Héctor W. Pagán
Profesor de Matemática
Mate 4105

Debemos recordar.
1. Los conjuntos de números
2. Opuesto
3. Valor absoluto
4. Operaciones de números con signo

Los Conjuntos de Números

Conjuntos importantes de números

- **Naturales**: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
- **Cardinales**: $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
- **Enteros**: $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Racionales**: $Q = \{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathrm{Z}$, donde $b \neq 0\}$; Conjunto de decimales finitos y decimales infinitos periódicos.
- **Irracionales**: I conjunto de decimales infinitos no periódicos.
- **Reales**: R unión de los conjuntos racionales e irracionales. Conjunto de todos los números decimales.

Veamos algunos números racionales, irracionales y reales. Un número racional es cualquier número que se puede representar como un cociente de dos enteros, con el denominador distinto de cero.

Ejemplos de números racionales

$\frac{3}{5}, \frac{-2}{3}, \sqrt{9}$

Observe que 0, o cualquier otro número entero. También, es un número racional, ya que puede escribirse como una fracción con un denominador igual a uno. Por ejemplo $0=\frac{0}{1}$ y $5=\frac{5}{1}$.

El número 1.75 puede escribirse como $\frac{175}{100}$ y, por lo tanto, es un cociente de dos enteros.

Como $\sqrt{9}=3$ y 3 es un entero, $\sqrt{9}$ es un número racional.

Todos los números racionales se pueden expresarse como números decimales este será un decimal que se repite o bien que termina.

Ejemplos de decimales que se repiten

- $\frac{2}{3} = 0.6666...$ *El número 6 se repite.*
- $\frac{1}{7} = 0.142857142857...$ *Los números 142857 se repiten en bloque.*
- Ejemplos de decimales que terminan

- $\frac{1}{2} = 0.5$
- $\frac{7}{4} = 1.75$

Para indicar que un dígito o que un grupo de dígitos que se repite, podemos colocar una barra o línea horizontal sobre ellos. Por ejemplo, podemos escribir $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$ y

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

Aunque $\sqrt{9}$ es un número racional, las raíces cuadradas de casi todos los demás números enteros no lo son. La mayoría de las raíces cuadradas tendrán decimales que no terminan ni se repiten cuando se expresan como un número decimal, se les llama **números irracionales.** Algunos ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$. Otro número racional es π. Cuando damos el valor decimal de un número irracional estamos dando una aproximación. Al dar el valor de números irracionales utilizamos el símbolo ≈ significa "es aproximadamente igual a".

$\pi \approx 3.14$

$\sqrt{7} \approx 2.65$

Ejemplo 1

Considere el siguiente conjunto:

$$\left\{-3, 0, \frac{5}{7}, 12.25, \sqrt{7}, -\sqrt{11}, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -17, \pi\right\}$$

Liste los elementos que son:

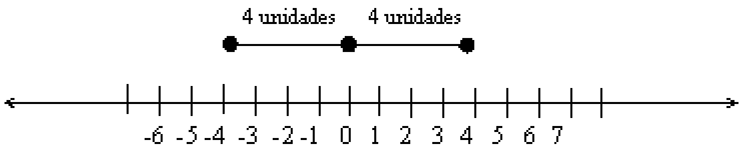
a. números naturales
b. enteros no negativos
c. enteros
d. números racionales
e. números irracionales
f. números reales

Solución

a. Números naturales: 5
b. Enteros no negativos: 0, 5
c. Enteros: –3, 0, 5, –17
d. Los números racionales son todos aquellos que se pueden representar de la forma *a/b, b≠0.* Cada uno de los siguientes números se pueden representar de esta forma y todos son números racionales. –3, 0, 5/7, 12.25, 22/7, 5, 7.1, –17
e. Números irracionales: $\sqrt{7}, \sqrt{11}, \pi$
f. Números reales todos los números del conjunto son números reales.

Opuesto de un número real

El opuesto de un número real es otro número real que está a la misma distancia del cero.



Valor Absoluto

Para determinar el valor absoluto de un número real sin utilizar la recta numérica; utilizamos la siguiente definición.

Valor Absoluto
Si a representa cualquier número real, entonces

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Esta definición lo que nos presenta es que el valor absoluto de cualquier número positivo es él mismo, y el valor absoluto de cualquier número negativo es su inverso aditivo (donde el inverso aditivo de cualquier número negativo siempre es positivo).

Operaciones de Números con signo

Suma de números reales
Existen cuatro combinaciones diferentes al sumar números con signo. Primero se estarán estudiando por separados y luego se estudiando combinadas.

Suma de dos números con el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos)
Sume sus valores absoluto y coloque el signo común antes del resultado

$$\left.\begin{array}{l} (+)+(+)=(+) \\ (-)+(-)=(-) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{en ambos casos se suman} \\ \text{las magnitudes de los números} \end{array}$$

La suma de dos números positivos dará por resultado un número positivo y la suma de dos números negativos dará por resultado un número negativo.

Suma de dos números con signo diferentes (uno positivo y otro negativo)
Reste el valore absoluto menor del valor absoluto mayor. El resultado tendrá el signo del número con el valor absoluto más grande.

$$\begin{array}{l} (+)+(-)= \\ (-)+(+)= \end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{en ambos casos se resta la magnitud mayor de la menor} \\ \text{y se coloca el signo del número mayor en valor absoluto}\end{array}\right.$$

La suma de un número positivo y un número negativo puede dar por resultado ya sea un número positivo, uno negativo o cero. El signo del resultado coincidirá con el signo del número con el valor absoluto más grande.

Ejemplo
Realice la suma: $7+(-12)$
Solución
Como los números que se suman tienen signos diferentes, debemos restar el valor absoluto menor del valor absoluto mayor. Primero determinamos el valor absoluto de cada número.

$$|7| = 7 \qquad\qquad |-12| = 12$$

Ahora se determina la diferencia $12-7=5$. El número –12 tiene un valor absoluto mayor que el 7, por lo tanto el resultado de la suma es negativo.

$$7+(-12)=-5$$

Ejemplo
Realice la suma: $2.3+(-5.7)$
Solución

$$2.3+(-5.7)=-3.4$$

Ejemplo
Realice la suma: $-\frac{8}{21}+\frac{5}{14}$
Solución
Debemos comenzar escribiendo las fracciones con el denominador común mínim0, 42.

$$-\frac{8}{21}+\frac{5}{14}=-\frac{16}{42}+\frac{15}{42}=\frac{-16+15}{42}=-\frac{1}{42}$$

Resta de números reales
Todo problema de sustracción puede expresarse como un problema de suma al utilizar la siguiente regla.

Resta de números reales
$a - b = a + (-b)$

Para restar *b* de *a*, sume el opuesto (o inverso aditivo) de *b* a *a*.

Ejemplo
Realice la resta: $9-12$.
Solución
Para restar $9-12$, Sumamos el opuesto de 12 que es –12, a 9.

$$9-12=9+(-12)$$

Como $9+(-12)=-3$, tenemos que $9-12=-3$.

Ejemplo
Realice la resta: $-12-7$.
Solución
$-12-7=-12+(-7)=-19$.

Ejemplo
Reste –12 de 15
Solución
$15-(-12)=15+12=27$.

Ejemplo
Reste $\frac{2}{7}$ de $-\frac{7}{4}$.
Solución
$$-\frac{7}{4}-\frac{2}{7}=-\frac{7}{4}+\left(-\frac{2}{7}\right)=-\frac{49}{28}+\left(-\frac{8}{28}\right)=\frac{-49+(-8)}{28}=-\frac{57}{28}$$

Ejemplo
Realice la operación $5-|-6|+7-(9-|-10|)$
Solución
Debe comenzar evaluando las expresiones en valor absoluto; luego realice la operación.

$$\begin{aligned}5-|-6|+7-(9-|-10|)&=5-6+7-(9-10)\\&=5-6+7-(-1)\\&=5+(-6)+7+1\\&=-1+7+1\\&=6+1\\&=7\end{aligned}$$

Multiplicar números reales
Las siguientes reglas se utilizan para determinar el signo del producto que resulta cuando se multiplican dos números reales.

Multiplicación de dos números reales

a. Para multiplicar dos números con signos iguales, ambos positivos o ambos negativos, multiplique sus valores absolutos. El resultado será positivo.

$(+)(+) = (+)$

$(-)(-) = (+)$

b. Para multiplicar dos números con signos diferentes, uno positivo y el otro negativo, multiplique sus valores absolutos. El resultado será negativo.

$(+)(-) = (-)$

$(-)(+) = (-)$

Ejemplo

Realice las multiplicaciones

a) $(5.4)(-2.3)$

b) $(-18)\left(-\frac{1}{9}\right)$.

Solución

a) $(5.4)(-2.3) = -12.42$ *El resultado es negativo, los números tienen signos diferentes.*

b) $(-18)\left(-\frac{1}{9}\right) = 2$ *El resultado es positivo, los números tienen signos iguales, ambos son negativos.*

Cuando multiplicamos más de dos números, el producto será negativo cuando exista un número impar de números negativos. El producto será positivo cuando exista un número par de números negativos.

Multiplicación por cero

$a\,.0 = 0.a = 0$

Ejemplo

Realice la multiplicación: $9(5)(-2.23)(0)(12)$.

Solución

Si uno o más factores es 0 el producto es 0. Así $9(5)(-2.23)(0)(12) = 0$

División de números reales

Las reglas de multiplicación y división son muy similares

División de dos números reales

a. Para dividir dos números con signos iguales, ambos positivos o ambos negativos divida sus valores absolutos, el resultado es positivo.

$(+) \div (+) = (+)$

$(-) \div (-) = (+)$

b. Para dividir dos números con signos diferentes, uno positivo y el otro negativo divida sus valores absolutos. el resultado es negativo.

$(+) \div (-) = (-)$

$(-) \div (+) = (-)$

Ejemplo

Divida

a) $-36 \div 6$

b) $-5.45 \div (-0.5)$

Solución

a) $-36 \div 6 = \dfrac{-36}{6} = -6$

b) $-5.45 \div (-0.5) = \dfrac{-5.45}{-0.5} = 10.9$

Ejemplo

Divida: $\dfrac{-5}{12} \div \left|\dfrac{-3}{7}\right|$.

Solución

Como $\left|\dfrac{-3}{7}\right| = \dfrac{3}{7}$ escribimos

$$\frac{-5}{12} \div \left|\frac{-3}{7}\right| = \frac{-5}{12} \div \frac{3}{7}$$

Ahora invertimos el divisor y procedemos como en la multiplicación.

$$\frac{-5}{12} \div \frac{3}{7} = \frac{-5}{12} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-5 \cdot 7}{12 \cdot 3} = \frac{-35}{36}$$

Cuando el denominador de una fracción es un número negativo, por lo regular reescribimos la fracción con un denominador positivo.

Signo de una fracción

para cualquier número a y cualquier número b distinto de cero, tenemos que

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Por ejemplo, cuando tenemos $\dfrac{3}{-4}$, se debe reescribir como $\dfrac{-3}{4}$ o $-\dfrac{3}{4}$