Projeto de Pesquisa em Iniciação Científica

Introdução aos métodos multigrid para resolução de sistemas lineares e não lineares

Aluno: Gabriel Haeser - RA: 001744
Orientadora: Prof. Dra. Márcia A. Gomes-Ruggiero

1 Resumo

A proposta deste projeto é o estudo de técnicas de Multigrid para resolução dos sistemas lineares e não lineares que resultam da discretização de Problemas de Valor de Contorno. O objetivo do trabalho é uma introdução ao tema que permita ao aluno entrar em contato com esta técnica, desenvolver programas em MatLab para resolver problemas de valor de contorno que modelam alguns problemas aplicados, como o Problema de Bratu e o Problema de Convecção Difusão.

Desta forma, o projeto inclui etapas que envolvem estudo teórico, elaboração de programas computacionais e resolução de problemas aplicados, possibilitando ao aluno o desenvolvimento completo de um trabalho de pesquisa em Matemática Aplicada.

2 Justificativa e Objetivos

A resolução de sistemas não lineares é um tema bastante frequente nas pesquisas realizadas pelo grupo de Otimização do Departamento de Matemática Aplicada e sistemas resultantes da discretização de problemas de valor de contorno têm sido usados em nossos trabalhos como fonte de problemas teste para avaliação de algoritmos, [3], [4].

As técnicas ou métodos Multigrid foram originalmente propostos ([1], [2], [5], [7]) para a resolução de problemas de valor de contorno. Atualmente, os fundamentos básicos desta técnica têm sido também empregados para resolução de sistemas algébricos que modelam outros problemas aplicados além dos problemas de valor de contorno.

A elaboração deste projeto possibilitará ao aluno um amadurecimento teórico e computacional em métodos para resolução de sistemas lineares e não lineares e principalmente o estudo e avaliação das técnicas Multigrid.

O aluno possui pré–requisitos para a elaboração do projeto pois o estudo da resolução numérica de equações diferenciais é realizado nas disciplinas: MS411 –Cálculo Numérico, cursada no 2o. semestre de 2001 e o estudo de sistemas lineares e não lineares é realizado nas disciplinas MS411 e MS512–Análise Numérica I, cursada no 1o. semestre de 2002. A técnica Multigrid constitui um tema novo pois não está incluida nas ementas das disciplinas, mas, o aluno possui embasamento teórico para entender os princípios teóricos e ferramentais requeridos pela técnica.

O objetivo final é que o aluno adquira o conhecimento básico desta técnica e que possa aplicá–la à resolução de alguns problemas aplicados através de um algoritmo que será elaborado e programado dentro deste projeto. Além disto, poderá comparar os resultados obtidos com métodos tradicionais de resolução.

O aluno já é bolsista de iniciação científica (bolsa PIBIC/CNPq) e tem demonstrado bastante interesse e dedicação para a pesquisa. Além disto, seu rendimento no curso de Matemática Aplicada é acima da média, e por esta razão, tem condições de desenvolver um bom trabalho neste projeto de pesquisa.

3 Detalhamento do Tema

A proposta dos métodos Multigrid é a resoluçẽ́m disto, quanto menor for o espaçamento, pior será o n

desta matriz, dificultando fortemente a resolução do sistema linear, quer seja através de um método direto ou iterativo.

Em técnicas multigrid a proposta fundamental é trabalhar não apenas sobre a malha resultante da discretização do problema com espaçamento h, mas, com malhas mais grossas (*coarse grids*), obtidas ao se usar espaçamentos maiores: $2h, 4h, \dots$. A vantagem nestes casos, é que os sistemas lineares resultantes serão menores, e a matriz de coeficientes será melhor condicionada. Contudo, existe a necessidade de se definir operadores que permitam a transição de uma malha para a outra: *operadores de Prolongação ou Interpolação* e *operadores de Restrição.*

Exemplificando: supondo um problema em duas dimensões tendo como espaço domínio o quadrado: $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$. Ao se definir $h = 1/64$, a malha do problema será constituída por $3969 = 63^2$ pontos, que seriam os pontos internos do quadrado, eliminando aqueles em que uma das componentes é igual a 0 ou 1 pois estes pontos estão no contorno que possui valor conhecido. Neste caso o sistema resultante possui 3969 variáveis e podemos denotar por u_h uma aproximação para a solução sobre esta malhaa. Em uma malha, para o mesmo problema, obtida com $\overline{h} = 2h = 1/32$ terá $961 = 31^2$ pontos e portanto, o sistema linear será menor que o anterior, e podemos denotar por u_{2h} uma aproximação para a solução sobre esta malha. A troca da malha h para a malha $2h$ implica em obter a solução u_{2h} correspondente à solução u_h e este processo é realizado através de um operador linear de *Restrição.* Caso a passagem seja da malha $2h$ para a malha h o operador usado será o de *Prolongação* ou *Interpolação.*

A técnica multigrid, resolve iterativamente o sistema de equações discretizadas sobre uma determinada malha através de sequências de etapas em malhas diferentes, mais grossas: $h, 2h, 4h, \dots.$ tomando vantagem entre as relações das diferentes discretizações de um mesmo problema contínuo. Pode–se interpretar o procedimento de se trabalhar em malhas mais grossas como uma forma de acelerar a convergência do método iterativo escolhido para a resolução do sistema linear original. As iterações na malha mais fina (malha original com espaçamento h) serão necessárias para corrigir a precisão atingida na solução gerada pelas malhas mais grossas.

Um algoritmo pode ser composto de modo a realizar iterações em diferentes níveis, sendo que se a sequência de malhas resultar em uma malha com poucas variáveis, o sistema linear resultante pode ser resolvido exatamente através de um método direto, e já que este sistema também é uma aproximação do problema contínuo original sua solução pode ser usada como aproximação para as iterações do método iterativo que será aplicado à malha imediatamente acima desta. Pode–se trabalhar com a forma mais simples da composição de malhas que é o caso em que o algoritmo trabalha sobre duas malhas apenas: h e $2h$.

Para o caso não linear, as idéias centrais da técnica se aplicam naturalmente, pode–se escolher um método tradicional para a resolução do sistema, como o método de Newton e a proposta é semelhante ao caso linear, envolvendo a interação entre aproximações obtidas em malhas grossas e malhas mais finas.

4 Cronograma e Plano de Trabalho

- 1a. etapa: setembro/2002 à março/2003: Técnicas multigrid aplicadas a sistemas lineares:
    1. elementos de multigrid; operadores prolongação e restrição;
    2. formas de composição de algoritmos com técnicas multigrid: V-cycle e W-cycle;
    3. propor um algoritmo e aplicá–lo a resolução de problemas de valor contorno;
    4. elaboração do relatório desta etapa.

- 2a. etapa: março/2003 à agosto/2003: Técnica multigrid aplicadas a sistemas não lineares:
    1. pesquisar alguns problemas clássicos de Valor de Contorno: Problema de Bratu e Convecção–Difusão, entender o significado físico das equações e propor saídas do programa computacional através de gráficos da superfície e de curvas de nível que possibilitem a interpretação da solução obtida;
    2. aplicação das idéias Multigrid estudadas na primeira etapa para o caso de sistemas não lineares, usando o método de Newton como o método iterativo para o sistema não linear;
    3. elaboração do relatório final.

5 Material e métodos

O material de apoio teórico é constituído pelos livros citados na bibliografia. Os livros de Briggs [2] e Wesseling [7] e o paper de Brandt [1] trazem uma introdução ao assunto sobre técnicas Multigrid, notadamente o livro [2] que é bastante didático. O material de appoio computacional é composto pelo software MatLab que está instalado nos computadores dos laboratórios do Imecc.

6 Forma de Análise

O acompanhamento do projeto será realizado através de reuniões semanais entre o aluno e a orientadora. Nestas reuniões serão discutidas as dúvidas do material estudado e serão apresentados e avaliados os resultados atingidos. Os gráficos e testes computacionais serão usados para avaliação do desempenho e exatidão do processo. O trabalho final deverá ser apresentado em congressos internos da Unicamp e no Congresso de Matemática Aplicada e Computacional em 2003.

References

[1] Brandt, A., *Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems*, Mathematics of Computation, Vol.31, 138, pp.:333–390.

[2] Briggs, William L., *A Multigrid Tutorial*, SIAM, Philadelphia, 1987.

[3] Gomes–Ruggiero, M.A., Kozakevich D. N. e Martínez, J. M. : *A Numerical Study on Large–Scale Nonlinear Solver*, Computers and Mathematics with Applications, Vol.32, nº 3, págs.: 1–13, 1996.

[4] Friedlander, A., Gomes–Ruggiero, M. A., Kozakevich, D.N, Martínez, J. M., Santos, S. A.: *Solving Nonlinear Systems of Equations by Means of Quasi–Newton Methods with a Nonmonotone Strategy* – Optimization Methods and Software, Vol.8, págs.:25-51, 1997.

[5] Hackbusch, W. and Trottenberg, U (editors), *Multigrid Methods*, Lecture Notes in Mathematics, 960, Springer, 1982.

[6] Knoll, D.A. and Rider, W. J., *A Multigrid Preconditioned Newton-Krylov Method*, SIAM J. Sci. Comput., vol.21, no.2, pp.:691–710.

[7] Wesseling, P., *An Introduction to Multigrid Methods*, John Wiley & Sons, 1991.