Plano de doutorado: Convergência de algoritmos de Otimização, condições de otimalidade e qualificação de restrições

Orientador: José Mario Martínez

Aluno: Gabriel Haeser

Resumo

O objeto da programação não linear (PNL) é o problema matemático de minimizar uma função contínua com restrições dadas por equações e inequações, em geral não lineares. Ver [2, 3, 6, 16]. A teoria de convergência de muitos algoritmos eficientes e populares pode ser considerada incompleta. Neste trabalho nos propomos a formulação e resolução de perguntas específicas relacionadas com esses algoritmos.

1 Desenvolvimento

Existem muitos algoritmos eficientes, na prática, para programação não-linear PNL e existem muitos resultados teóricos, mais ou menos relacionados com algoritmos. Entretanto, nem sempre a teoria consolidada corresponde a algoritmos consolidados e nem sempre é claro que tipo de teoria explica o comportamento prático de algoritmos.

Uma das críticas que usualmente se fazem às teorias de convergência vigentes em PNL radica na frequente presença de hipóteses que não dependem do problema mas do próprio comportamento do algoritmo. É usual encontrar teoremas que dizem: "Se isto passa com a seqüência gerada pelo algoritmo, então ele converge", sem condições suficientes razoáveis sobre o problema que garantam a suposição sobre o comportamento do algoritmo". No melhor dos casos, essas teorias são incompletas.

Em trabalhos recentes do orientador desta tese e seus colaboradores foi seguido um roteiro metodológico para a análise de convergência de algoritmos de PNL que, basicamente, consiste no seguinte:

1. Analisar a limitação da seqüência gerada pelo algoritmo. Se ela pode não ser limitada, o algoritmo deve poder ser definido com um conjunto de viabilidade adicional (por exemplo, limitantes para as variáveis) ao qual todos os iterandos devem pertencer e ter sentido nestas circunstâncias. Por exemplo, a hipótese de compacidade da seqüência na maioria dos algoritmos para minimização com somente restrições de desigualdade produz teorias incompletas.

2. Estabelecer o comportamento do algoritmo em relação à viabilidade. O conjunto viável pode ser vazio e é necessário saber que acontece com o algoritmo nesse caso. Descobrir a que tipo de pontos não-viáveis o algoritmo pode convergir. Tender a resultados que afirmem que os pontos limites devem ser estacionários para uma medida de inviabilidade.

3. Descobrir a que tipo de pontos viáveis o algoritmo pode convergir. Tender a resultados que afirmem que "Se o ponto limite satisfaz uma determinada qualificação de restrições

fraca, então ele é KKT". Procurar provar estes resultados com a qualificação mais fraca possível.

4. Teoremas de transição: descobrir como se comporta o algoritmo quando, do ponto de vista global, tudo funciona bem. Ordem de convergência? Estabilidade assintótica dos subproblemas gerados? Limitação de parâmetros de penalidade? Conseguir estes resultados, de novo, sob as qualificação de restrições mais fracas possíveis.

Este roteiro está em aberto, total ou parcialmente, para inúmeros algoritmos já estabelecidos e muitos por estabelecer. Em particular, é frequente em muitos algoritmos o uso de qualificações de restrições fortes, como a regularidade clássica. Sobre vários algoritmos podem ser feitas as perguntas?

1. O resultado que vale assumindo regularidade, também vale assumindo a condição de Mangasarian-Fromovitz?
2. O resultado que vale usando Mangasarian-Fromovitz, também vale assumindo a condição CPLD (Constant Positive Linear Dependence)?
3. Nos casos negativos, podem ser encontrados contraexemplos?

Neste plano nos propomos encarar e responder perguntas como as formuladas acima, para bons algoritmos já introduzidos na literatura e, eventualmente, para outros em elaboração. Um dos nossos focos será um método de Chen e Goldfarb, colocado em abril de 2005 no repositório Optimization On Line. A implementação de métodos não está incluída como objetivo neste trabalho, mas não podemos excluír a priori essa possibilidade.

Como todo plano de doutorado, abrem-se aqui muitas possibilidades, algumas das quais não podem ser contempladas no projeto inicial. Entretanto, acreditamos ter indicado neste plano as linhas principais, ou, pelo menos, suas raízes.

2 Cronograma

- **Semestre I, 2006:** Cursar disciplinas básicas e começar a familiarizar-se com bibliografia. Participar do Seminário de Otimização.
- **Semestre II, 2006:** Cursar disciplinas complementares e disciplina de Tópicos. Completar leitura da bibliografia. Participar do Seminário de Otimização. Primeiro Exame de Qualificação. Este exame, no programa de Matemática Aplicada é um exame escrito sobre Matrizes (Álgebra Linear Computacional, livro de Golub-Van Loan), Análise Aplicada (Análise funcional) e Otimização.
- **Verão 2006-2007:** Escrever texto completo e auto-contido sobre todos os resultados conhecidos. Fundamentalmente, este texto deve ser um "survey" razoável sobre o problema, baseado em intensa pesquisa bibliográfica.
- **Março 2007:** Redação do primeiro relatório anual para a entidade financiadora. Estudo e desenvolvimento do Tópico de Tese.

- **Semestre I, 2007:** Cursar disciplinas complementares. Obtenção de resultados.
- **Semestre II, 2007:** Obtenção de resultados.
- **Verão 2007-2008:** Preparação do segundo relatório anual para a entidade financiadora, contendo as conclusões da pesquisa dos dois semestres anteriores. Segundo exame de qualificação: este exame consiste na defesa da proposta de tese perante banca qualificada.
- **Semestre I, 2008:** Confirmação ou rejeição de hipóteses.
- **Semestre II, 2008:** Consolidação de resultados .
- **Verão 2008-2009:** Redação da tese.
- **Março 2009:** Defesa de tese.

References

[1] A. R. Conn, N. I. M. Gould and Ph. L. Toint. A globally convergent augmented Lagrangean algorithm for optimization with general constraints and simple bounds, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28, pp. 545–572 (1991).

[2] A. R. Conn, N. I. M. Gould and Ph. L. Toint. *Trust region methods*. SIAM, Philadelphia, 2000.

[3] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*, (2nd edition), John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto and Singapore, 1987.

[4] R. Fletcher, N. I. M. Gould, S. Leyffer, P. L. Toint and A. Wächter. Global convergence of a trust-region SQP-filter algorithm for general nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization* 13 (3), pp. 635-659 (2002).

[5] R. Fletcher, S. Leyffer and P. L. Toint. On the global convergence of a filter-SQP algorithm. *SIAM Journal on Optimization* 13 (1), pp. 44-59 (2002).

[6] P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright. *Practical Optimization*, Academic Press, London, 1981.

[7] F. M. Gomes, M. C. Maciel, J. M. Martínez. Nonlinear programming algorithms using trust regions and augmented Lagrangians with nonmonotone penalty parameters. *Mathematical Programming* 84, pp. 161-200 (1999).

[8] C. C. Gonzaga, E. Karas and M. Vanti. A globally convergent filter method for nonlinear programming. Available at http://www.optimization-online.org/ (Revised in April, 2003).

[9] N. Krejić, J. M. Martínez, M. P. Mello and E. A. Pilotta. Validation of an augmented Lagrangian algorithm with a Gauss-Newton Hessian approximation using a set of hard-spheres problems. *Computational Optimization and Applications* 16, pp. 247-263 (2000).

[10] J. M. Martínez. A trust-region SLCP model algorithm for nonlinear programming. In *Foundations of Computational Mathematics*. Edited by F. Cucker and M. Shub. Springer-Verlag, pp. 246-255 (1997).

[11] J. M. Martínez. Two-phase model algorithm with global convergence for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications* 96, pp. 397-436 (1998).

[12] J. M. Martínez. Inexact restoration method with Lagrangian tangent decrease and new merit function for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications* 111, pp. 39-58 (2001).

[13] J. M. Martínez and E. A. Pilotta. Inexact restoration methods for nonlinear programming: advances and perspectives. To appear in *Optimization and Control with applications*, edited by L. Q. Qi, K. L. Teo and X. Q. Yang. Kluwer Academic Publishers, 2003.

[14] J. M. Martínez and E. A. Pilotta. Inexact restoration algorithms for constrained optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications* 104, pp. 135-163 (2000).

[15] J. M. Martínez and S. A. Santos. A trust region strategy for minimization on arbitrary domains. *Mathematical Programming* 68, pp. 267-302 (1995).

[16] J. Nocedal, S. J. Wright. *Numerical Optimization*, Springer Verlag, New York, 2000.

[17] L. Chen and D. Goldfarb. Interior point ℓ-2 penalty methods for nonlinear programming with strong global convergence properties. CORC Technical Report TR 2004-08, April 11, 2005.

[18] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez and L. Schuverdt. Augmented Lagrangian methods under the Constant Positive Linear Dependence constraint qualification. Technical Report, Unicamp, 2005.

[19] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez and L. Schuverdt. On Augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints. Technical Report, Unicamp, 2005.

[20] R. Andreani, J. M. Martínez and M. L. Schuverdt. On the relation between Constant Positive Linear Dependence Condition and Quasinormality Constraint Qualification. *Journal of Optimization Theory and Applications* 125, pp. 473-485 (2005).

[21] M. Argéz and R. A. Tapia, On the global convergence of a modified augmented Lagrangian linesearch interior-point Newton method for Nonlinear Programming, *J. Optim. Theory Appl.*, 114 (2002), pp. 1-25.

[22] S. Bakhtiari and A. L. Tits, A Simple primal-dual feasible interior-point method for nonlinear programming with monotone descent, *Comput. Optim. Appl.*, 25 (2003), pp. 17-38.

[23] H. Y. Benson, D. F. Shanno and R. J. Vanderbei, Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: Filter methods and merit functions, *Comput. Optim. Appl.*, 23 (2002), pp. 257-272.

[24] H. Y. Benson, D. F. Shanno and R. J. Vanderbei, Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: Jamming and comparative numerical testing, *Math. Programming*, 99 (2004), pp. 35-48.

[25] J. V. Burke and S. P. Han, A robust sequential quadratic programming method, *Math. Programming*, 43 (1989), 277-303.

[26] R. H. Byrd, J. C. Gilbert and J. Nocedal, A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming, *Math. Programming*, 89 (2000), pp. 149-185.

[27] R. H. Byrd, M. E. Hribar and J. Nocedal, An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming, *SIAM J. Optim.*, 11 (1999), pp. 877-900.

[28] R. H. Byrd, J. Nocedal and A. Waltz, Feasible interior methods using slacks for nonlinear optimization, *Comput. Optim. Appl.*, 26 (2003), pp. 35-61.

[29] A. R. Conn, N. I. M. Gould, D. Orban and P. L. Toint, A primal-dual trust region algorithm for non-convex nonlinear programming, *Math. Programming*, 87 (2000), pp. 215-249.

[30] A. R. Conn, N. I. M. Gould and P. L. Toint, A primal-dual algorithm for minimizing a nonconvex function subject to bound and linear equality constraints, In *Nonlinear optimization and related topics* (Erice, 1998), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 15-49.

[31] J. E. Dennis M. Heinkenschloss and L. N. Vicente, Trust-region interior-point SQP algorithms for a class of nonlinear programming problems, *SIAM J. Control Optim.*, 36 (1998), pp. 1750-1794.

[32] C. Durazzi and V. Ruggiero, Global convergence of the Newton interior-point method for nonlinear programming, *J. Optim. Theory Appl.*, 120 (2004), pp. 199-208.

[33] A. S. El-Bakry, R. A. Tapia, T. Tsuchiya and Y. Zhang, On the formulation and theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming, *J. Optim. Theory Appl.*, 89 (1996), pp. 507-541.

[34] R. Fletcher, N. I. M. Gould, S. Leyffer, P. L. Toint and A.Wächter, Global convergence of a trust-region SQP-filter algorithm for general nonlinear programming, *SIAM J. Optim.*, 13 (2002), pp. 635-659.

[35] R. Fletcher and S. Leyffer, Nonlinear Programming without a penalty function, *Math. Programming*, 91 (2002), pp. 239-269.

[36] R. Fletcher, S. Leyffer and P. L. Toint, On the global convergence of a filter-SQP algorithm, *SIAM J. Optim.*, 13 (2002), pp. 44-59.

[37] A. Forsgren and P. E. Gill, Primal-dual interior method for nonconvex nonlinear programming, *SIAM J. Optim.*, 8 (1998), pp. 1132-1152.

[38] D. M. Gay, M. L. Overton and M. H. Wright, A primal-dual interior method for nonconvex nonlinear programming, In *Advances in Nonlinear Programming* (Beijing, 1996), Y. Yuan, ed., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 31-56.

[39] E. M. Gertz and P. E. Gill, A primal-dual trust region algorithm for nonlinear optimization, *Math. Programming*, 100 (2004), pp. 49-94.

[40] D. Goldfarb, R. Polyak, K. Scheinberg and I. Yuzefovich, A modified barrier-augmented Lagrangian method for constrained minimization, *Comput. Optim. Appl.*, 14 (1999), pp. 55-74.

[41] N. I. M. Gould, D. Orban, A. Sartenaer and Ph. L. Toint, Superlinear convergence of primal-dual interior point algorithms for nonlinear programming, *SIAM J. Optim.*, 11 (2001), pp. 974-1002.

[42] N. I. M. Gould, D. Orban and Ph. L. Toint, An interior-point l1-penalty method for nonlinear optimization, RAL-TR-2003-022, Computational Science and Engineering Department, Rutherford Appleton Laboratory, Chilton, Oxfordshire, England, 2003.

[43] C. C. Gonzaga, E. Karas and M. Vanti, A globally convergent filter method for nonlinear programming, *SIAM J. Optim.*, 14 (2003), pp. 646-669.

[44] I. Griva, D. F. Shanno and R. J. Vanderbei, Convergence analysis of a primal-dual interior-point method for nonlinear programming, *Optimization Online (http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2004/07/913.html)*, July, 2004.

[45] X. Liu and J. Sun, A robust primal-dual interior point algorithm for nonlinear programs, *SIAM J. Optim.*, 14 (2004), pp. 1163-1186.

[46] D. Q. Mayne and E. Polak, Feasible direction algorithms for optimization problems with equality and inequality constraints, *Math. Programming*, 11 (1976), pp. 67-80.

[47] J. M. Moguerza and F. J. Prieto, An augmented Lagrangian interior-point method using directions of negative curvature, *Math. Programming*, 95 (2003), pp. 573-616.

[48] E. O. Omojokun, Trust region algorithms for nonlinear equality and inequality constraints, *PhD thesis*, Department of Computer Science, University of Colorado, Boulder, 1989.

[49] D. F. Shanno and R. J. Vanderbei, Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: orderings and high-order methods, *Math. Programming*, 87 (2000), pp. 303-316.

[50] G. Sporre and A. Forsgren, Relations between divergence of multipliers and convergence to infeasible points in primal-dual interior methods for nonconvex nonlinear programming, Tech. Report TRITA-MAT-02-OS7, Department of Mathematics, Royal Institute of Tech- nology (KTH), Stockholm, Sweden, 2002.

[51] A. L. Tits, A. Wachter, S. Bakhtiari, T. J. Urban and C. T. Lawrence, A primal-dual interior-point method for nonlinear programming with strong global and local convergence properties, *SIAM J. Optim.*, 14 (2003), pp. 173-199.

[52] P. Tseng, A convergent infeasible interior-point trust-region method for constrained minimization, *SIAM J. Optim.*, 13 (2002), pp. 432-469.

[53] M. Ulbrich, S. Ulbrich and L. N. Vicente, A globally convergent primal-dual interior-point filter method for nonlinear programming, *Math. Programming*, 100 (2004), pp. 379-410.

[54] R. J. Vanderbei and D. F. Shanno, An interior-point algorithm for nonconvex nonlinear programming, *Comput. Optim. Appl.*, 13 (1999), pp. 231-252.

[55] A. Wächter and L. T. Biegler, Failure of global convergence for a class of interior point methods for nonlinear programming, *Math. Programming*, 88 (2000), pp. 565-574.

[56] A. Wächter and L. T. Biegler, Line search filter methods for nonlinear programming: Motivation and global convergence, Res. Report RC 23036, IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown, accepted by SIAM J. Optim., 2004.

[57] A. Wächter and L. T. Biegler, Line search filter methods for nonlinear programming: Local convergence, Res. Report RC 23033, IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown, accepted by SIAM J. Optim., 2004.

[58] A. Wächter and L. T. Biegler, On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming, Res. Report RC 23149, IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown, accepted by Math. Programming, 2004.

[59] R. A. Waltz, J. L. Morales, J. Nocedal and D. Orban, An Interior Algorithm for Nonlinear Optimization that Combines Line Search and Trust Region Steps, Tech. Report, Optimization Technology Center, Northwestern University, Evanston, IL, 2003, to appear in Math. Programming.

[60] H. Yamashita, A globally convergent primal-dual interior-point method for constrained optimization, *Optim. Methods Softw.*, 10 (1998), pp. 443-469.

[61] H. Yamashita and H. Yabe, An interior point method with a primal-dual quadratic barrier penalty function for nonlinear optimizaiton, *SIAM J. Optim.*, 14 (2003), pp. 479-499.

[62] H. Yamashita, H. Yabe and T. Tanabe, A globally and superlinearly convergent primal-dual interior point trust region method for large scale constrained optimization, *Math. Programming*, 102 (2004), pp. 111-151.