Héctor W. Pagán
Profesor de Matemáticas
Mate 4105– Geometría para maestros de escuela elemental

Lección #3

Polígonos

Objetivos

Definición

Polígonos

Triángulos

Cuadriláteros

Clasificar triángulos

Aplicar propiedades de triángulo isósceles

Aplicar la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

Aplicar propiedades de los rectángulos

Aplicar la suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Figuras en dos dimensiones

Una **curva** es un conjunto de puntos que se puede trazar sobre una superficie plana sin levantar el lápiz o bolígrafo

Una figura es una **curva simple** si trazamos la figura de tal manera que nunca tocamos más de una vez.

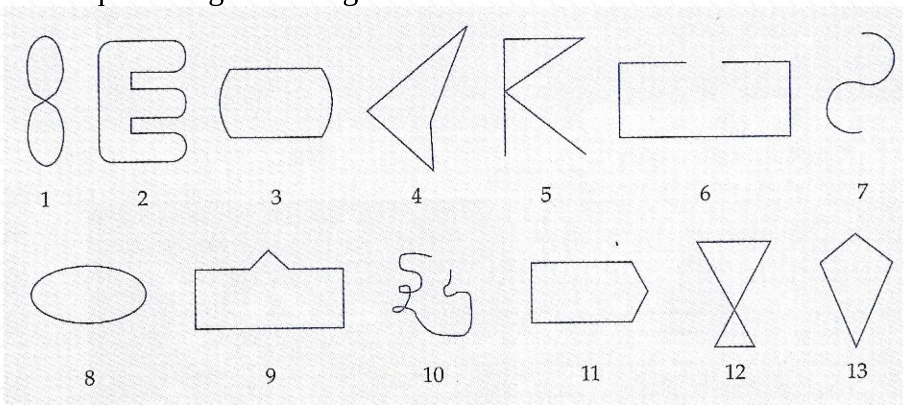
Una figura es una **curva cerrada** si trazamos la figura de tal manera que el punto de inicio es el mismo que el punto final.

Cuando se utiliza la palabra curva, esta palabra se utiliza tanto para figuras con líneas, curvas o combinación de estas.

Las **curvas cerradas simples** son curvas que podemos trazar sin pasar sobre un punto más de una vez y que el punto inicial es el mismo que el punto final

Ejemplo

Clasifique las siguientes figuras en



a) Curvas simples-2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13
b) Curvas cerradas – 1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 12, 13
c) Curvas cerradas simples- 2, 3, 4, 8, 9, 11, 13

Ejercicios

Dibuje una adicional para

a) Curva cerrada simple
b) Curva abierta simple
c) Curva cerrada no simple
d) Curva no cerrada simple

Teorema: las curvas de Jordan- cualquier curva simple cerrada divide al plano en tres regiones disjuntas: la curva misma, el interior de la curva y el exterior de la curva.

Polígono

Polígono es definido como una curva simple cerrada compuesta solo de segmentos de líneas. Un polígono es formado uniendo líneas tal que

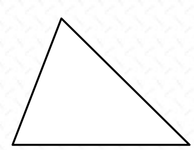
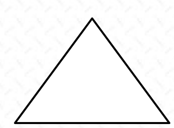
- No hay dos segmentos de líneas que se intersecan excepto en los extremos. (punto inicial y el punto final)
- No hay dos segmentos de líneas con extremos sobre la misma línea.

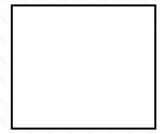
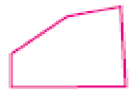
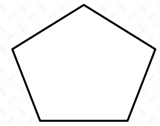
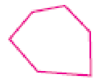
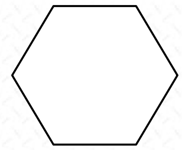
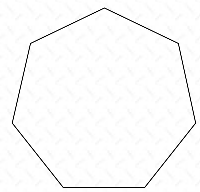
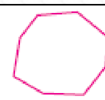
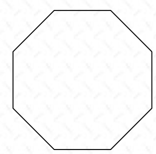
En cualquier polígono, el punto en que dos segmentos se unen es llamado **vértice** en plural vértices. Los segmentos de línea que representa el polígono son llamados **lados**. La palabra polígono tiene un origen griego *poli*- muchos y *gono*- lados.

Un **polígono** es una figura geométrica cerrada con al menos tres segmentos de recta como lados.

Los polígonos son clasificados por el número de lados que tienen. Un polígono de cuatro lados es llamado cuadrilátero y polinomio de ocho lados es llamado octágono. Si un polinomio tiene todos los lados iguales y los ángulos iguales se le llama un polígono regular.

Los siguiente tabla clasifica los polígonos de acurdo al número de lados. Los puntos donde los lados intersecan se llaman **vértices**. Si un polígono tiene lados y ángulos que tienen la misma medida se llaman polígonos regulares

Número de lados	Nombre	Polígonos	Polígonos regulares
3 lados	Triángulo		

4 lados	Cuadrilátero		
5 lados	Pentágono		
6 lados	Hexágono		
7 lados	Heptágono		
8 lados	Octágono		
n lados	Polígono de *n* lados		

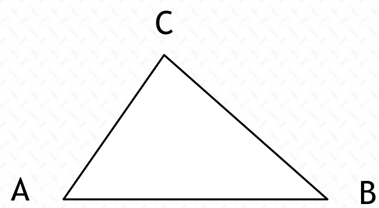
De la tabla anterior podemos notar que el número de lados es igual al número de vértices.

Definición de figuras congruente

Dos figuras son **congruentes** si y solo si tiene la misma forma y mismo tamaños. Dos polígonos son congruentes si y solo si todas sus partes correspondientes son congruentes.

Triángulos

Un triángulo es un polígono con tres lados (y tres vértices). Recuerde que en geometría los puntos se nombran con letras mayúsculas. Utilizamos letras mayúsculas para nombrar los vértices del triángulo. Por ejemplo haciendo referencia al triángulo con vértices A, B y C utilizamos la notación ΔABC (que se lee el triángulo ABC).

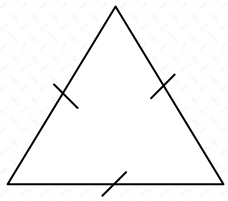


Comentario. Cuando damos nombre a un triángulo podemos comenzar por cualquier vértice y continuar a favor o en contra de las manecillas del reloj. Otras formas de dar nombre al triángulo anterior son ΔACB, ΔBCA, ΔBAC, ΔCAB, ΔCBA.

Clasificación de triángulos

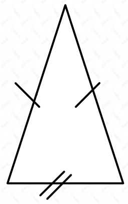
Se pueden clasificar los triángulos de dos formas diferentes

1. por el largo de sus lados
    a. Triángulo equilátero- todos sus lados iguales

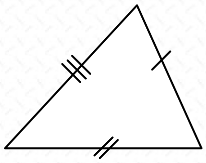
    

    Los lados del triángulo equilátero son congruentes y sus ángulos también son congruentes

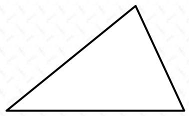
    b. Triángulo isósceles- dos lados iguales

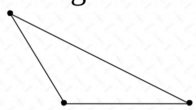
    c. Triángulo escaleno- no tiene lados iguales

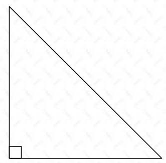
2. por la medida de sus ángulos
    a. Triángulo agudo- tiene tres ángulos agudos



b. Triángulo obtuso- tiene un ángulo obtuso



c. Triángulo rectángulo- tiene un ángulo recto

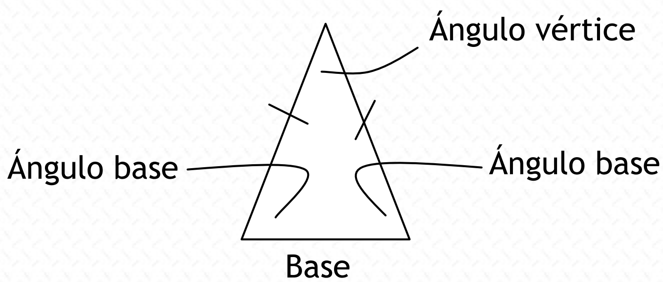


El lado más largo del triángulo rectángulo se llama hipotenusa y los otros dos lados son llamados catetos. La hipotenusa de un triangulo rectángulo siempre es opuesta al ángulo de 90º. Los catetos del triangulo rectángulo están adyacentes al ángulo de $90°$.

Los triángulos rectos tienen aplicaciones en la vida real. Por ejemplo si colocamos una escalera en una pared el ángulo que se forma es un triángulo rectángulo.

Propiedades de un triángulo isósceles

En los triángulos isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes y son llamados ángulos bases. El ángulos formado por los lados congruentes es llamados ángulo del vértice y el tercer lado es llamado base.



Teorema del triángulo isósceles

Si dos lados de un triangulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

Converso del teorema del triángulo isósceles

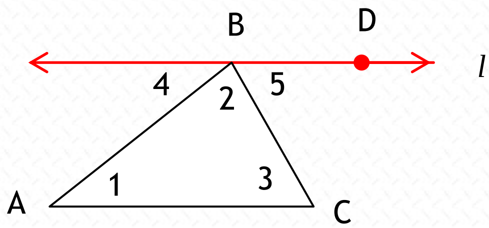
Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos tienen la misma medida y el triangulo es isósceles.

La suma de los ángulos de un triángulo

Ejercicio de exploración

Dibuje varios (3 a 4) triángulos de diferentes formas y tamaños. Mida con el transportados cuidadosamente cada uno de los ángulos de cada triángulo y demuestre qué la suma de los ángulos de cada triángulo es de 180º.

Para probar tan importante observación sobre los triángulos estudiaremos el $\triangle ABC$ como se muestra



La línea l es dibujada sobre el punto B y es paralela a $\overline{AC}$. Tres observaciones son importantes para nuestra prueba.

1. $\angle$ABD está formado por los $\angle 2$ y $\angle 5$. Esto es $m\angle ABD = m\angle 2 + \angle 5$
2. La medida de un ángulo llano es de $180°$. Esto es $m\angle ABD = m\angle 4 = 180^\circ$
3. La $\overleftrightarrow{AB}$ es una línea trasversal que corta las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AC}$ y l los ángulos alternos internos son congruentes esto es $m\angle 1 = m\angle 4$

   Similarmente $\overleftrightarrow{BC}$ es una línea transversal que corta las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AC}$ y l los ángulos alternos internos son congruentes esto es $m\angle 3 = m\angle 5$.

Prueba: Para comenzar la prueba, aplicamos la propiedad de suma de ecuaciones a la ecuación de la observación 1.

$$m\angle ABD = m\angle 2 + \angle 5$$

$$m\angle ABD + m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2 + \angle 5$$

De la observación 2, podemos remplazar $m\angle ABD = m\angle 4$ por $180°$

$$180^\circ = m\angle 4 + m(\angle 2) + m(\angle 5)$$

De la observación 3, podemos remplazar $m\angle 4$ por $m\angle 1$, y

$m\angle 5$ por $m\angle 2$

$$180^\circ = m\angle 1 + m(\angle 2) + m(\angle 3)$$

El resultado indica que la suma de los ángulos $\triangle ABC$ en la figura anterior es de $180°$. Por la generalización de esta prueba, hemos demostrado el hecho que para cualquier triángulo la suma de los ángulos internos de un triángulo es de $180°$.

Ángulos de un triángulo.

La suma de la medida de los ángulos de cualquier triángulo es de $180°$.

Ejemplo

En un $\triangle ABC$, la medida del $\angle A$ excede la medida del $\angle B$ por 32º, y la medida del $\angle C$ es el doble de la medida del $\angle B$. Determine la medida de cada ángulo del $\triangle ABC$.

Análisis del problema

- Debemos considerar tres ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.
- La medida del $\angle A$ excede la medida de $\angle B$ por 32º
- La medida del $\angle C$ es el doble de la medida del $\angle B$
- ¿Medida de cada ángulo?

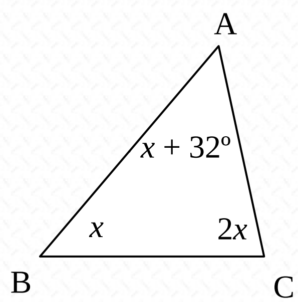
Formular la ecuación

Como la medida del $\angle A$ y $\angle C$ están en términos de la medida del $\angle B$ y $\angle B$ es desconocido utilizamos x para representar la medida del $\angle B$. Ahora se transforma las frases (los valores de $\angle A$ y $\angle C$) a expresiones algebraicas.

La medida del $\angle A = x + 32º$

La medida del $\angle C = 2x$

En esta etapa sería muy conveniente hacer un dibujo de la situación que tenemos



Como sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulos suman 180º .
La ecuación es $(x + 32º) + (2x) + (x) = 180º$

Resolver la ecuación

$(x + 32º) + (2x) + (x) = 180º$

$x + 32º + 2x + x = 180º$

$4x + 32º = 180º$

$4x = 180º – 32º$

$4x = 148º$ se divide por 4 a ambos lados

$x = 37º$

Para encontrar los valores de los ángulos se sustituye $x = 37º$ en las expresiones $x + 32º$ y $2x$

Si $x = 37º$, entonces $x + 32º = 37º + 32º = 69º$

Si $x = 37º$, entonces $2x = 2(37º) = 74º$

Presentar la solución del problema

La medida de los ángulos es:

$\angle A = 69º$

$\angle B = 37º$

$\angle C = 74º$

Verificar el resultado

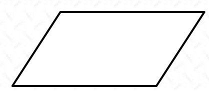
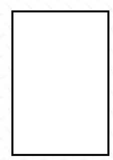
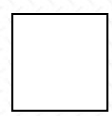
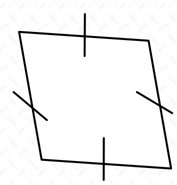
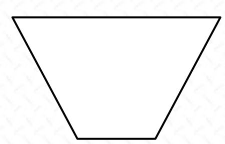
Notemos que 69º excede 32º de 37º y 74º es el doble de 34º y que la suma de 60º +37º +74º =180º .

Cuadrilátero y otros polígonos

Objetivos

Definir e identificar correctamente los cuadriláteros
Aplicar propiedades de los rectángulos
Definir e identificar correctamente trapezoide
Calcular la medida de la suma de los ángulos de un polígono
Determinar la medida de un ángulo de un polígono regular
Determinar la medida de un ángulo exterior de un polígono regular

Un cuadrilátero es un polígono con cuatro lados. Algunos cuadriláteros comunes son:

Cuadrilátero	Características	Polígono
Paralelogramo	polígono donde sus lados opuestos son paralelos	
Rectángulo	paralelogramo con cuatro ángulos rectos	
Cuadrado	rectángulo donde sus lados tienen la misma medida	
Rombo	paralelogramo donde sus lados tienen la misma medida	
Trapecio	cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos	

Se utilizan las letras mayúsculas de los vértices del cuadrilátero para darle nombre al cuadrilátero.
Cuando nos referimos al cuadrilátero, con vértices A, B, C y D, nos referimos como el cuadrilátero ABCD.

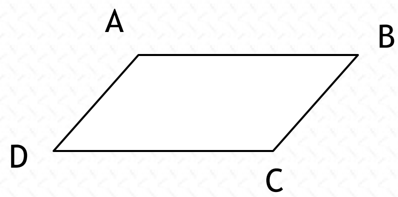


Figura 1

Nota: Cuando nombramos un cuadrilátero (u otro polinomio) podemos comenzar con cualquiera de los vértices. Entonces nos movemos alrededor de la figura a favor o en contra de las manecillas del reloj listando los vértices. Otras formas de nombrar la figura 1 son el cuadrilátero ADCB, el cuadrilátero BADC, el cuadrilátero BCDA, el cuadrilátero CBAD, el cuadrilátero CDAB, el cuadrilátero CBAD y el cuadrilátero DABC.

Un segmento que une dos vértices no adyacentes de un polígono es llamado una **diagonal** del polígono. El cuadrilátero de la figura 2 tiene dos diagonales. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

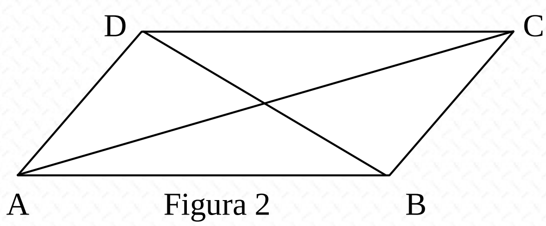


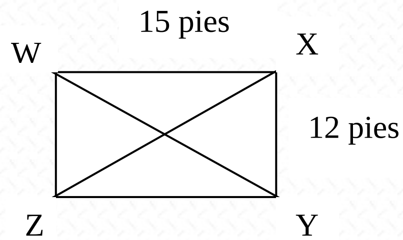
Figura 2

Propiedades de rectángulos.

Recuerde definimos un rectángulo como un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. El rectángulo es probablemente la figura geométrica más reconocible. Por ejemplo la mayoría de las puertas y ventanas tienen forma rectangular. Los límites de un campo de football, de “soccer”. Las monedas de $1, $5 y $20 también tienen forma rectangular. Los rectángulos tienen características importantes.

Propiedades de rectángulos
En cualquier rectángulo:

1. Todos ángulos son ángulos rectos.
2. Los lados opuestos son paralelos.
3. Los lados opuestos tienen el mismo largo.
4. Las diagonales tiene el mismo largo.
5. La intersección de las diagonales es un sus puntos medios.

Ejemplo Un carpintero intenta construir el piso de un merendero rectangular con una base de 12 por 15 pies. ¿Cómo puede asegurarse de que el piso quede a escuadra?
Solución  El carpintero puede usar una cinta de medir para encontrar las diagonales WY y XZ. Si estas diagonales son de igual longitud el piso será un rectángulo y tendrá cuatros ángulos rectos. Entonces la base estará a escuadra.

Ya hemos visto que si un cuadrilátero tiene cuatro ángulos rectos, este es un rectángulo. El siguiente teorema estable las condiciones para que un paralelogramo sea un rectángulo.

Teoremas del paralelogramo

1. Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces el paralelogramo es un rectángulo.
2. Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces el paralelogramo es un rectángulo.

Trapezoide

Un **trapezoide** es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos. Ver la figura 3. Los lados paralelos, en este caso son $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, son llamados las **bases** Los lados no paralelos son llamados **catetos** y los ángulos en ambos lados de la base se llaman **ángulos base**. Si los lados no paralelos son de la misma longitud el trapecio es un **trapecio isósceles**. En un trapecio isósceles los ángulos base son congruentes. Para distinguir entre las dos bases, nos referimos a $\overline{AB}$ como la **base superior** y $\overline{DC}$ la **base inferior**. Los ángulos en la base superior son llamados ángulos base superior y a los ángulos en la base inferior son llamados ángulos base inferior.

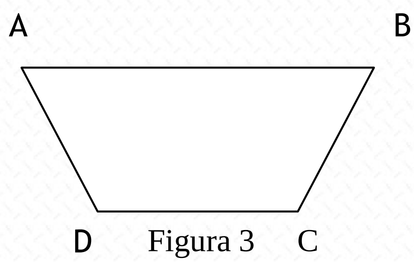


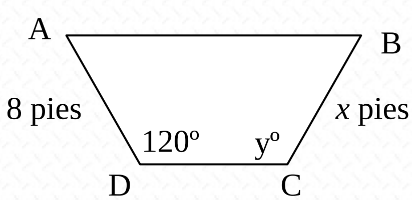
Figura 3

En la figura 3, podemos ver que la recta AD($\overleftrightarrow{AD}$) es como una línea transversal a las líneas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$. Por lo tanto los $\angle A$ y $\angle D$ son ángulos interiores al mismo lado de la transversal, entonces los ángulos son suplementarios. Similarmente $\overleftrightarrow{BC}$ es la transversal que corta la rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$. Por lo tanto $\angle B$ y $\angle C$ son ángulos interiores al mismo lado de la transversal, ellos son también suplementarios. Con esta observación podemos concluir que siempre hay dos pares de ángulos suplementarios en cualquier trapezoide.

Ejemplo

La sección transversal de una zanja de drenaje es trapecio isósceles con $\overline{AB} \| \overline{CD}$.

Determine los valores de *x* y *y*.



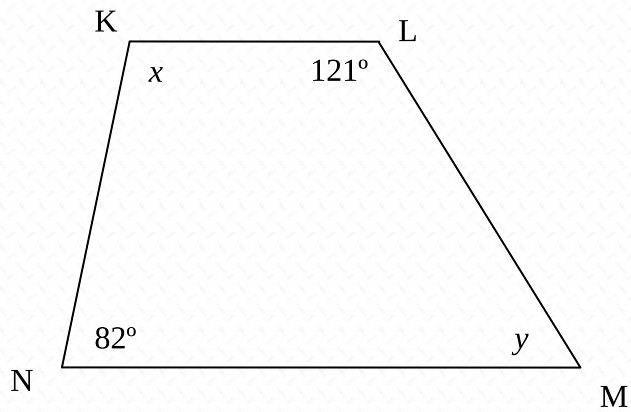
Solución

Como la figura es trapecio isósceles sus lados no paralelos son congruentes por tanto $m\ \overline{AD} = m\ \overline{BC} = 8$.

Como los ángulos bases de un trapecio isósceles son congruentes, $m\ \angle D = m\ \angle C = 120°$.

Ejemplo

En la figura nos referimos al trapezoide KLMN. Si $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$, determine el valor de *x* y *y*.



Solución

Hay dos pares de ángulos suplementarios en el trapezoide: $\angle K$ y $\angle N$, y $\angle L$ y $\angle M$.

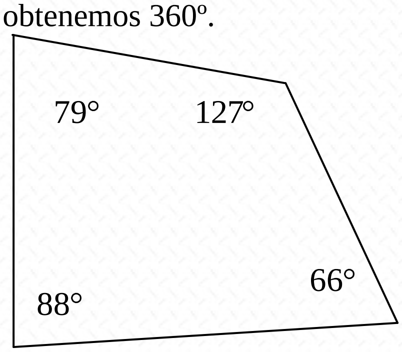
Como la suma de los ángulos suplementarios es de 180º , tenemos

$m\ \angle K + m\ \angle N = 180°$	$m\ \angle L + \text{m}\ \angle M = 180°$
$x + 82° = 180°$	$121° + \text{y} = 180°$
$x = 180° - 82°$	$\text{y} = 180° - 121°$
$x = 98°$	$y = 59°$

Por lo tanto *x* = 98º y *y* = 59º

La suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Si dibujamos un cuadrilátero similar (se estará definiendo más adelante) a la de la figura con ángulos de 79º, 127º,88º y 66º. Cuando sumamos las medidas de los ángulos obtenemos 360º.



$$88° + 66° + 79° + 127° = 360°$$

Podemos notar un hecho de los cuadriláteros: La suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier cuadrilátero es 360 grados. Podemos demostrarlo utilizando el siguiente procedimiento. Si nos detenemos en uno de los vértices y trazamos todas las diagonales posibles desde éste vértice, notamos que dividimos el cuadrilátero en dos triángulos. Como sabemos que los ángulos internos de un triangulo suman 180 y el cuadrilátero tiene dos triángulos entonces la suma de los ángulos del cuadrilátero es de 2 por 180º que es igual a 360º.

Problema de exploración.
Dibuje dos polígonos un pentágono y un hexágono. En cada polígono determine la suma de los ángulos internos de cada polígono. Trace todas las diagonales posibles desde un solo vértice para que determine el número de triángulos y al multiplicarlo por 180 determinara la suma de los ángulos internos de los polígonos.

Ángulos de un polígono La suma ***S***, en grados, de la medida de los ángulos internos de un polígono con ***n*** lados es dada por la fórmula $S = (n-2)180°$

Ejemplo Determine la suma de los ángulos internos de un polígono de 13 lados.
Solución Para determinar la suma de los ángulos internos del polígono de 13 lados, sustituimos 13 por *n* en la fórmula $S = (n-2)180°$. $S = (n-2)180°$ $S = (13-2)180°$ $S = (11)180°$ $S = 1980°$ La suma de los ángulos internos del polígono de 13 las es de 1,980º .

Ejemplo La suma de los ángulos internos de un polígono es de1,080º . Determine el número de lados que tiene el polígono.
Solución Para determinar el número de lados que tiene el polígono utilizamos la fórmula $S = (n-2)180°$ y despejamos para *n*. Podemos sustituir el valor de *S* por 1,080º y resolver para *n*. $S = (n-2)180°$

$$
\begin{aligned}
1080 &= n-2\ \ 180^\circ \\
1080 &= n\ \ 180^\circ - \ 2\ \ 180^\circ \\
1080 &= 180^\circ n - 360^\circ \\
1080-360 &= 180n \\
1440 &= 180n \\
\frac{1440}{180} &= n \\
8 &= n
\end{aligned}
$$

Determinar la medida de un ángulo de un polígono regular

Recordemos que un polígono que todos sus lados tienen la misma medida y todos sus ángulos tiene la misma medida se llama **polígono regular**.

Medida de un ángulo de un polígono regular
La medida de un ángulo **A**, en grados, de un ángulo de un polígono regular con ***n*** lados es dado por la fórmula

$$A = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

Ejemplo
Determine la medida de un ángulo de un polígono regular de 9 lados.

Solución
El polígono regular de 9 lados tiene sus 9 ángulos congruentes. Podemos sustituir $n = 9$ en la fórmula

$$A = \frac{n-2\ \ 180^\circ}{9}$$

$$A = \frac{9-2\ \ 180^\circ}{n}$$

$$A = \frac{7\ \ 180^\circ}{9}$$

$$A = \frac{1260}{9}$$

$$A = 140$$

La medida de cada ángulo es de 149º.

Cuando tenemos la medida de un ángulo de un polígono regular, podemos utilizarla la siguiente fórmula para determinar el número de lados del polígono.

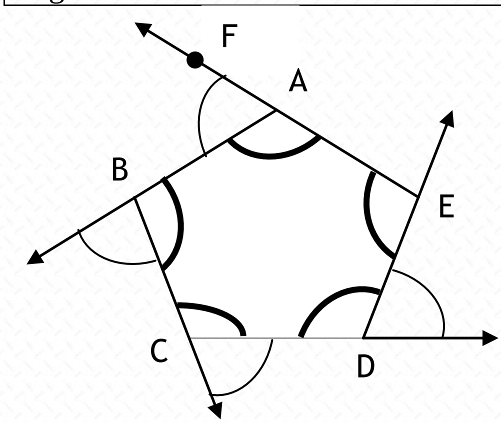
Polígonos regulares
El número de lados ***n*** que un polígono regular tiene es dado por la fórmula $n=\dfrac{360°}{180°-A}$ Donde A es la medida, en grados, de un ángulo del polígono.

Ejemplo La medida de de cada ángulo de un polígono regular es de 150º. ¿Determine el número de lados que tiene el polígono?
Solución Encontramos el número de lados sustituyendo *A* por 150º en la fórmula $n=\dfrac{360°}{180°-A}$ $n=\dfrac{360°}{180°-A}$ $n=\dfrac{360°}{180°-150°}$ $n=\dfrac{360°}{30°}$ $n=12$ El polígono tiene 12 lados.

Ángulos exteriores

El pentágono ABCDE que se muestra en la figura tiene cinco ángulos interiores(los ángulos más pronunciados). Los ángulos marcados sobre los lados extendidos son llamados ángulos exteriores del polígono.

Ángulos exteriores de un polígono
Un ángulo exterior de un polígono es un ángulo que es adyacente y suplementario al ángulo interior.



En la figura, $\angle FAB$ es un ángulo exterior del polígono, porque es adyacente y suplementario a $\angle BAE$.

Supongamos que el pentágono ABCDE es un polígono regular. Para encontrar la medida del ángulo interior *A* que es congruente con los cinco ángulos interiores del pentágono utilizamos la fórmula:

$$A = \frac{(n-2)180°}{n}$$; donde *n* es igual a cinco

$$A = \frac{(5-2)180°}{5}$$

$$A = \frac{(3)180°}{5}$$

$$A = \frac{540°}{5} = 108°$$

La medida de cada ángulo interior del pentágono regular ABCDE es de 108º. Como cada ángulo exterior es suplementario al ángulo interior la medida del ángulo exterior es 180º - 108º =72º. Por ejemplo, $\angle BAE = 108°$ y $m\ \angle FAB = 180° - 108° = 72°$.

La medida de un ángulo exterior de de un polígono regular Si ***A*** es la medida de un ángulo interior y *E* es la medida del ángulo exterior de un polígono regular, entonces *E* = 180º – *A*.

Podemos derivar otra fórmula para la medida de los ángulos exteriores de un polígono regular reemplazando *A* por la medida del ángulo interior por $\frac{(n-2)180°}{n}$ y simplifique.

$$E = 180° - \left[\frac{(n-2)180°}{n}\right]$$

$$E = 180° - \left[\frac{180°n - 360°}{n}\right]$$

$$E = 180° - \left[\frac{180°n}{n} - \frac{360°}{n}\right]$$

$$E = 180° - \left[180° - \frac{360°}{n}\right]$$

$$E = 180° - 180° + \frac{360°}{n}$$

$$E = \frac{360°}{n}$$

La medida de un ángulo exterior de un polígono regular
Si E es la medida de un ángulo exterior de un polígono regular con *n* lados, entonces

$$E = \frac{360°}{n}$$

Como es útil conocer cuánto es la medida de los ángulos interiores de un polígono regular, también es útil conocer cuánto es la suma de los ángulos exteriores de un polígono. Supongamos que tenemos *n* ángulos en un polígono regular con *n* lados, la suma S de los ángulos exteriores del polígono regular es el producto del número de ángulos por *E*,

$$S = nE$$

$$S = \cancel{n}\frac{360°}{\cancel{n}}$$

$$S = 360°$$

La suma de los ángulos exteriores de un polígono regular.
La suma de los ángulos exteriores de un polígono regular es de 360º.