N = 3$ para $t_i = 0, 1/2, 1$ y las tres posiciones iniciales valen cero. Luego, las posiciones $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$ son adiciones aleatorias provenientes de una distribución normal con media cero y varianza $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 1$. Los puntos medios de los intervalos de tiempo se convierten en tiempos adicionales para los cuales las posiciones son estimadas por interpolación. Los tiempos en este momento son $t_1, ..., t_5 = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$. Todas las posiciones son adiciones aleatorios con media cero y una varianza reducida

$$\sigma_2^2 = (1/2)^{2H}\sigma_1^2 \tag{2.51}$$

Estas cinco nuevas posiciones son nuevamente interpoladas con los puntos medios para intervalos de tiempo dado por nueve posiciones en nueve tiempos. Después de n repeticiones del método, definen la posición de la partícula Browniana fraccional en $2^n + 1$ tiempos. Las posiciones son obtenidas por interpolación y adiciones aleatorias, la varianza de las adiciones en la $n - ésima$ generación es:

$$\sigma_n^2 = (1/2)^{2H}\sigma_{n-1}^2 = (1/2)^{2nH}\sigma_0^2 \tag{2.52}$$

En [33] y [35] describen el algoritmo de *adiciones aleatorias sucesivas* como sigue:

1. Si el proceso $\mathbf{Y}$ será calculado por ejemplo para t entre 0 y 1, entonces comenzar

con $Y_0 = 0$ y seleccionar Y_1 como un número pseudo-aleatorio proveniente de una distribución normal con media cero y varianza σ^2, este es $Var[Y_1 - Y_0] = \sigma_0^2$.

2. Luego para orden 1, $Y_{1/2}$ es construido por la interpolación del punto medio, $Y_{1/2} = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$.

3. Añadir un desplazamiento de varianza idónea a todos los puntos, por ejemplo $Y_0 = Y_0 + d_{1,1}$, $Y_{1/2} = Y_{1/2} + d_{1,2}$, $Y_1 = Y_1 + d_{1,3}$, esta compensación d_1 esta gobernada por un numero aleatorio normal de varianza

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^1}\right)^{2H}(1 - 2^{2H-2})\sigma_0^2 \tag{2.53}$$

donde σ_0^2 es la varianza inicial y $0 < H < 1$.

4. Los dos pasos anteriores son repetidos, por tanto

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{2H}(1 - 2^{2H-2})\sigma_0^2 \tag{2.54}$$

Liu H-H. y otros [32] garantizan que el algoritmo de adiciones aleatorias sucesivas es de la siguiente manera.

1. Se añaden números aleatorios de la distribución Gaussiana $N(0, \sigma_0^2/2)$ a los dos puntos puntos extremos iniciales, paso uno (1) (Fig. 2.18).

2. Linealmente interpolar el valor del punto medio obtenido a partir del valor de los puntos obtenidos en el paso anterior.

3. Añadir números aleatorios de la distribución Gaussiana $N(0, \sigma_1^2/2)$ al punto medio generado a partir del paso dos (2) y a los otros puntos ya existente. La varianza de la distribución Gaussiana va como:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_0^2}{2^{2H}}\left(1 - \frac{2^{2H}}{4}\right) \tag{2.55}$$

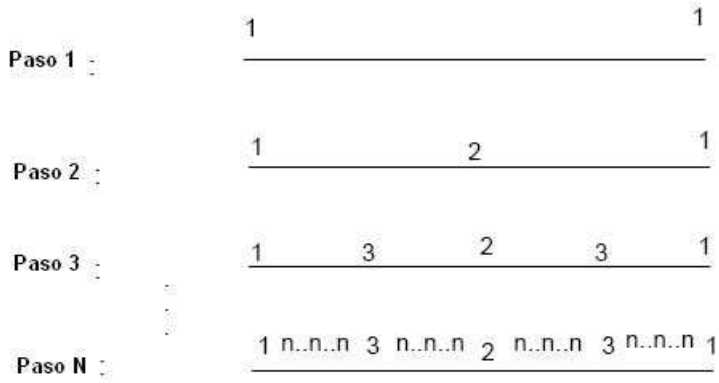


Figura 2.18: **Diagrama esquemático del algoritmo de adiciones aleatorias sucesivas. Tomado de [32]. Modificado por Cindy Herrera.**

4. Linealmente realizar la interpolación entre los tres puntos obtenidos en el paso tres (3).

5. Añadir números aleatorios a partir de la distribución Gaussiana $N(0, \sigma_2^2/2)$ a los dos puntos medios interpolados en el paso cuatro (4) y a los otros puntos ya existentes. La varianza de la distribución Gaussiana va como:

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma_1^2}{2^{2H}} = \frac{\sigma_0^2}{(2^{2H})^2}\left(1 - \frac{2^{2H}}{4}\right) \tag{2.56}$$

6. Repetiendo el mismo procedimiento, se mantienen la interpolación lineal y la adición de números aleatorios a partir de la distribución Gaussiana $N(0, \sigma_n^2/2)$ los números se agregaran hasta el nivel $n - \acute{e}simo$ en donde el número total de puntos es $2^n + 1$. La varianza en el nivel n será

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_{n-1}^2}{2^{2H}} = \frac{\sigma_0^2}{(2^{2H})^n}\left(1 - \frac{2^{2H}}{4}\right) \tag{2.57}$$

7. Aunque no se añadan nuevos números, se seguirán añadiendo números aleatorios a cada uno de los ya existentes a partir de la distribución Gaussiana $N(0, \sigma_j^2/2)$, donde la varianza es:

$$\sigma_j^2 = \frac{\sigma_{j-1}^2}{2^{2H}} = \frac{\sigma_0^2}{(2^{2H})^j}\left(1 - \frac{2^{2H}}{4}\right) \tag{2.58}$$

Al observar la Fig.2.18, claramente se puede apreciar que para el Paso 1 o Nivel 1 (n=1) no se cumple la existencia de $2^n + 1$ puntos, lo cual quiere decir que realizaron un paso más que el algoritmo de Feder, también notamos que la varianza en los dos últimos algoritmos decrece igual de rápido mientras en el de Feder decrece más lentamente con el factor $(1/2)^{2nH}$, que depende del número de niveles, y es empleado por las tres fuentes, finalmente Liu H-H. y otros añaden un paso adicional en el algoritmo el cual argumenta mejora la correlación de la serie.

Extensión 2-D del algoritmo de Voss El movimiento Browniano fraccional es un proceso multidimensional (un campo aleatorio) $X(t_1, t_2, ..., t_n)$ con las siguientes propiedades [33]:

1. Los incrementos $X(t_1, t_2, ..., t_n) - X(s_1, s_2, ..., s_n)$ son Gaussianos con media cero.

2. La varianza de los incrementos $X(t_1, t_2, ..., t_n) - X(s_1, s_2, ..., s_n$ depende únicamente de la distancia

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i - s_i)} \tag{2.59}$$

de hecho es proporcional a la $2H - ésima$ potencia la distancia, donde el parámetro H de nuevo satisface $0 < H < 1$.

El método para una dimensión puede funcionar como una red cuadrada de puntos. Si el tamaño δ de la malla indica la resolución de la cuadrícula, se obtiene otra malla cuadrada de resolución $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ por adición de puntos medios de todos los cuadrados. La orientación de los nuevos cuadrados generados están rotados 45 grados. Nuevamente añadiendo los puntos medios a todos los cuadrados se obtiene una nueva cuadrícula con la misma orientación que la primera y la resolución es ahora $\frac{\delta}{2}$. En cada etapa la resolución escala con un factor $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, y en concordancia con la ecuación 2.59, se añaden desplazamientos aleatorios usando la varianza, la cual es r^{2H} veces la varianza del paso anterior. Si se asume que la data de los vértices del cuadrado tiene varianza σ^2, entonces para niveles n se añaden variables aleatorias Gaussianas con $\sigma^2 r^{2Hn} = \sigma^2(\frac{1}{2})^{nH}$. El uso de un cuadrado no es necesario para la simulación

del fBm en 2-D, se pueden considerar subdivisiones triangulares.

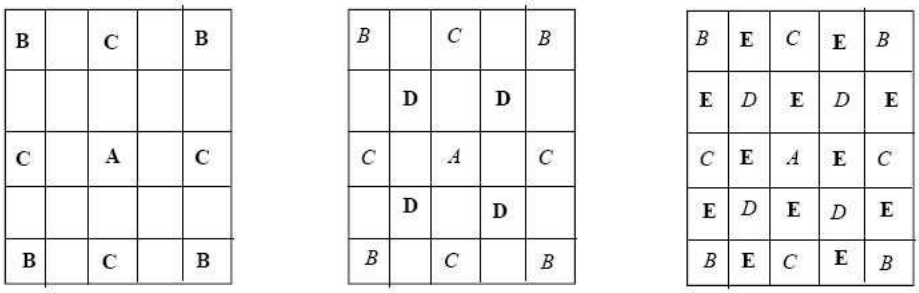


Figura 2.19: **Diagrama esquemático del algoritmo de adiciones aleatorias sucesivas en dos dimensiones. Tomado de [31].**

2.10. Ruido fraccional Gaussiano

En [18] aclaran que, el fBm no posee derivada lo cual es un inconveniente, además de esto es no diferenciable. Varios métodos han evocado el término de *"derivada del movimiento browniano"*, estas construcciones son llamadas *"Ruido Blanco Gaussiano"* aproximaciones análogas al movimiento browniano fraccional dieron cabida a lo que llaman *"Ruido Gaussiano Fraccional"* o fGn en su siglas en inglés.

La irregularidad del fBm se mantiene a medida que $t \to \infty$ y la derivada continua no definida. Se propone como solución: suavizar la función e integrar la misma sobre un intervalo arbitrariamente pequeño δ. Cuando δ es pequeño en comparación a la escala de observación, la función original y la función suavizada son indistinguibles para fines prácticos. La función suavizada implica la remoción de las variaciones de alta frecuencia del fBm y genera una función derivable que Mandelbrôt y Van Ness (1968) denominaron *"Ruido Gaussiano Fraccional"*.

La mejor manera de introducir el concepto de fGn es a partir de su antecesor el cual es, el fBm. Recordemos que el movimiento browniano fraccional es un proceso gaussiano con media cero, incrementos estacionarios. El ruido fraccional Gaussiano es el incremento de movimiento browniano fraccional. Llamemos $X_i, i \geq 1$ al fGn entonces el incremento con respecto al fBm

será:

$$X_i = B_H(i+1) - B_H, \qquad i \geq 1 \tag{2.60}$$

la función de covarianza será:

$$\gamma(h) = EX_iX_{i+h} = \frac{1}{2}[(h+1)^{2H} - 2h^{2H} + |h-1|^{2H}] \qquad h \geq 0 \tag{2.61}$$

La función de autocovarianza para un fGn discreto fue derivada por Mandelbrôt y Wallis(1969c) [15] como:

$$C(\tau, H) = \frac{1}{2}V_H[|\tau+1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau-1|^{2H}] \tag{2.62}$$

Finalmente el comportamiento del rango ajustado es controlado por el coeficiente H:

$$E[R^*(n)] = bn^H \tag{2.63}$$

Capítulo 3

Resultados: Análisis y Discusión

Para la obtención de las series de tiempo sintéticas a lo largo del desarrollo del problema se trabajó con el lenguaje de programación C++ y el compilador Borland 6.0 para Windows; luego se procedió a graficar los resultados en Easyplot y en el programa creado por Thomas Karagiannis llamado SELFIS [11] para la estimación del exponente H en 1-D.

3.1. Registros de Hurst 1-D

Se generaron series temporales simulando ruido fraccional Browniano, se utilizó el algoritmo *adiciones aleatorias sucesivas* de R.F Voss[30], las series sintéticas se generaron para varios valores de H. Al inicio de la implementación del algoritmo surgió cierta inseguridad ya que pudimos recopilar varias versiones (diferentes) del algoritmo de Voss, al presentarse esta duda se orientó la investigación en buscar la fuente proveniente directamente del autor, lo cual se logró a través del libro de Dietmar Saupe "The Science of Fractal Images" [33] en el cual Voss contribuye y dedica un capítulo al desarrollo de su algoritmo y posteriormente Saupe a partir del algoritmo de Voss ofrece una serie de códigos en lenguaje pseudoformal para la generación de fBm. Sin embargo al no existir un acuerdo entre los científicos se decidió realizar la implementación de estas tres versiones.

El algoritmo de Feder[16] fue programado en una clase en C++ y luego fue instanciado y declarado un objeto de esa clase en un archivo principal (main) y luego se emplearon varios métodos, tanto para generar la data como para calcular el exponente H a través del método empírico desarrollado por Hurst, el método R/S a pesar de ser estadísticamente el

mas inestable de todos fue el que se acoplo a nuestra serie temporal, sin embargo para corroborar la estimación del exponente H usamos el programa (gratuito) SELFIS [11] el cual descargamos de la página web de su autor Thomas Karagiannis. Recordemos que según [11], los estimadores difieren considerablemente cuando la data es sintética.

Como ya se mencionó en el capítulo anterior la naturaleza está regida en su mayoría por un valor de $H \approx 0{,}8$, es decir está regida por un concepto ya desarrollado que es Larga Dependencia, para varios valores de H inicialmente se generaron varias superficies unidimensionales a fin de comprobar que la generación de la data tenía la tendencia correcta del ruido tipo $1/f$ y además que los valores de H eran consistentes con las series temporales.

Las figuras 3.1, 3.2, 3.3, son curvas Brownianas fraccionales antipersistentes, aleatorias y persistentes para valores de H igual a 0.1, 0.5, 0.9 respectivamente. Las series sintéticas fueron generadas con el algoritmo usado por Jens Feder ([16]) en el cual la varianza de las adiciones aleatorias decrecen como:

$$\sigma_n^2 = (1/2)^{2H}\sigma_{n-1}^2 = (1/2)^{2nH}\sigma_0^2$$

En la implementación de este algoritmo se crearon una total de $2^n + 1$ puntos con $n = 10$, es decir 1025 puntos. Si se aumenta el nivel por ejemplo a $n = 15$ y se generan curvas, figura 3.4, 3.5, 3.6 con valores de H similares a las curvas anteriores, se observa la misma tendencia con comportamiento más acentuado. Se observa la tendencia de ruido $1/f$ comentado en el capítulo anterior. Todas las series unidimensionales generadas a partir de Feder fueron graficadas con el programa SELFIS.

Un obstáculo fue, el modo correcto de emplear el método R/S, existe una cantidad considerable de información sobre el tema y resultó difícil discriminar cual bibliografía ofrece la información precisa, inicialmente nos guiamos por el libro de Jens Feder [16] luego consultamos con varios artículos de series temporales en estadística aplicada conjuntamente con la red, observamos que este método de estimar larga dependencia es bastante aplicado en el

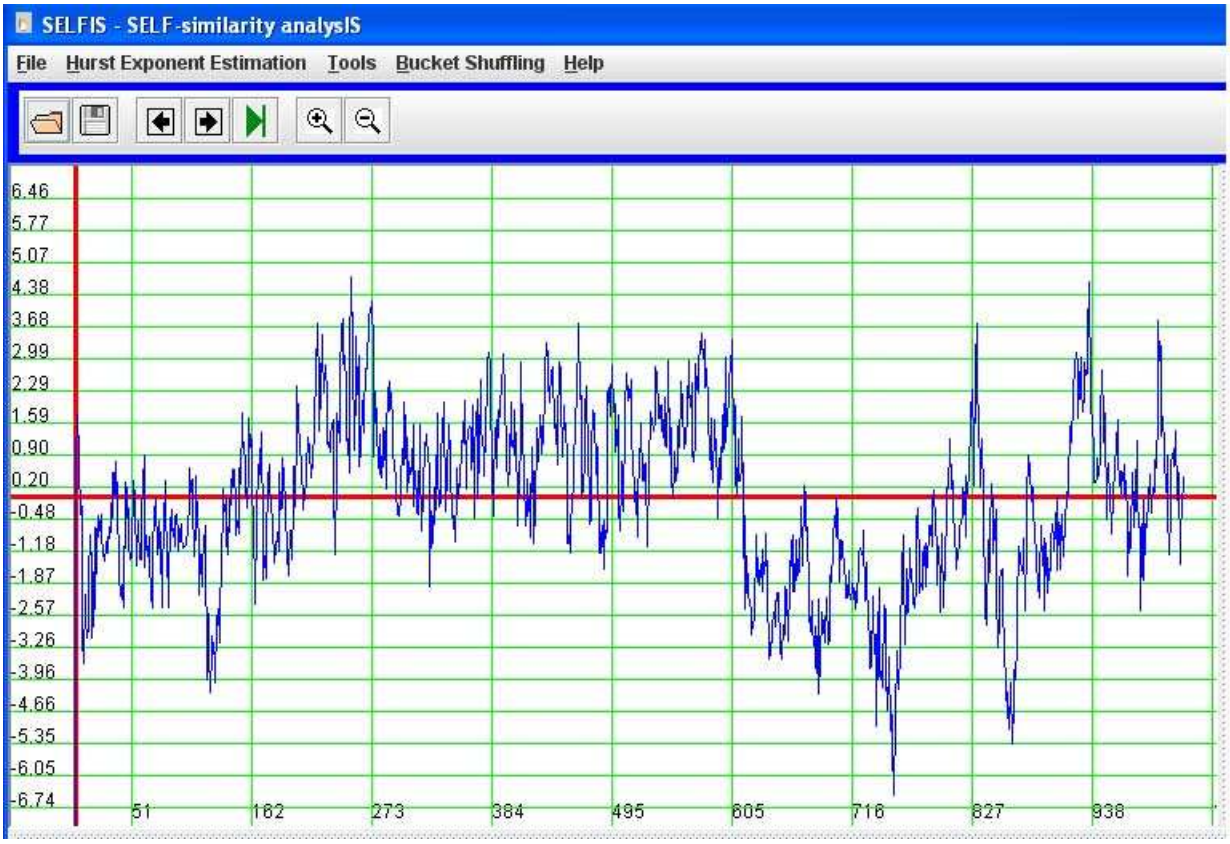


Figura 3.1: **Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional con $n = 10$, H=0.1 Antipersistencia, la dimensión fractal de la curva es $D = 2 - H$**

campo de las ciencias económicas, el problema esencial de este método es fijar el eje x, es decir el retardo o lag, concluimos que el valor de esta variable depende del número de datos que tenga la serie a medida que la misma se va dividiendo, y no como en varias referencias, las cuales se refieren al nivel de agregación u orden en que se encuentra la serie para cada partición. En relación a este inconveniente se decidió enviarle un correo electrónico a Richard Voss y Dietmar Saupe, siendo el segundo quien gentilmente contestó y nos indicó que durante su experiencia, la estimación del parámetro H con data sintética es un problema difícil de solventar, igualmente señaló que el resultado de la estimación depende de cómo se ejecute el ajuste de la recta en escala logarítmica y así la obtención de la pendiente [36]. A fin de corroborar que los estimadores difieren de forma considerable con data sintética procedimos a usar el programa SELFIS y corrimos los estimadores en el dominio del tiempo (en el dominio de la frecuencia los estimadores funcionan para series diferenciables, que no es nuestro caso), para una serie temporal generada con el algoritmo de Feder con H=0.7 y n=15, a

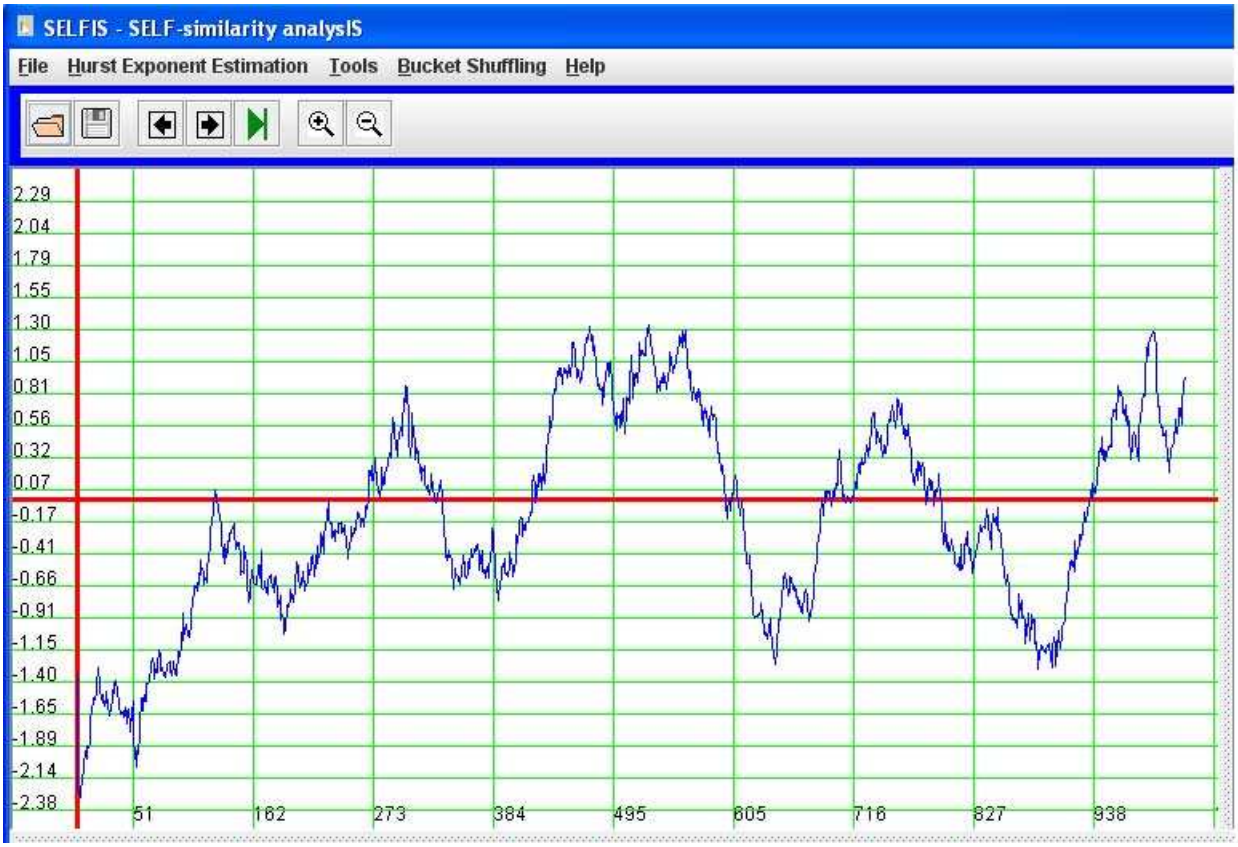


Figura 3.2: **Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional con $n = 10$, H=0.5 o caminata aleatoria, la dimensión fractal de la curva es $D = 2 - H$**

continuación los resultados en las figuras 3.7,3.8, 3.9, 3.10 demuestran que en efecto los estimadores se diferencian notablemente. Cada estimador como se describió en la parte anterior, examina una propiedad diferente de la serie de tiempo, entonces es válido pensar que estas metodologías que examinan propiedades específicas a diferentes escalas, tengan conflictos al estimar la misma serie de tiempo.

Richard Voss en una comunicación privada, tuvo el gesto de informarnos cual fue el método que empleó para estimar el coeficiente H, este investigador usó la correlación de la serie para diferentes τ vs. τ en escala logaritmica y a través de un ajuste lineal la pendiente de tal gráfico representa H, tal método fue el empleado en el desarrollo del método de Adiciones Aleatorias Sucesivas. La figura 3.11, 3.12, 3.13 muestran la medida del exponente H para antipersistencia, aleatoriedad y persistencia respectivamente, en este método el valor de H difiere muy poco del valor deseado.

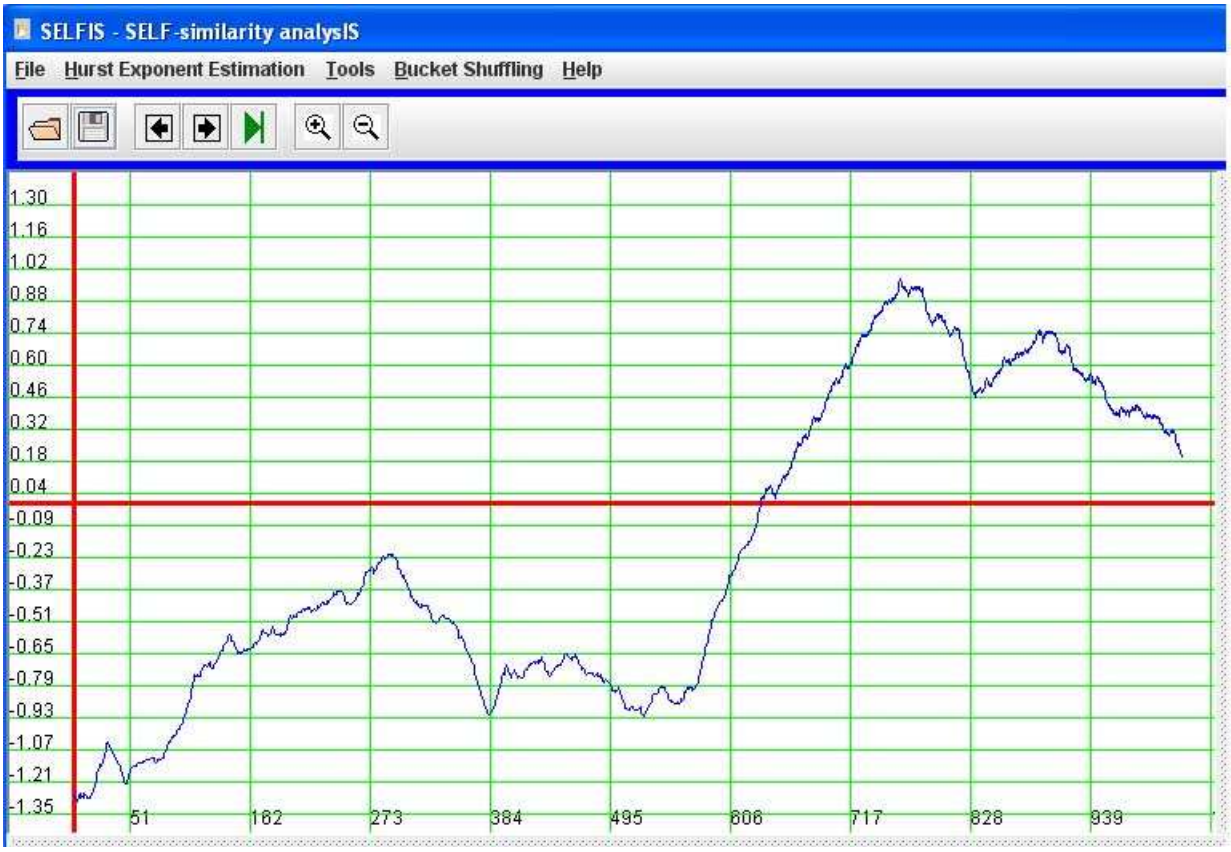


Figura 3.3: **Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional con $n = 10$, H=0.9 o Larga Dependencia, la dimensión fractal de la curva es $D = 2 - H$**

El algoritmo de **Saupe** [33], [35], genera igualmente curvas fraccionales Brownianas. Recordemos que en este caso la varianza de las adiciones aleatorias decrece mas rápido que el algoritmo de Feder:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{2H}(1 - 2^{2H-2})\sigma_0^2$$

se observa un **factor adicional**,$\frac{1}{2}(1 - 2^{2H-2})$

El algoritmo de **Liu H-H** [32] es igual al empleado por Saupe sin embargo agrega un **paso adicional** que añade mas números aleatorios a la serie generada para cierto orden n, sin embargo durante la generación de data sintética se consideró que este paso, el cual disminuye aun más la varianza del ruido generado, es útil hasta que la varianza sea al menos 10^6 veces menor al valor de la varianza para el orden n en la generación de la serie.

Ante la presencia de varios algoritmos para la generación de fBm, se decidió generar

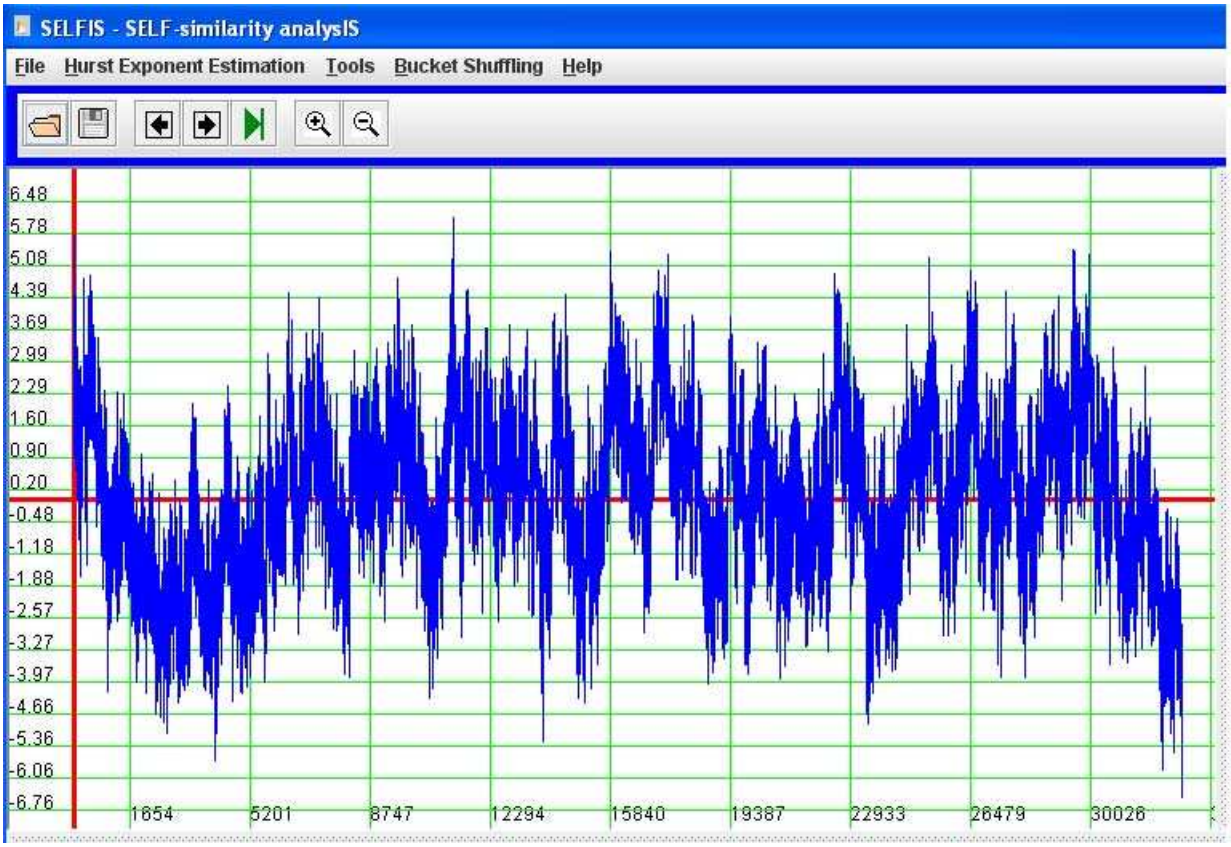


Figura 3.4: **Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional con $n = 15$ se observa que la tendencia es robusta con respecto al nivel anterior (n=10) , H=0.1 o antipersistencia, la dimensión fractal de la curva es $D = 2 - H$**

series temporales unificando los mismos usando como base el algoritmo de Feder. Richard Voss a través de una comunicación vía correo electrónico [36], tuvo el cordial gesto de revisar el algoritmo de Feder programado en C++ y le dio el visto bueno, adicionalmente este reconocido investigador realizó pruebas con el mismo quedando conforme con los resultados. A continuación se muestran los gráficos para **fBm**, la primera figura 3.14 es una serie temporal con el algoritmo de Feder, la segunda figura 3.15 es una serie temporal con el algoritmo de Feder pero esta vez se multiplica a la varianza el factor adicional del algoritmo de Saupe, la tercera figura 3.16 es una serie temporal con el algoritmo de Feder que no incluye el factor adicional de Saupe y sí el paso adicional de Liu H-H, finalmente la cuarta figura 3.17 muestra una serie temporal con el algoritmo de Feder que incluye tanto el factor adicional de Saupe como el paso adicional de Liu H-H. Todas las gráficas fueron generadas para $n = 10$ y $H = 0{,}8$ y graficadas en Easyplot. A fin de comprobar si existe alguna diferencia en la generación de la series al añadir o no pasos o factores adicionales al algoritmo, se consideró prudente asignarle

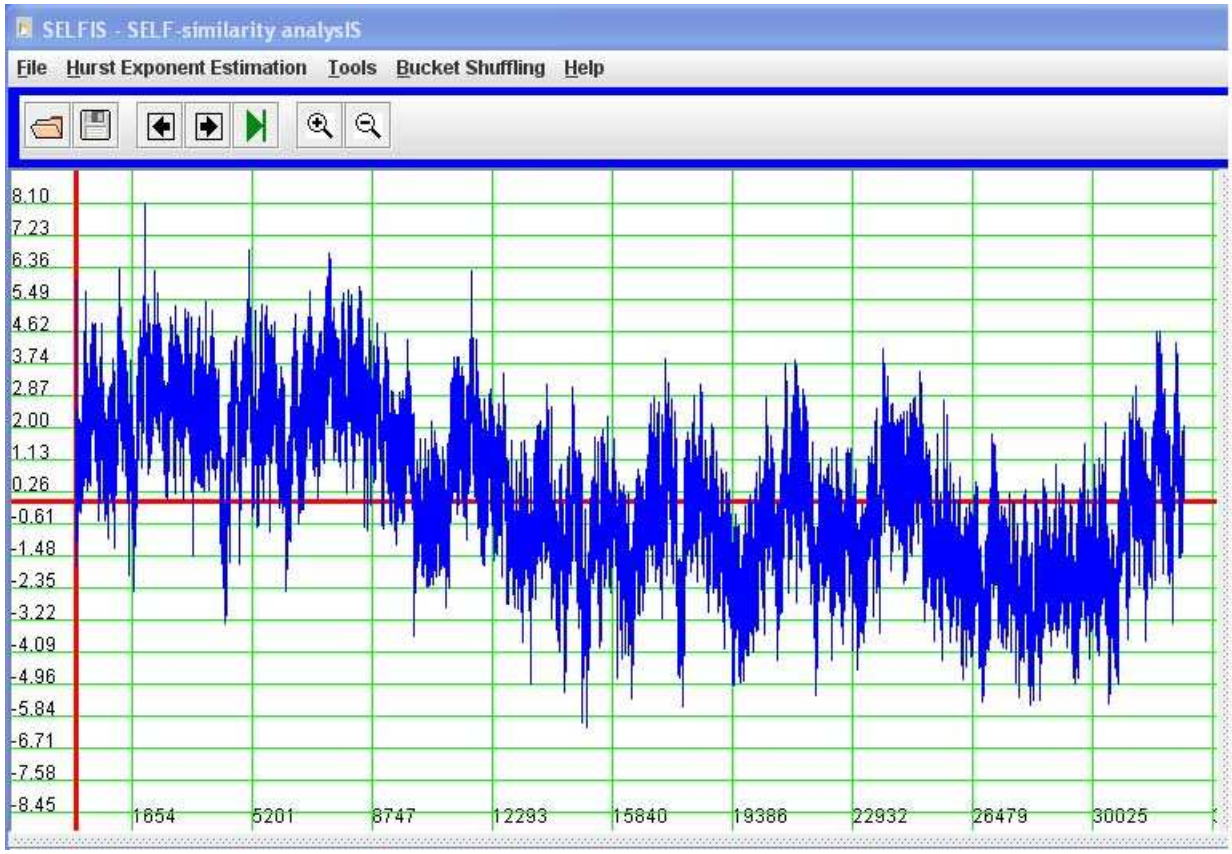


Figura 3.5: **Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional con $n = 15$ se observa que la tendencia es robusta con respecto al nivel anterior (n=10) , H=0.5 o caminata aleatoria, la dimensión fractal de la curva es $D = 2 - H$**

la misma semilla al generador de numeros aleatorios que se encarga de generar los registros de Hurst, de esta manera las cuatro series de inicializan igual. Al término de la generación de las cuatro series es evidente que la serie no cambia, se genera la misma serie para los cuatro casos posibles bajo las mismas condiciones iniciales.

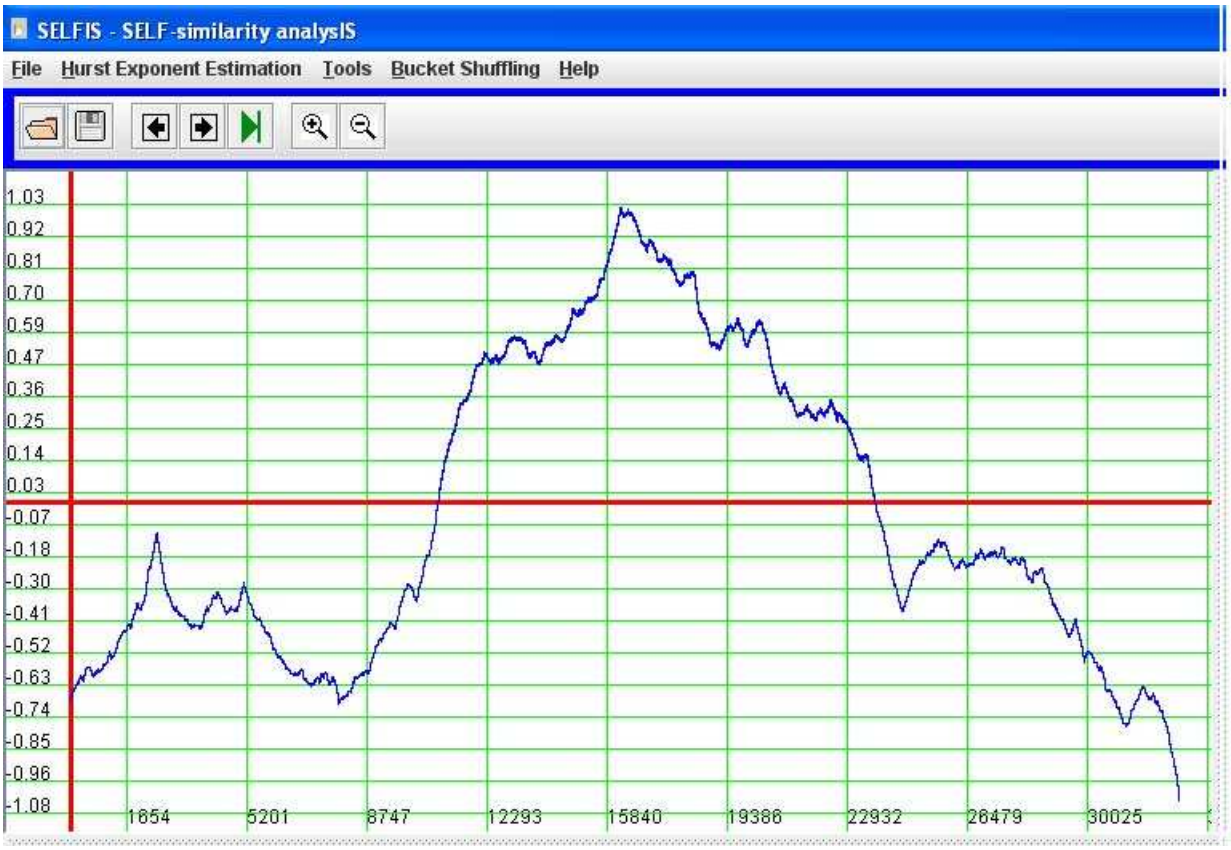


Figura 3.6: **Algoritmo de Feder, curva Browniana fraccional con $n = 15$ se observa que la tendencia es robusta con respecto al nivel anterior (n=10) , H=0.9 o Larga Dependencia, la dimensión fractal de la curva es $D = 2 - H$**

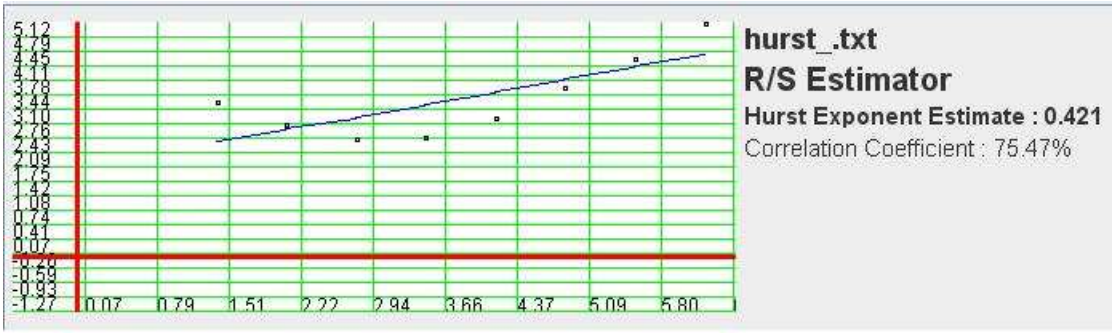


Figura 3.7: **Método R/S.Estimación de exponente de Hurst con el programa SELFIS, H=0.8,n=10.Se observa que los estimadores difieren considerablemente**

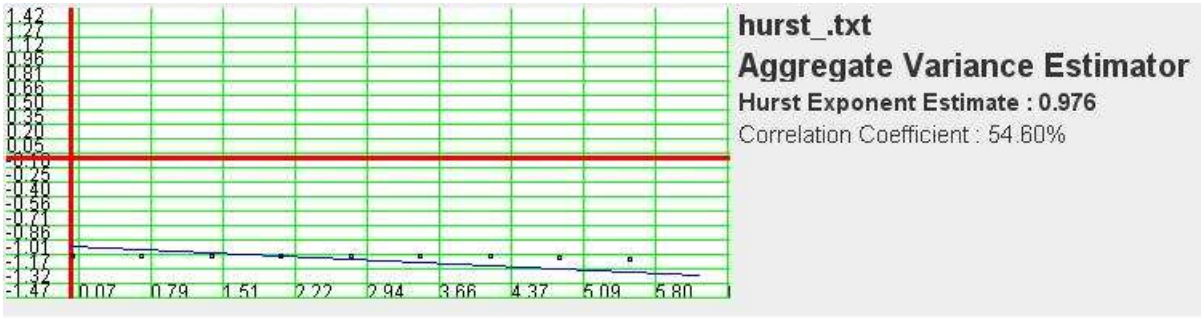


Figura 3.8: **Método de la varianza agregada.Estimación de exponente de Hurst con el programa SELFIS, H=0.8,n=12.Se observa que los estimadores difieren considerablemente**

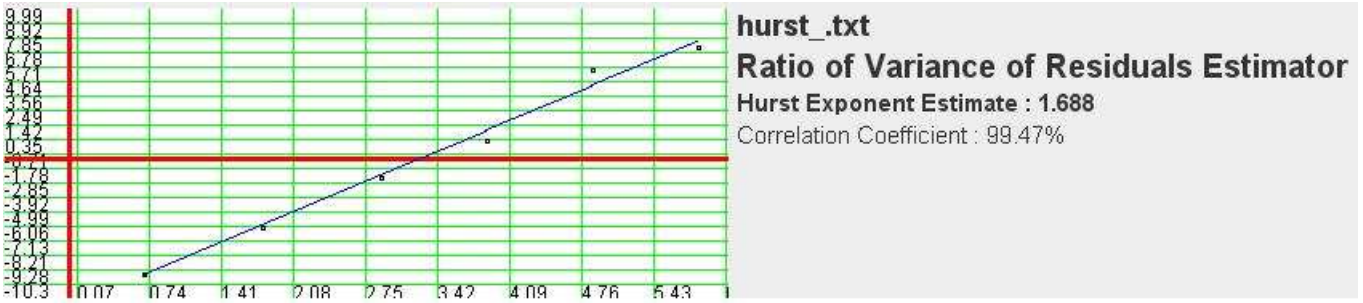


Figura 3.9: **Método de la varianza residual.Estimación de exponente de Hurst con el programa SELFIS, H=0.8,n=12.Se observa que los estimadores difieren considerablemente**

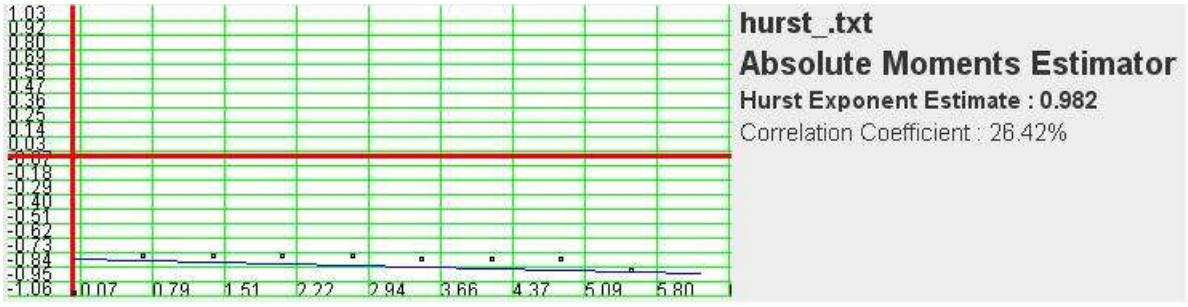


Figura 3.10: **Método de los momentos absolutos.Estimación de exponente de Hurst con el programa SELFIS, H=0.8,n=12.Se observa que los estimadores difieren considerablemente**

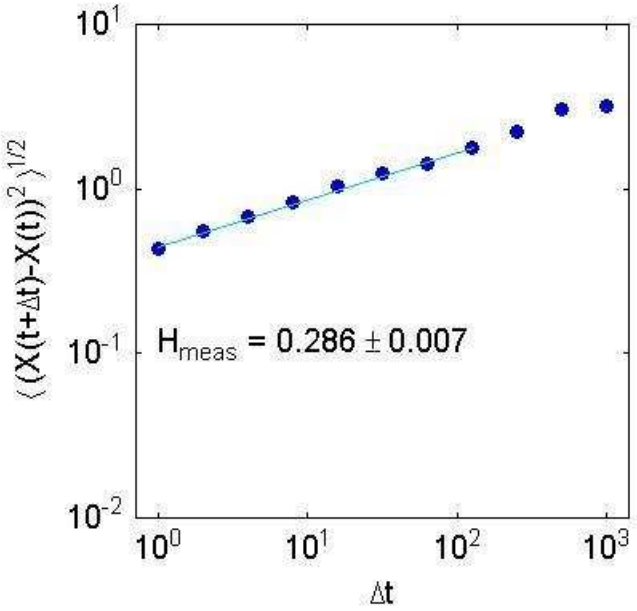


Figura 3.11: **Estimación del exponente de Hurst con el método de Richard Voss (cálculo de correlaciones)H=0.2,n=10. Se observa que el estimador difiere bastante poco**

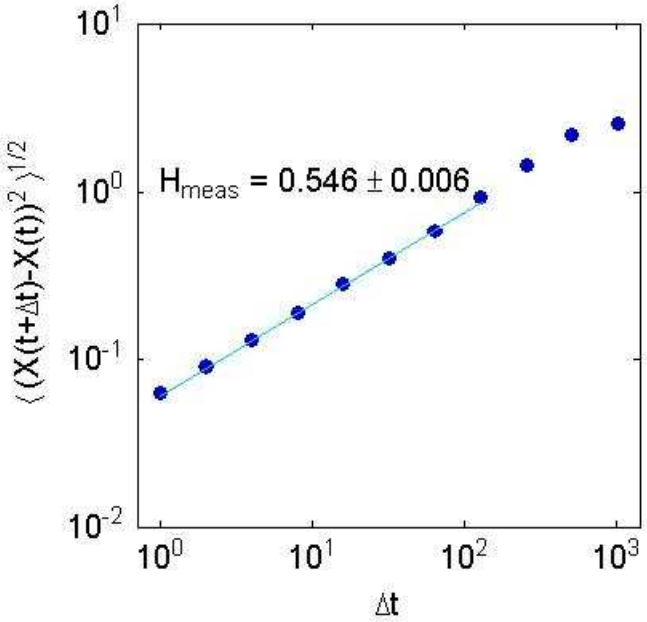


Figura 3.12: **Estimación del exponente de Hurst con el método de Richard Voss (cálculo de correlaciones)H=0.5,n=10. Se observa que el estimador difiere bastante poco**

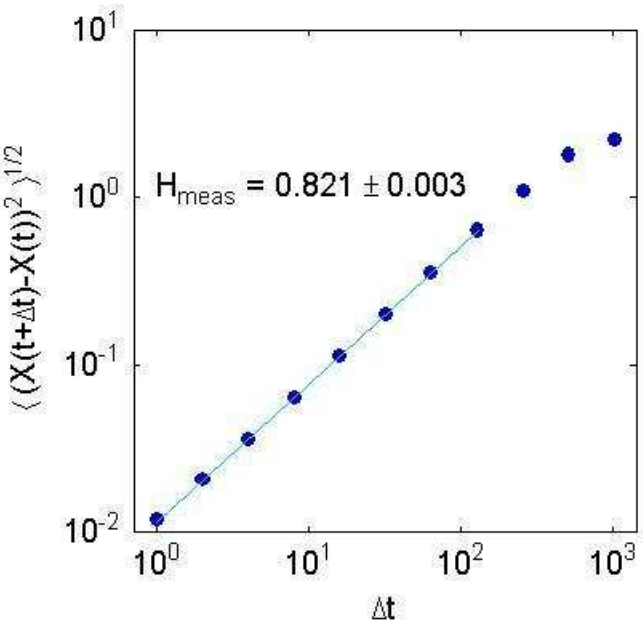


Figura 3.13: **Estimación del exponente de Hurst con el método de Richard Voss (cálculo de correlaciones)H=0.8,n=10. Se observa que el estimador difiere bastante poco**

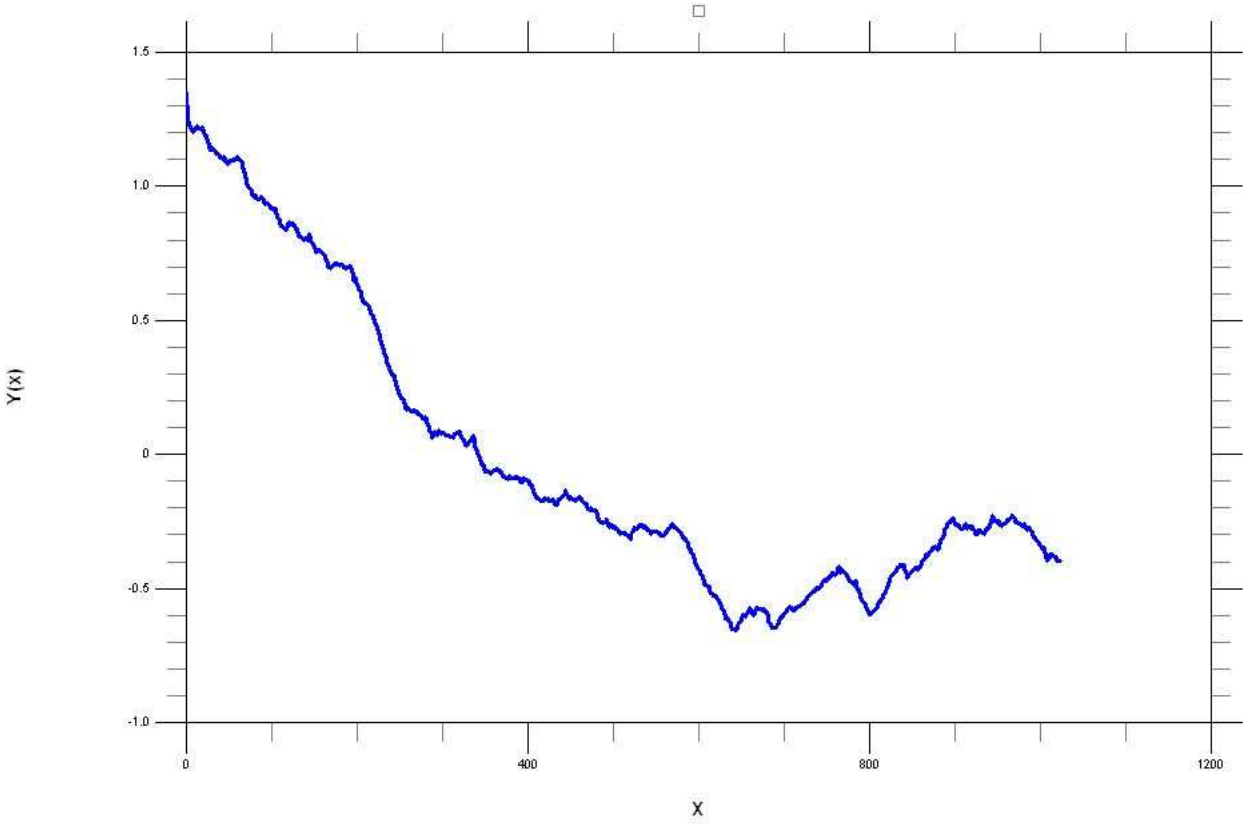


Figura 3.14: **fBm generado con el algoritmo de Feder, n=10, H=0.8**

Figura 3.15: **fBm generado con el algoritmo de Feder y el factor adicional de Saupe , n=10, H=0.8**

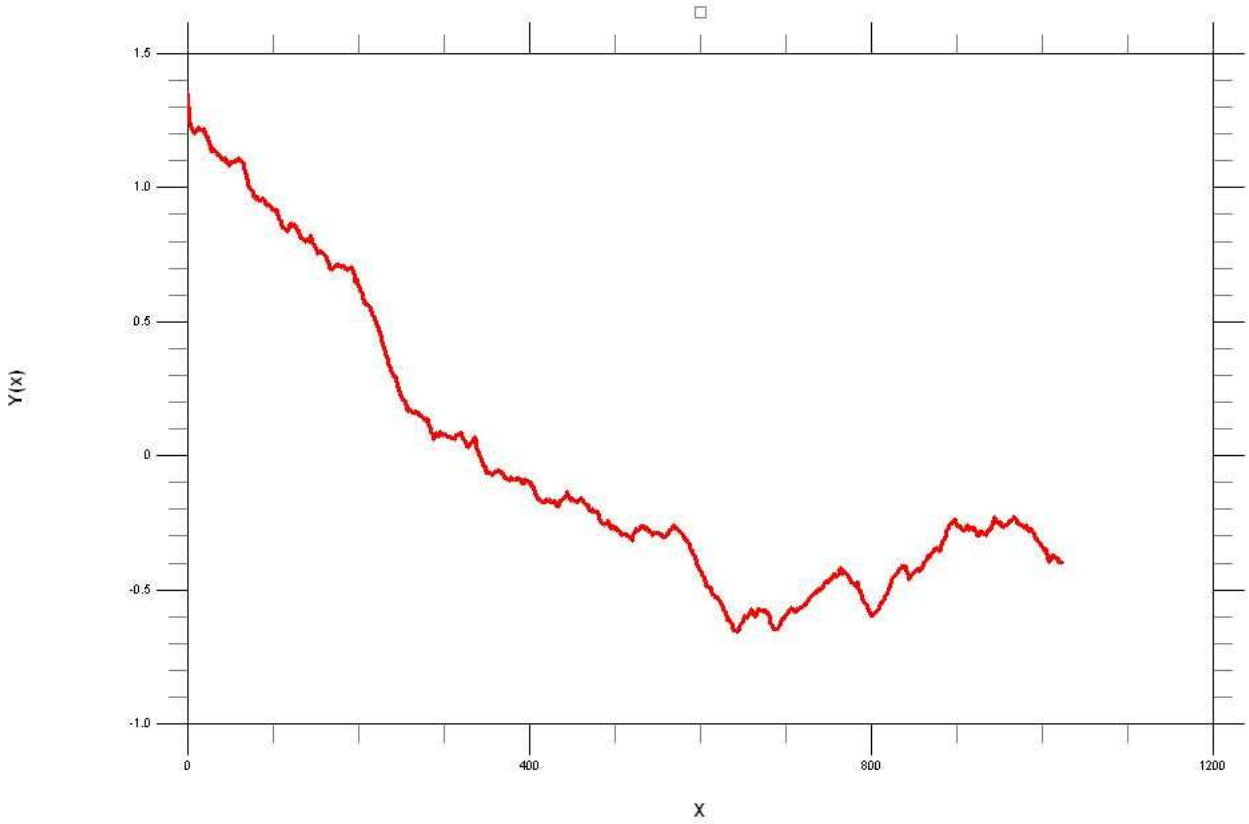


Figura 3.16: **fBm generado con el algoritmo de Feder mas el paso adicional de Liu H-H, n=10, H=0.8**

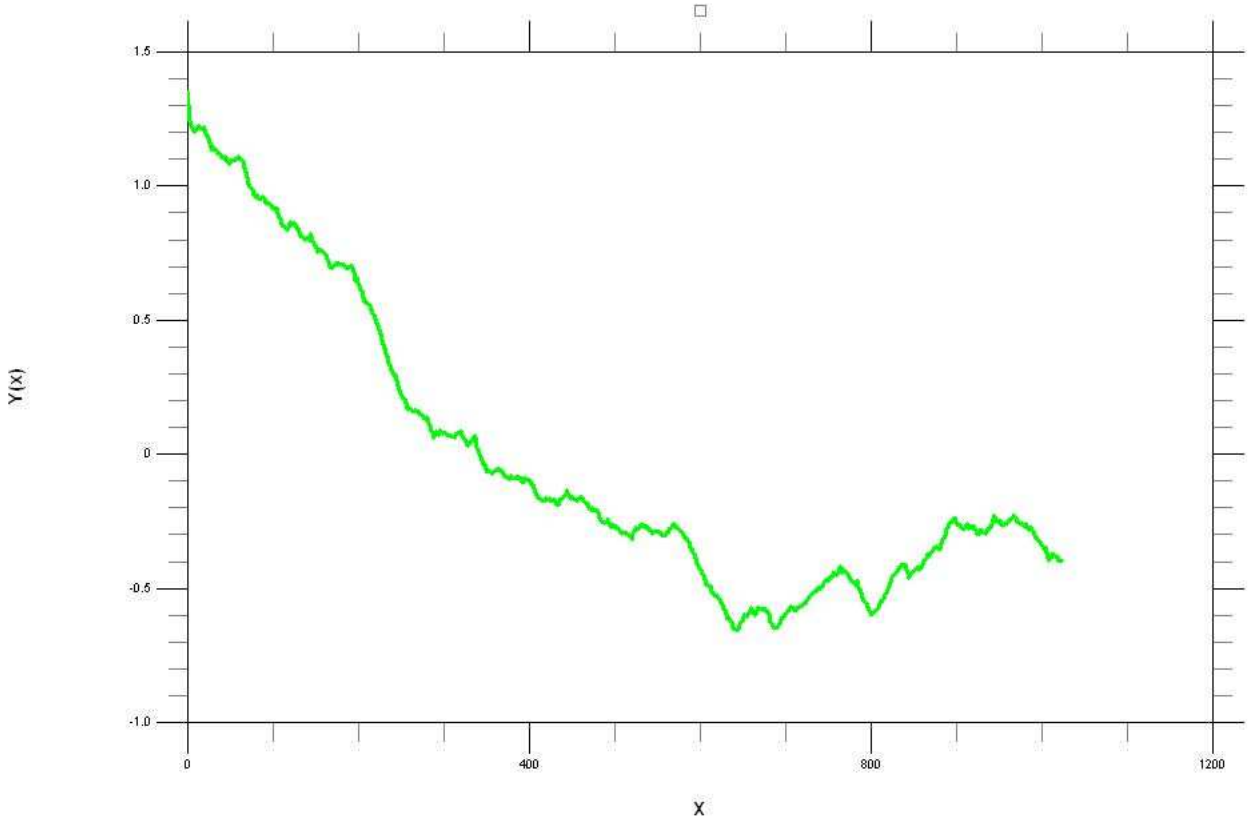


Figura 3.17: **fBm generado con el algoritmo de Feder , el factor adicional de Saupe mas el paso adicional de Liu H-H, n=10, H=0.8**

Capítulo 4
Conclusiones y Recomendaciones

- En el proceso de investigación sobre la simulación numérica de paisajes, se pone de manifiesto el necesario uso de las series temporales para la descripción de la evolución de proceso naturales, éstas al derivarse de funciones aleatorias y poseer características fractales fueron manipuladas por métodos computacionales, en nuestro caso tales series fueron consistentes con el Movimiento Browniano Fraccional.

- Para la generación 1-D de montañas no existe un algoritmo en común a seguir, sin embargo el factor, $(1/2)^{2nH}$, de decremento de la varianza que depende de H para la generación de Movimiento Browniano Fraccional es constante para todos los algoritmos que se encontraron. Las series temporales generadas con los diversos algoritmos no afectan la tendencia del ruido browniano, se comportan igual.

- Para la estimación de exponente de Hurst no existe bibliogría específica que concrete la metodología correcta a usar. Durante la generación de data sintética para registros de Hurst se pudo comprobar que al estimar el valor de H, los resultados varían entre cada estimador. En el caso del método desarrollado por H.E Hurst, el método R/S, se puede decir que es un método inestable debido a los ajustes que deben ser realizados para poder estimar un valor aproximado de H.

- La autosimilitud de cualquier serie sintética generada no será completamente corroborada a través del exponente de Hurst, lo que hace difícil al caracterización como modelo matemático de superficies en la naturaleza.

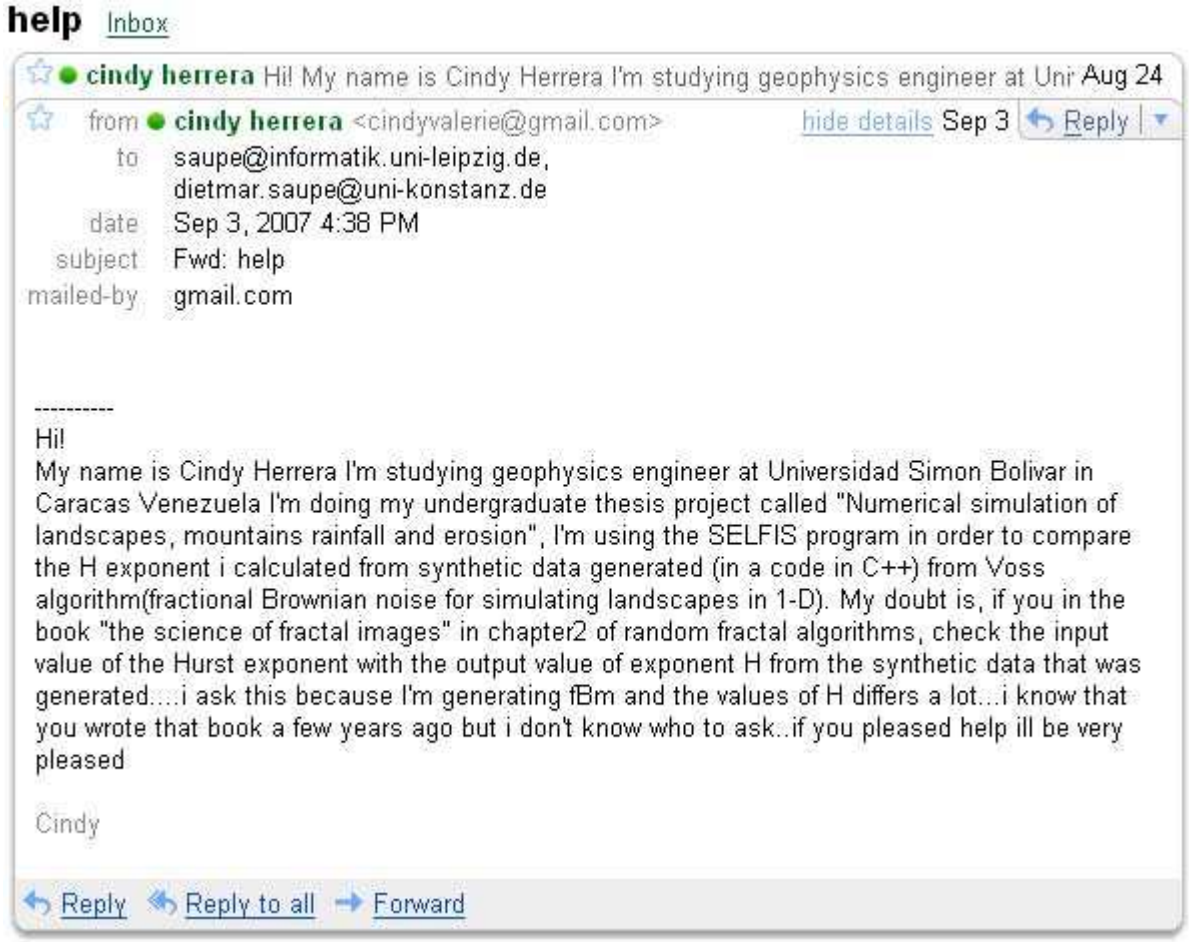
- Se recomienda continuar desarrollando métodos que logren estimar el exponente de Hurst de manera correcta para data sintética.

Apéndice A

Comunicación Privada

Comunicación Privada de Dietmar Saupe

A continuación respuesta vía correo electrónico del Dr. Dietmar Saupe en relación a la estimación del exponente de Hurst con data sintética. %



help Inbox

cindy herrera Hi! My name is Cindy Herrera I'm studying geophysics engineer at Uni Aug 24

from **cindy herrera** <cindyvalerie@gmail.com> hide details Sep 3 Reply

to saupe@informatik.uni-leipzig.de, dietmar.saupe@uni-konstanz.de

date Sep 3, 2007 4:38 PM

subject Fwd: help

mailed-by gmail.com

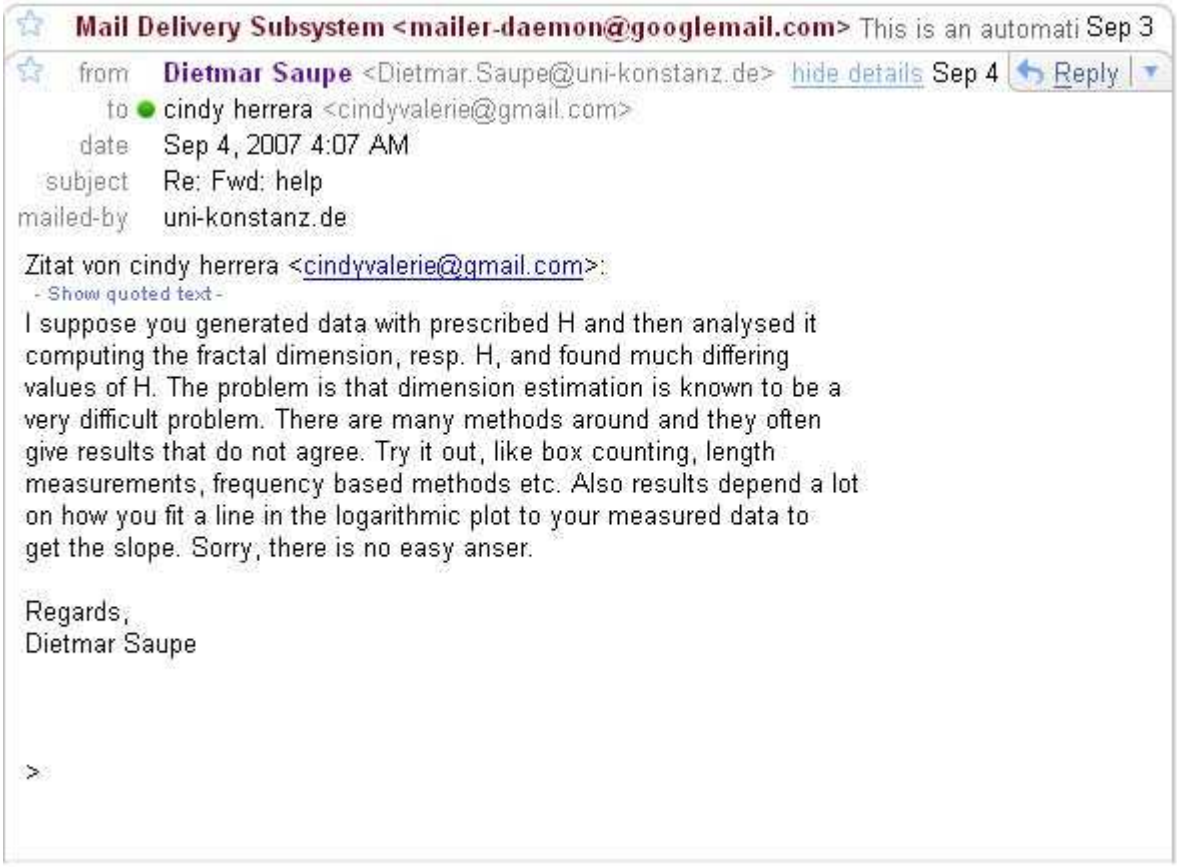
Hi!

My name is Cindy Herrera I'm studying geophysics engineer at Universidad Simon Bolivar in Caracas Venezuela I'm doing my undergraduate thesis project called "Numerical simulation of landscapes, mountains rainfall and erosion", I'm using the SELFIS program in order to compare the H exponent i calculated from synthetic data generated (in a code in C++) from Voss algorithm(fractional Brownian noise for simulating landscapes in 1-D). My doubt is, if you in the book "the science of fractal images" in chapter2 of random fractal algorithms, check the input value of the Hurst exponent with the output value of exponent H from the synthetic data that was generated....i ask this because I'm generating fBm and the values of H differs a lot...i know that you wrote that book a few years ago but i don't know who to ask..if you pleased help ill be very pleased

Cindy

Reply Reply to all Forward

Comunicación Privada



Mail Delivery Subsystem <mailer-daemon@googlemail.com> This is an automati Sep 3

from **Dietmar Saupe** <Dietmar.Saupe@uni-konstanz.de> hide details Sep 4 Reply

to cindy herrera <cindyvalerie@gmail.com>

date Sep 4, 2007 4:07 AM

subject Re: Fwd: help

mailed-by uni-konstanz.de

Zitat von cindy herrera <cindyvalerie@gmail.com>:

- Show quoted text -

I suppose you generated data with prescribed H and then analysed it computing the fractal dimension, resp. H, and found much differing values of H. The problem is that dimension estimation is known to be a very difficult problem. There are many methods around and they often give results that do not agree. Try it out, like box counting, length measurements, frequency based methods etc. Also results depend a lot on how you fit a line in the logarithmic plot to your measured data to get the slope. Sorry, there is no easy anser.

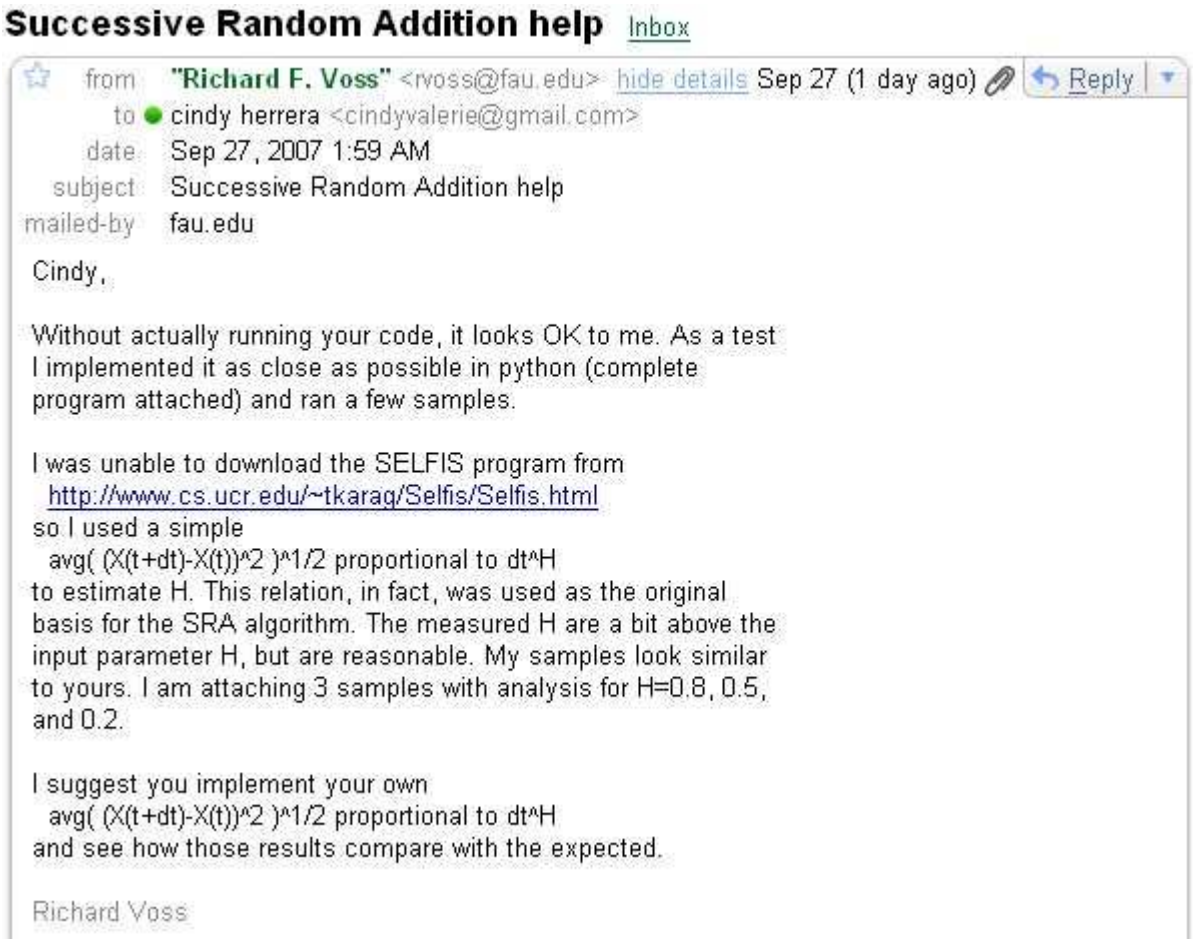
Regards,
Dietmar Saupe

>

Comunicación Privada de Dietmar Saupe

Comunicación Privada de Richard Voss

A continuación la respuesta vía correo electrónico del Dr. Richard Voss, creador del método SRA, en relación al algoritmo que usamos de Adiciones Aleatorias Sucesivas (SRA) para simular fBm.



Successive Random Addition help Inbox

from "Richard F. Voss" <rvoss@fau.edu> hide details Sep 27 (1 day ago) Reply

to cindy herrera <cindyvalerie@gmail.com>

date Sep 27, 2007 1:59 AM

subject Successive Random Addition help

mailed-by fau.edu

Cindy,

Without actually running your code, it looks OK to me. As a test I implemented it as close as possible in python (complete program attached) and ran a few samples.

I was unable to download the SELFIS program from
http://www.cs.ucr.edu/~tkarag/Selfis/Selfis.html
so I used a simple
avg((X(t+dt)-X(t))^2)^1/2 proportional to dt^H
to estimate H. This relation, in fact, was used as the original basis for the SRA algorithm. The measured H are a bit above the input parameter H, but are reasonable. My samples look similar to yours. I am attaching 3 samples with analysis for H=0.8, 0.5, and 0.2.

I suggest you implement your own
avg((X(t+dt)-X(t))^2)^1/2 proportional to dt^H
and see how those results compare with the expected.

Richard Voss

Comunicación Privada de Richard voss

Apéndice B

SELFIS

SELFIS: Herramienta para el análisis de Larga dependencia y auto-similitud

Thomas Karagiannis, Michalis Faloutsos y Mart Molle crearon una herramienta para el análisis de auto-semejanza, SELFIS, una herramienta de fácil uso para la evaluación de larga dependencia, libre de pago. El código del software es open-source lo que permite que a futuro el mismo se desarrolle con la colaboración de la comunidad experta.

Estimadores de Hurst implementados en SELFIS

1. *Método de los Momentos Absolutos* : cuando una serie agregada $X^{(m)}$ es definida, usando diferentes bloques de tamaño m. El gráfico log-log del nivel de agregación versus el primer momento absoluto de la serie agregada $X^{(m)}$ deberá será una línea recta con pendiente H-1, si la data es de larga dependencia.

2. *Método de la Varianza* : cuando el gráfico log-log de la varianza versus el nivel de agregación, debe ser una línea recta con pendiente β mayor que -1. En este caso $H = 1 + \beta/2$.

3. *Método R/S* : un gráfico log-log de cálculo R/S versus el número de puntos de la serie agregada, deberá ser una línea recta con la pendiente igual a H.

4. *Periodograma* : Este método grafica el logaritmo de la densidad espectral de una serie de tiempo versus el logaritmo de las frecuencias. La pendiente da un estimado de H. El periodograma está dado por:

$$I(\nu) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{j=1}^{N} X(j) e^{ij\nu} \right|^2$$

   donde ν es la frecuencia, N es la longitud de la serie de tiempo y X es la serie de tiempo en curso.

5. *Estimador de Whittle* : El método está basado en la minimización de una función de probabilidad, la cual es aplicada al periodograma de la serie de tiempo, esto da una

estimación de H y produce un intervalo confiable, no se genera un gráfico.

6. *Residuos de Varianza* : Grafico log-log del nivel de agregación versus el promedio de la varianza de los residuos de la serie, el cual deberá ser una línea recta con pendiente H/2.

7. *Abry − Veitch* : Las ondas son usadas para estimar el exponente de Hurst. La energía de la serie es estudiada a varias escalas para dar un estimado.

El código fuente de los estimadores, el cual que fue gentilmente otorgado por Thomas Karagiannis, esta disponible en la versión digital del presente trabajo.

Manual

- *Elementos de entrada* : el archivo de entrada debe ser una serie de tiempo en los siguientes formatos:

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ & . \\ & . \\ & . \end{array}$$

o

$$\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ . \\ . \\ . \end{array}$$

El archivo debe poseer al menos 64 datos, n=6. Cuando los datos son graficados el eje X siempre denota el número de observaciones.

- *Estimadores de H* : En la barra de menú, en el ítem "Hurst Exponent Estimation", se selecciona el estimador de preferencia después de ser abierto el archivo de entrada. La opción "Run All Estimators" abre una ventana nueva que expone el resultado de cada estimador.

- *Herramientas* : La opción "Tools" incluye el calculo de propiedades estadíticas básicas (media, varianza, desviación estandar, kurtosis, asimetría).

Apéndice C

Rutina Registros de Hurst 1-D

Código clase hurst1d3.h

```
>//      hurst1d.h                    December 12, 2006.
>//-------------------------------------------------------------------------
>//* impl
>#ifndef hurst1dH #define hurst1dH
>#include <string.h>     // strcpy #include <stdio.h>      // sprintf
>#include <fstream.h>    // ofstream
>#include "C:/Include/rand250.h" namespace geolib {
>using namespace geolib;

>class Hurst1D {
>public:
>Hurst1D(int order, double Hurst);
>Hurst1D(int order, double Hurst, unsigned long seed);
>  ~Hurst1D();
> int Order() const;
>int Capacity() const;
>double Exponent() const;
>void Exponent(double hurst);
> int Size() const;
>int Lag() const;
>int Scale() const;
>bool Scale(int value);
>double operator[](int index) const;
>double RoverS(int n) const;
>int Index() const;
>void Index(int index);
>int Coord(int n) const;
>void Generate();
```

```
> unsigned long Seed() const;
> void Seed(unsigned long seed);
>void Stats();
>double Min();
>double Max();
>double Average();
>double StDev();
>void Normalize();
>private:
>int order_;
>    double hurst_;
>    int two2order_;
>    double factor_;
>    int size_;
>    int scale_;
>    int lag_;
>    double *height_;
>    int index_;
>    double min_;
>    double max_;
>    double range_;
>    double average_;
>    double stdev_;
>    Rand250 *rand_;
>    void allocate_array_(int order);
>    Hurst1D(const Hurst1D&);
>    Hurst1D& operator=(const Hurst1D&);
>};
>//--------------------------------------------------------------------------
>void Hurst1D::allocate_array_(int order) {
```

```
>    size_ = 1;
>    order_ = abs(order);
>    if(order_ == 0) {
>        order_ = 1;
>        size_ = 3;
>    }
>    else {
>        for(int n=0; n<order_; n++)
>            size_ *= 2;
>        two2order_ = size_;
>        size_++;
>    }
>    scale_ = 1;
>    lag_ = 1;
>    height_ = new double[size_];
>}
>//---------------------------------------------------------------------------
>// Voss' algorithm.
>void Hurst1D::Generate() { double stdev = 1.; double factor =
>pow(0.5, hurst_);
>    for(int n=0; n<=two2order_; n++)
>        height_[n] = 0.;
>int size = 3; int offset = two2order_/2;
>    height_[0] += rand_->ExpRand(stdev);
>    height_[offset] += rand_->ExpRand(stdev);
>    height_[2 * offset] += rand_->ExpRand(stdev);

>    size = 2*size - 1;
>    offset /= 2;
>    stdev *= factor;
```

```
>    for(int order=1; order<order_; order++) {
>        // Averager
>        for(int col = 1; col<size; col+=2)
>            height_[offset*col] =  0.5 * (height_[offset*(col-1)] + height_[offset*(c
>        // Noise decorator
>        for(int col=0; col<size; col++)
>            height_[offset*col] += rand_->ExpRand(stdev);
>        // Next scale
>        size = 2*size - 1;
>        offset /= 2;
>        stdev *= factor;
>    }
>}
>//---------------------------------------------------------------------------
>void Hurst1D::Stats() {
>    min_= 1.e20;
>    max_ = -1.e20;
>    average_ = 0.;
>    stdev_ = 0.;
>double tmp;
>    for(int n=0; n<lag_; n++) {
>        tmp = height_[index_ + n];
>        average_ += tmp;
>        stdev_ += tmp * tmp;
>        if(tmp < min_)
>            min_ = tmp;
>        if(tmp > max_)
>            max_ = tmp;
>    }
```

```
>    average_ /= size_;
>    stdev_ /= size_;
>    stdev_ -= average_ * average_;
>    stdev_ = sqrt(stdev_);
>    index_++;
>    index_ %= two2order_/lag_;
>}
>//-------------------------------------------------------------------------
>Hurst1D::Hurst1D(int order, double Hurst) : order_(order),
>hurst_(Hurst) {
>    factor_ = pow(0.5, hurst_);
>    allocate_array_(order_);
>    rand_ = new Rand250();
>    Generate();
>}
>//-------------------------------------------------------------------------
>Hurst1D::Hurst1D(int order, double hurst, unsigned long seed) :
>order_(order), hurst_(hurst) {
>    factor_ = pow(0.5, hurst_);
>    allocate_array_(order);
>    rand_ = new Rand250(seed);
>    Generate();
>}
>//-------------------------------------------------------------------------
>Hurst1D::~Hurst1D() {
>    delete [] height_;
>    delete rand_;
}
>//-------------------------------------------------------------------------
>inline int Hurst1D::Order() const { return order_; }
```

```
>//---------------------------------------------------------------------------
>inline int Hurst1D::Capacity() const { return two2order_ + 1; }
>//---------------------------------------------------------------------------
>inline int Hurst1D::Size() const { return size_; }
>//---------------------------------------------------------------------------
>inline int Hurst1D::Lag() const { return lag_; }
>//---------------------------------------------------------------------------
>inline int Hurst1D::Scale() const { return scale_; }
>//---------------------------------------------------------------------------
>bool Hurst1D::Scale(int scale) {
>    if(scale == scale_)
>        return true;
>    if(scale > 0 && scale <= order_) {
>        scale_ = scale;
>        size_ = two2order_;
>        lag_ = 1;
>        for(int n=1; n<scale_; n++) {
>            size_ /= 2;
>            lag_ *= 2;
>        }
>        size_++;
>        return true;
>    }
>    return false;
>}
>//---------------------------------------------------------------------------
>inline unsigned long Hurst1D::Seed() const { return rand_->Seed(); }
>//---------------------------------------------------------------------------
>void Hurst1D::Seed(unsigned long seed) {
>    rand_->Initialize(seed);
```

```
>    Generate();
>}
>//--------------------------------------------------------------------------
>double Hurst1D::operator[](int index) const {
>    if(index >= 0 && index <= size_)
>        return height_[lag_ * index];
>    return 0.;
>}
>//--------------------------------------------------------------------------
>double Hurst1D::RoverS(int record) const { int n_o = Coord(record);
>int n_f = n_o + lag_ ; double min = 1.e20; double max = -1.e20;
>double height; double mean = 0; double sigma = 0; int N = 0;
>    for(int n=n_o; n<n_f; n++) {
>        height = height_[n];
>        mean += height;
>        sigma += height * height;
>        if(height < min)
>            min = height;
>        if(height > max)
>            max = height;
>        N++;
>    }
>    mean /= N;
>    sigma /= N;
>    sigma -= mean * mean;

>    return (max - min)/sqrt(sigma);
>}
>//--------------------------------------------------------------------------
>inline int Hurst1D::Coord(int n) const { return lag_ * n; }
```

```
>//--------------------------------------------------------------------------
>inline double Hurst1D::Exponent() const { return hurst_; }
>//--------------------------------------------------------------------------
>void Hurst1D::Exponent(double hurst) {
>    hurst_ = hurst;
>    Generate();
}
>//--------------------------------------------------------------------------
>void Hurst1D::Normalize() {
>    Stats();
>    min_ = 1.e20;
>    max_ = -1.e20;
>    for(int n=0; n<lag_; n++) {
>       height_[index_ + n] -= average_;
>        height_[index_ + n] /= stdev_;
>        if(height_[index_ * n] < min_)
>            min_ = height_[index_ + n];
>        if(height_[index_ + n] > max_)
>            max_ = height_[index_ + n];
>    }
>    range_ = max_ - min_;
>}
>//--------------------------------------------------------------------------
>inline double Hurst1D::Min() { return min_; }
>//--------------------------------------------------------------------------
>inline double Hurst1D::Max() { return max_; }
>//--------------------------------------------------------------------------
>inline double Hurst1D::Range() { return max_ - min_; }
>//--------------------------------------------------------------------------
>inline double Hurst1D::Average() { return average_; }
```

```
>//------------------------------------------------------------------------
>inline double Hurst1D::StDev() { return stdev_; }
>//------------------------------------------------------------------------
>//* decl
>//* parag Stream out operator
>//* car Print the given self affine {\tt set} to given {\tt stream}.
>//------------------------------------------------------------------------
>ostream& operator<<(ostream &stream, const Hurst1D &set);
>//* impl
>//------------------------------------------------------------------------
>ostream& operator<<(ostream &stream, const Hurst1D &v) {
>    for(int n=0; n<v.Size(); n++)
>        stream << n * v.Lag() << " " << v[n] << endl;
>    return stream;
>}
>//------------------------------------------------------------------------
>}       // end namespace geolib
>#endif
```

Programa principal

Este programa realizado en C++, muestra como generar muestras sintéticas de registros de Hurst en una dimensión y estima el exponente H con el método R/S.

Código

Archivos de cabecera y librerías usadas

```
> #include "C:/Include/geolib/hurst1d3.h"
> #include "C:/Include/statlib/histogram.h"
> #include <conio.h>
> #include <iostream.h>#
```

```
> #include <string.h>
> using namespace statlib;
> using namespace geolib;
> //-------------------------------------------------------------------
```

Se definen: la escala de observación máxima, esto es el orden, y el valor teórico de H. En este ejemplo se colocó como valor inicial H=0.5, para la generación de nuevos registros aleatorios solo es necesario cambiar el valor de la variable **Hurst Exponent**. Se declara la clase `Hurst1D` y el objeto `HRec` que posee los atributos `order` y `HurstExponent`.

```
> int order = 20;
> double HurstExponent = 0.5;
> Hurst1D HRec(order, HurstExponent);
```

Arreglo de histogramas para los registros de Hurst desde la escala 3 hasta la escala 20.

```
> Histogram *histo = new Histogram[18];
```

Variables empleadas

```
> int nbins = 1000;
> int min = 2;
> int max = 18;
> int nsamples = 10000;
> int OK = 3;
```

Archivo de salida para salvar guardar la data calculada de Log$< R/\sigma >$ y Logλ(s) desde la escala 3 hasta `HRec.Order()`, la máxima escala de observación.

```
> char filename[128];
> ofstream outstream("hurst_line.dat");
> int OP = nSamples/40;
> int op = OP;
```

Se definen los ajustes para cada histograma

```
>     for(int m=3; m<=HRec.Order(); m++){
>         histo[m-3].nBins(nbins);
>         histo[m-3].Limits(min,max);
>     }
```

Generación de 1000 muestras a partir de los registros de Hurst.

```
>     for(int n=1; n<=nsamples; n++){
>         for(int s=3; s<=HRec.Order(); s++){
```

Escalas pequeñas implican mayor cantidad de data, para este caso el histograma correspondiente se llena y satura mas rápido (cuando el número de muestras es considerable), se decidió truncar cada histograma hasta un número de muestras igual a `nsamples`, y entonces evitar que se produzca "overflow" en el histograma. Si la condición se cumple la sentencia `continue` retorna al bucle inicial saltando las sentencias siguientes e incrementando el contador del bucle en uno, adicionalmente el código imprime una decoración en la consola. Para cada escala "s" habrá aproximadamente el mismo número de muestras.

```
>             if(histo[s-3].nCounts() <= nsamples) {
>                 if(n==op) {
>                     cout << "....:*.*:...." ;
>                     cout << ".....___.....";
>                     op += OP;
>                 }
>             continue;
>             }
>         }
```

Para estimar el exponente de Husrt con el método R/S usamos el número total de muestras menos una a determinada escala "s". La clase `hurst1d3.h` tiene un método que calcula R/S, un sintaxis equivalente (mas complicada) es `histo[s-3].Sample(RoverS(w))`, además se muestreó el promedio R/S para cada escala .

```
>             HRec.Scale(s);
```

```
>                 for(int w=0; w<=HRec.Size()-1; w++)
>                     histo[s-3](HRec.RoverS(w));
>         }
>     }
>     HRec.Generate();
```

Después de muestrear el cociente R/S o R/σ como función de la escala "s" en los histogramas el resultado que se necesita es el promedio de R/σ, el exponente de Hurst se obtiene de graficar Log$< R/\sigma >$ vs. Logλ(s). La pendiente de la recta será el valor estimado de H. El dominio de Logλ(s) deberá ser largo (entonces el error de H es mas pequeño) al igual que el orden. Todos los histogramas poseen la misma cantidad de muestras lo que debería influir en el cálculo de error de H, el error en H dará la precisión de la medida, la distancia con respecto a la media sirve como medida de incertidumbre, esto es la desviación estándar, esta medida estadística es calculada con el método `StDev` de la clase `Histogram`.

```
>     for(int r=3; r<=HRec.Order(); r++){
>         outstream << (r-1)*log10(2.) << " " << log10(histo[r-3].Mean()) << "
>         " << log10(histo[r-3].StDev()) << endl;
>         strcpy(filename,"");
>         sprintf(filename,"hist_scale_%d.dat",OK);
>         OK += 1;
>         PrintHistogram(histo[r-3],"filename");
>     }
```

A fin de finalizar con un comentario agradable se ofrece una opción, adicionalmente se imprime en consola el número de muestras para cada histograma.

```
>     cout << endl;
>     for(int n=0; n<=HRec.Order()- 3; n++)
>         cout << histo[n].nCounts() << endl;
>         cout << endl << " HOoray NO more Hurst Records!!!!....Press any key
>         to finish";
>     getch();
```

Bibliografía

Bibliografía

[1] Wikipedia La Enciclopedia Libre, " Montañas", http://es.wikipedia.org/wiki/Monta

[2] Escobar G.; "Manual de Geologia para Ingenieros", Universidad nacional de Colombia, Cap 14 y 17, 1998.

[3] W.Griem y S.Griem-Klee , "plata.uda.cl/.../geologiageneral/ggcap05a.htm", Universidad de Atacama, (1999, 2003).

[4] Enciclopedia Encarta, "Erosión",http://es.encarta.msn.com, 2007.

[5] Greenwell M.; "THE A-Z OF NEPAL Part 3", michaelgreenwell.wordpress.com.

[6] Wikipedia La Enciclopedia Libre, "Fractales", http://es.wikipedia.org/wiki/fractales.

[7] Maldenbrôt B., "How long is the coast of britain?",Statistical self-similarity and fractal dimension. Science 155,pp 636-638. 1967.

[8] Turcotte D., "Fractals and chaos in geology and geophysics", Cambrigde University Press, Gran Bretaña, 1992.

[9] Wikipedia, the free Encyclopedia, "Fractals", http://en.wikipedia.org/wiki/fractals

[10] Curiel M., Maldonado L., Bravo G.,"Propiedades estadísticas de la variable memoria libre en computadoras de un entorno académico",2005.

[11] T. Karagiannis, M Faloutsos and R.H Reidi "Long Range Dependence: Now you se it now you don't!", Abril 10, 2002.

[12] Wikipedia, the free Encyclopedia, "Dimesion", http://en.wikipedia.org/wiki/dimension

[13] Palomas E.,"Evidencia e implicaciones del fenómeno de Hurst en el mercado de capitales", Gaceta de Economía, Año 8, Núm 15.

[14] Taylor R.;"Personal reflections on Jackson Pollock's fractal paintings", Hist. cienc. saude-Manguinhos vol.13 suppl.0 Rio de Janeiro Oct. 2006.

[15] Maldenbrôt B., Wallis J., "Computer experiments with fractional Guassian noises", Part1,2,3: Average and variances, Wat.Resour.Res 5(1), 1969, pp 228-267.

[16] Feder J., "Fractals", Plenum Press, 1988, Chapters 8-13

[17] Cont R., "Long Range Dependence in Financial Markets", Centre de Mathématiques appliqueés, Ecole Polytechnique, France.

[18] Maldenbrôt y Van Ness "Fractional browian motion, fractional noise and application", SIAM Review, 10,(1968),pp. 442-427.

[19] Samorodnistky G. and Taqqu M., "Stable Non-Gaussian Random Processes", Chapman & Hall, New York, 1994.

[20] Djaparidze Levan R."Long-Range Dependence en los Retornos a Nivel de Precio en el Mercado", Maestría en Finanzas, Universidad del CEMA, 2006.

[21] Taqqu M. S. and Teverosky V; Estimating long range dependence in infinite variance series. In Adler R., Feldman R. and Taqu M. S. editors; "A practical Guide to Heavy Tails: Estatistical Techniques for Analyzing Heavy Tailed distribution", Boston Birkäuser, 1997.

[22] Taqqu M., "http://math.bu.edu/people/murad/methods/index.html".

[23] Maldenbrôt B., Taqqu M., "Robust R/S Analysis of long-run serial correlation". In proceedings o de 42th session of internacional statistical institute. Manila, 1979. Bulletin of The Internacional Estatiscal Institute. Vol 48, Book 2, pp 69-104.

[24] Taqqu M., Teverosky V.; "Robustness of Whittle type Estimators for Time series with Long-Range dependence", Stochastics models, 1997.

[25] Cattoni D, Ozu M., Chara O., "Ruidos en la Naturaleza",

[26] Bras L. R., Rodriguez-Iturbe I.; "Random functions and hygrology"; Mass:Addison-Wesley, c1985; pp 210-265.

[27] Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M., "Theory and applications of long-range dependence", Boston Birkäuser, c[2003].

[28] Maldenbrôt B., "The Fractal Geometry of Nature", Freeman H. W. and Co., San Francisco, 1982

[29] Restrepo D., Mesa O., Arango H. "Otros Conjuntos Fractales en el Tiempo y en el Espacio", Agosto 2001.

[30] Voss R. F., "Random fractals forgeries", in Fundamentals Algorithms for Computer Graphics, editor R.A. Earnsshaw, NATO ASI Series F, Computer and System Sciences, Vol17, 1985.

[31] Callaghan S., Vilar E., "Synthesis of two dimensional rain fields for systems using spatial diversity".

[32] Liu H-H., Bodvarsson G., Lu S., Molz F., "A corrected and generalized succesive random additions algorith for simulating fractional Levy motions", (to be submitted to Mathematical Geology for publication), 2004.

[33] Peitgen H-O., Saupe, "The Science of Fractal Images", Springer-Verlag, New York, 1988.

[34] Hazard C., Kimport C., Dr. Johnson D.,"Fractal Music", http://www.tursiops.cc/fm/.

[35] Jeong H-D., Lee. Jong-Suk, McNickle D., Pawlikowski K.; "Suggestions of efficient self-similar generators", Simulation Modelling practice and Theory, 2006.

[36] Comunicación Privada de Dietmar Saupe, Septiembre 2007.