

Korrekt mérések a téridőben

Szondy György
Okl. Villamosmérnök, az ELFT tagja

Bevezető

A XX. század egyik legnagyobb vívmánya a gravitációs kölcsönhatást és a téridő leírását lehetővé tevő Általános Relativitás elv. Mi sem bizonyítja ezt jobban, mint hogy az elmélet megalkotóját, Albert Einsteint választották az évszázad emberének.

Az Általános Relativitás elv az Einsteini ekvivalencia elvre épül, mely többek között kimondja, hogy a fizikai törvények és mennyiségek bármely inercia-rendszerben azonosak. Az így felépített elmélet adta a gravitációval kapcsolatos jelenségek, mint például a fény elhajlás, vagy a Merkúr pálya-elfordulás eddig ismert legjobb leírását. Az űrhajózásban illetve extrém gravitációs körülmények között azonban az elmélet nehezen kezelhető, mivel a fizikai mennyiségek számértéke nem egyértelmű: függ a koordináta rendszer megválasztásától. Pedig a téridő koordináták és egyéb fizikai mennyiségek transzformációja alapvető fontosságú az égi mechanikában és az űrhajózásban. E probléma kezelésére az Általános Relativitás elv keretein belül két jól kidolgozott módszer létezik: a Brumberg-Kopeikin és a Damour-Soffel-Xu leírás (DSX Framework). Mindkettő igen bonyolult számításokat igénylő transzformáció, és habár hosszú évek munkája van mögöttük, teljes kidolgozásuk sem fejeződött még be.

Az említett DSX Framework módszerének lényege, hogy a naprendszer objektumainak mozgását leíró téridő koordinátákat és mennyiségeket mindig egy a naprendszer tömegközéppontjához rögzített globális koordináta rendszeren keresztül transzformálja, így téve egyértelművé a transzformációt és lehetővé a gravitációs hatások szuperpozícióját (!). A relativisztikus jelenségek figyelembevétele a gyakorlatban legtöbbször valamilyen közelítő módszer, vagy korrekció használatát teszi szükségessé.

Ezek alapján úgy tűnik, hogy míg az Általános Relativitás elv lokálisan jól kezelhető, alkalmazása az égi mechanikában nehézkes. Mindezek a nehézségek felvetik a jelenlegi megközelítés szigorú vizsgálatát, és egy globális körülmények között könnyebben használható leírás keresését.

A téridő leírása az általános relativitás elv alapján

Egy szabad részecske mozgását a általános relativitás-elméletben a legkisebb hatás elve határozza meg:

$$\delta S = \delta \int m (g_{ij} u^i u^j)^{1/2} ds = 0 \quad (1)$$

Az egyenletet gyakran írják a következő formában is:

$$\delta S = -mc \delta \int ds = 0 \quad (2)$$

A részecske mozgásának utóbbi megadása azonban már magában hordozza az idő definícióját ezzel egyenesen elvezetve az Általános Relativitás elméletéhez.

Ennek oka, hogy mivel a fénysebesség állandósága miatt a részecske tömege és a hozzá rendelhető sajátfrekvenciája között egyenes arányosság van, nyilvánvaló, hogy amennyiben a részecske nyugalmi tömegét állandónak vesszük, ezzel egyben az anyagi oszcillátor frekvenciáját is állandónak tekintjük. Mivel a laboratóriumban előállított órák jelenlegi pontossága $1-2 \times 10^{-15}$ körül van, ez a pontosság már elegendő ahhoz, hogy az egyéb alapegységeket fizikai állandók és törvények használatával az idő mérésére vezessük vissza. A hosszúság mérését például a fény állandó c sebességére alapozzuk. A tömeg mérésére többféle lehetőség kínálkozik: égitestek esetén a G gravitációs állandó, míg laboratóriumi körülmények között elektromágneses jelenségek és konstansok használata látszik célszerűnek. Az idővel való korrekt elméleti összerendelés azonban mindenképpen a részecske annihilációs energiáján keresztül történhet, a

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ E &= mc^2 \\ \nu &= c^2/h \cdot m \end{aligned} \quad (3)$$

egyenletek segítségével. Az idő és az időmérés jól ismert definíciója az időt egy atom, vagy molekula kiválasztott energia átmenetéből származtatja, mindenféle külső kalibrálás nélkül. Az Einsteini ekvivalencia elv, és az eddigi mérések alapján mindeddig az atomi energia átmenet és az annihilációs energia aránya állandónak bizonyult. Amennyiben extrém körülmények között ez a feltétel nem teljesülne, akkor is a (3) egyenlet szerinti összerendelést kell megalapozottnak tekintenünk.

A részecske nyugalmi tömegét állandónak tekintve adódik a részecske mozgásegyenlete:

$$(d/ds)(mu_I) - 1/2mg_{jk,i}u^ju^k = 0 \quad (4)$$

Az egyenletből látható, hogy azt a részecskét tekintjük nyugalomban lévőnek, melyre nem hat erő, így geodetikus vonal mentén halad: jelen esetben szabadon esik. E megközelítés következtében azonban bizonyos nehézségek adódnak:

Egy ilyen rendszerben a szinkronizált vonatkoztatási rendszerek egyik jellemző tulajdonsága, hogy nem stacionáriusak.

Az Általános Relativitás elv egyéb megállapításait is jól ismerjük, mint például, hogy a fény gravitációs vöröseltolódást szenved, így az energia és a távolság mérése nem egyértelmű. A vöröseltolódás természetesen a szinkronizálást is megnehezíti.

Az esetek nagy részében olyan koordinátarendszert használunk, melyben kényszererő hat, így közelről sem tekinthető inerciarendszernek.

A legkisebb hatás elvének (4) szerinti felírását már Brans és Dicke is kritikával fogadta. Rámutattak, hogy a mérési eredmények csupán a gyenge ekvivalencia elvet támasztják alá. 1961-es írásukban egy alternatív gravitációs elmélettel jelentkeztek, ahol a gravitációs kölcsönhatást egy helyfüggő skaláris segítségével kívánták leírni. Az elmélet felállítása során úgy döntöttek, a részecskék nyugalmi tömegét továbbra is állandónak tekintik, míg a változó részt a gravitációs állandóba integrálják. A Merkúr pályájának elfordulására az általuk adott közelítő megoldás alapján számított érték távolabb esett a mért értékektől, mint az Általános Relativitás elv alapján számolt, így ez az irányzat lassanként elhalt. Meg kell említeni, hogy főképp a 90-es években más elméletekkel együtt ezt az elméletet is sokan újra elővették.

Méréstechnikailag ideális leírás

Téridő-méréseink, mint általában méréseink nagy része, összehasonlításon alapulnak. Elvégzésükhöz tehát két alapvető segédeszközhöz van szükség: referenciára, vagy etalonra illetve az összehasonlítást végző mérőeszközhöz. A mérés hibája az etalon és a mérőeszköz együttes hibájából adódik. Az etalon rendszeres hibáját kalibrálással, míg az összehasonlítás rendszeres hibáját az összehasonlítás irányának megfordításával lehet kiszűrni.

Jelen esetben az összehasonlítás eszköze minden esetben a fény, míg az etalon az anyagi oszcillátor. Sajnálatos módon, egy tömegarány, vagy egy távolság mérésnél, legalábbis az esetek nagy részénél, például bolygók távolságának mérésénél, nincs lehetőségünk a mérést fordított irányban megismételni. Kapunk ugyan a spektroszkópia segítségével értéket a mérés hibájára, de ennek pontossága koránt sem kielégítő.

Méréstechnikai szempontból a téridő egyértelmű méréseihez alapvető elvárás, hogy a mérőeszköz ideálisnak legyen tekinthető. Ez a követelmény, mint látni fogjuk, teljesíthető, ha leírásunkban sikerül megszabadulni a gravitációs vöröseltolódás jelenségétől.

Tömeg és frekvencia transzformációja valamint a mozgásegyenlet

Amennyiben nem tételezzük fel, hogy a részecskék nyugalmi tömege állandó, a szabad részecske mozgását leíró egyenlet egy új taggal bővül, és a következő formát ölti:

$$(d/ds)(mu_I) - 1/2mg_{jk,i}u^ju^k - m_{,i} = 0 \quad (5)$$

, ahol az új tag képviseli a gravitációs erőt. Ebben az esetben, mivel a részecskék tömege nem feltétlenül állandó, így a (3) összefüggés miatt jelenlegi időmérésünk sem alkalmazható külső kalibrálás nélkül. Amennyiben a tömeg helyfüggését a szokásos

$$m = m_0 * f(\mathbf{x}) \quad (6)$$

módon definiáljuk, óráink valós frekvenciáját a

$$\nu = \nu_0 * f(\mathbf{x}) \quad (7)$$

transzformáció segítségével számíthatjuk, ahol ν_0 a hagyományos módon mért, ν pedig a valós frekvencia, míg $f(\mathbf{x})$ egy helytől függő skalár függvény. Fontos körülmény, hogy ezzel az időt és az időmérést a hagyományostól eltérően definiáltuk.

A leírás akkor lesz tehát ideális számunkra, ha ki tudjuk küszöbölni vele a gravitációs vöröseltolódást. Ezt a jelenséget ebben a leírási módban a referenciáink, vagyis a részecskék elhangolódásaként értelmezzük. Az ezen elvek alapján leírt rendszerekben $g_{00}=1$, így a stacionárius rendszerek egyik jellemző tulajdonsága, hogy szinkronizálhatók is. Ez speciális esetekben lehetővé teszi a tér és időkoordináták szétválasztását így egy

nagyságrenddel csökkentve a matematikai leírás bonyolultságát. Mivel ezen leírás értelmében a fény frekvenciáját csak a doppler effektus befolyásolja, így a fény alkalmas az órák egyértelmű szinkronizálására, praktikus az $f(\mathbf{x})$ függvény egyértelmű mérésére. Az így felállított szinkronizált rendszerben a távolságok és egyéb alapegységek mérése a speciális relativitás elv alapján történhet. A mozgásegyenletek és koordináták transzformációja is lényegesen egyszerűbb.

A mozgásegyenletről az is leolvasható, hogy eltérően az általános relativitás elvvel ebben a leírásban gravitációs tér jelenlétében csak olyan részecskét lehet nyugalomban, melyre a gravitációs erőt ellensúlyozó kényszererő hat. A szabadon eső testhez rögzített koordináta rendszer tehát semmiképpen sem lehet inerciarendszer.

Az idő és a távolság definíciója

Az időmérés definícióját a (7) egyenletből a következő formában adható meg:

$$\tau = \tau_0 / f(\mathbf{x}) \quad (9)$$

ahol τ_0 a hagyományos módon mért idő, τ pedig a valós időtartam.

A méter definícióját az általános relativitás elmélettel egyező módon a fény állandó c sebességére alapozzuk.

$$s = c \, d\tau = c \, d\tau_0 / f(\mathbf{x}) = s_0 / f(\mathbf{x}) \quad (10)$$

Az egyenlet azt is mutatja, hogy az általános relativitás elv alapján egyformának mért méterrúdak valós hossza alacsonyabb gravitációs potenciálon nagyobb. Ha a méterrúdak, és ezzel a részecskék méretét véges tartományban kívánjuk tartani, ez a

$$f(\mathbf{x}) > 0 \quad (11)$$

határfeltételt adja.

A sebesség és gyorsulás definíciója

A sebességet definíciója szerint ki tudjuk fejezni a távolság és az eltelt idő hányadosával. Ezek szerint:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{s} / d\tau = d\mathbf{s}_0 / d\tau_0 = \mathbf{v}_0 \quad (12)$$

ami később a mozgási energia és az impulzus egyértelmű kifejezését is lehetővé teszi majd.

A gyorsulás az időegység alatti sebességváltozás:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v} / d\tau = d\mathbf{v}_0 / (d\tau_0 / f(\mathbf{x})) = \mathbf{a}_0 f(\mathbf{x}) \quad (13)$$

A gravitációs potenciál definíciója

Az einstein féle ekvivalencia elv a gravitációs potenciált a gravitációs vöröseltolódás segítségével definiálja:

$$\Delta\nu / \nu = (1 + \alpha) c^{-2} \Delta U \quad (14)$$

Definíció szerint mi az $f(\mathbf{x})$ függvény segítségével minden frekvenciaértéket egy kiválasztott referencia koordináta-rendszerbe transzformálunk. A mérések alapján meghatározott $\alpha < 10^{-4}$ érték éppen e transzformáció hiányából adódó eltéréseket volt hivatott korrigálni. Jelen esetben ezt 0-nak tekintjük és elhagyjuk. Itt megjegyezzük, hogy akármely kitüntetett koordináta-rendszer, például a DSX framework által használt naprendszer központú Barycentric Reference System alkalmas eme transzformációk végrehajtására.

Az egyenlet kiértékelésére minden elemét külön definiáljuk.

ν_0 az atomi frekvencia, ami az általános relativitás elméletben az időmérés alapja,

ν az a frekvencia érték amit a referencia rendszerben mérünk,

ΔU A referencia rendszerhez viszonyított gravitációs potenciál.

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \nu - \nu_0 \\ \Delta\nu &= m_0 c^2 / h * (f(\mathbf{x}) - 1) \\ \Delta\nu / \nu_0 &= -(1 - f(\mathbf{x})) = c^{-2} \Delta U \\ \Delta U &= -(1 - f(\mathbf{x})) c^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Látható, hogy (11) fennállása esetén a gravitációs potenciál korlátos. Így a fényt láthatóan a jelenlegi fekete lyuk koncepcióktól eltérően gravitációs potenciál semmiképpen sem ejtheti csapdába.

Az eltérések oka

A két leírás előrejelzései a fekete lyuk tekintetében alapvetően különböznek. Míg az Einstein féle általános relativitás elv esetén a fénykúpok a gravitációs térben befelé hajlanak extrém esetben létrehozva az eseményhorizontot addig a vörös-eltolódástól mentes leírás szerint nincs olyan téridő terület, ahol a fény összenergiája negatív lenne, vagyis potenciál-csapdába kerülhetne. A különbség oka, hogy míg az általános relativitás elv a szabadon eső, az itt felvázolt modell az állandó potenciálon lévő részecske világvonalát tekinti a fénykúp szimmetriatengelyének.

Ez a látszólagos ellentmondást furcsa módon semmilyen gondot nem okoz, mivel mindkettő az adott rendszer definíciójából adódik és illeszkedik az ott használt koordináta-rendszerhez. Hatása csupán az egyidejűség meghatározásában van.

Összegzés

Összefoglaltuk hogy az Általános Relativitás megközelítése mennyiben tér el a mérés-technikailag ideális téridő leírás tulajdonságait. Ezen írásnak célja csupán a mérés-technikailag korrekt leírás definiálása és néhány alapvető tulajdonságának bemutatása. Nem célja a teljes matematikai leírás megadása, hiszen az jelentősen túlmutat egy ilyen jellegű írás keretein.

Megállapítottuk, hogy míg az Általános Relativitás elv lokálisan jelenségek leírására ideálisnak, jelentős potenciál különbségek és nagy távolságok együttes kezelése esetén azonban igen nehezen használhatónak és bonyolultnak bizonyult.

Mérés-technikai szempontból az idő gravitációs vörös-eltolódást kiküszöbölő – a jelenlegitől eltérő – definíciója alkalmasabb egy jól használható leírás megalkotásához. Az idő ilyen definíciója magával vonja a részecskék nyugalmi tömegének helyfüggését, illetve az órák külső kalibrálásának igényét.

Első közelítésben a tömegváltozást leíró függvény mérhető. Nyilvánvaló kihívás azonban a nyugalmi tömeg helyfüggését leíró skaláris függvény származtatása a metrikus tenzorból.

Irodalom

1. J. Kovalevsky, 2000, *Celestial Refernce Systems – An Overview*, Proceedings of IAU Colloquium 180
2. B. Guinot, 2000, *Time and Standards – An Overview*, Proceedings of IAU Colloquium 180
3. S. Klioner, 2000, *Relativity in Modern Astronomy and CelestialMechanics – An Overview*, Proceedings of IAU Colloquium 180
4. Landau-Lifsic, 1972, *Klasszikus erőterek*, Elméleti fizika II.
5. Misner, Thorne, Wheeler, 1973, *Gravitation*
6. Brans, Dicke, 1961, *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*, Phys. Rev. 124 , 925
7. Szondy György, 2000, *Téridő modellek és a Gravitáció*,
http://www.geocities.com/gyorgy_szondy/grav-rel2.html