Lección #6

Círculos

Aprenderemos sobre

- Círculos
- Circunferencia de un círculo
- Área de un círculo
- Largo de un arco
- Área de un sector

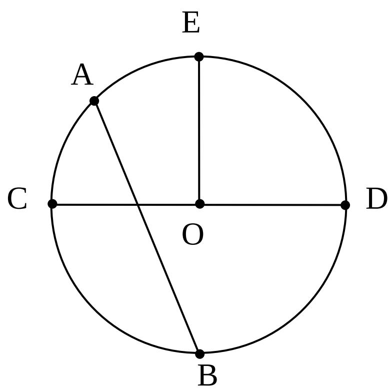
Círculos

Círculo
Un círculo es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto llamado centro.

Un segmento trazado desde el centro del círculo a un punto del círculo es llamado **radio**. Todos los radios trazados en un círculo tienen la misma medida.

Una **cuerda** de un círculo es un segmento de línea que conecta dos puntos de un círculo. Un **diámetro** es una cuerda que pasa a través del centro del círculo. Como el diámetro *D* de un círculo es dos veces el largo del radio *r*, tenemos $D = 2r$.

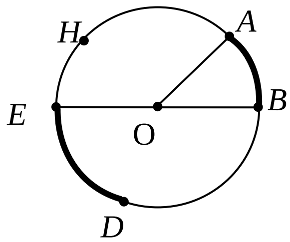
Estas definiciones las podemos ilustrar en la siguiente figura



De la figura podemos notar los siguientes segmentos:

- $\overline{EO}$ es un radio
- $\overline{CD}$ es un diámetro
- $\overline{AB}$ es una cuerda

Cualquier parte de un círculo es llamado un **arco**. En la figura la parte del círculo desde el punto A al punto B es llamado $\overset{\frown}{AB}$ (el arco *AB*). $\overset{\frown}{CD}$ es parte del círculo desde el punto *C* al punto *D*. Un arco que es la mitad del círculo es un **semicírculo**.



Semicírculo
Un semicírculo es un arco de un círculo cuyos puntos extremos son los puntos extremos de un diámetro.

Si, el punto *O* es el centro del círculo en la figura anterior entonces el segmento *BE* ($\overline{BE}$) es el diámetro y $\overset{\frown}{BAE}$ es un semicírculo. La letra que está en el centro la *A* distingue al semicírculo $\overset{\frown}{BAE}$ del semicírculo $\overset{\frown}{BDE}$.
Un arco que es más pequeño que un semicírculo es un **arco menor**. Un arco que es más largo que un semicírculo es un **arco mayor**. $\overset{\frown}{BA}$ es un arco menor y $\overset{\frown}{BDA}$ es un arco mayor.

Nota: Es posible nombrar el arco mayor de más de una forma. Por ejemplo en la figura anterior el arco mayor $\overset{\frown}{BDA}$ es la parte del círculo del punto *B* al punto *A* que pasa por el punto *D*. Dos otros nombres para este arco mayor son $\overset{\frown}{BEA}$ y $\overset{\frown}{BHA}$.

Circunferencia de un círculo

De historia antigua, los matemáticos conocen que la razón de la distancia alrededor de un círculo (la circunferencia) dividido por el largo de su diámetro es aproximadamente a 3. En el primer libro de los Reyes, capítulo 7 de la Biblia describe el borde de un tanque de bronce que es de 15 pies de un borde a otro y 45 pies de circunferencia, y $\frac{45}{15} = 3$. Hoy día, tenemos un mejor valor para la razón entre el diámetro y la circunferencia, π(pi). Si *C* es la circunferencia de un círculo y *D* es el largo de su diámetro, entonces

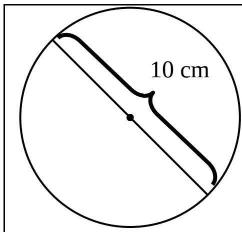
$$\pi = \frac{C}{D}; \text{ donde } \pi = 3.141592653589...$$

Si multiplicamos ambos lados de $\pi = \frac{C}{D}$ por *D*, obtenemos la siguiente fórmula.

Circunferencia de un círculo
La circunferencia de un círculo es dada por la siguiente fórmula
$C = \pi D$; donde *C* es la circunferencia del círculo y *D* es el largo del diámetro

Como e largo del diámetro es dos veces el largo del radio, podemos sustituir 2*r* por *D* en la fórmula $C = \pi D$ para obtener la fórmula equivalente a $C = 2\pi r$

Ejemplo
Encuentre la circunferencia de un círculo que tiene un diámetro de 12 centímetros.



Solución
Al examinar la figura notamos que el diámetro es de 10 centímetros
Al sustituir obtenemos

$$C = \pi d$$

$$C = \pi \ \ 10$$

$$C \cong 3.14 \ \ 10$$

$$C \cong 31.4$$

La circunferencia del círculo es aproximadamente 31.4 cm.

Ejemplo
Cálculos para determinar el número de vueltas de una llanta.
¿Cuántas veces girará una llanta de 15 pulgadas cuando el automóvil hace un recorrido de 25 milla?
Solución
Primero encontremos la circunferencias de la llanta

$$C = \pi d$$

$$C = \pi \ \ 15$$

$$C = 15\pi$$

La circunferencia de la llanta es de 15π.
Ahora debemos convertir las 25 millas a pulgadas usamos dos factores de conversión de unidades

$$25 \ \cancel{\text{millas}} \times \frac{5280 \ \cancel{\text{pies}}}{1 \ \cancel{\text{milla}}} \times \frac{12 \text{ pulgadas}}{1 \ \cancel{\text{pies}}}$$

$$25(5280)(12) \text{ pulgadas}$$

La distancia total del recorrido en pulgadas es de 25(5280)(12).
Ahora dividimos la distancia total del recorrido entre la circunferencia de la llanta para obtener
Número total de vueltas de la llanta

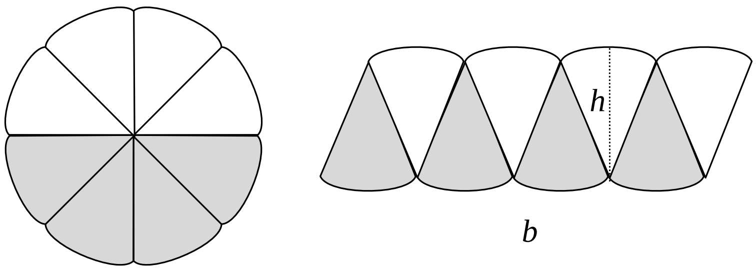
$$= \frac{25 \ \ 5280 \ \ \ 12}{15\pi}$$

$$= 33613.52398$$

La llanta da alrededor de 33614 vueltas.

Área de un círculo

Si dividimos el círculo como se muestra en la figura en número par de pedazos (pedazos de pizzas) y luego las reorganizamos como se muestra en la figura, obtenemos una figura muy parecida a un paralelogramo. La figura tiene una base de *b* que es la mitad de la circunferencia del círculo y su altura es *h* que es cerca del mismo largo del radio del círculo.



Si dividimos el círculo en más y más pedazos. La figura se parecería más y más a un paralelogramo, y podríamos utilizar la fórmula de área del paralelogramo

$A = bh$; donde $b = \frac{1}{2}C$ y $h = r$

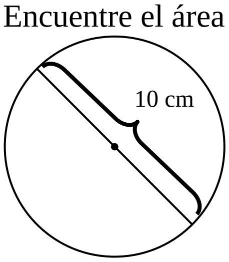
$A = \frac{1}{2}Cr$

$A = \frac{1}{2} \; 2\pi \; r \; r$

$A = \pi \; r^2$

Área de un círculo
El área de un círculo con radio *r* es dado por la fórmula
$A = \pi \; r^2$

Ejemplo
Encuentre el área del círculo hasta la décima más cercana.



Solución
Según la figura observamos que el diámetro es de 10 cm y como la longitud del diámetro es dos veces el radio sabemos que el radio es de 5 centímetros. Para determinar el área del círculo sustituimos r por 5 en la fórmula de área del círculo

$A = \pi r^2$

$A = \pi 5^2$

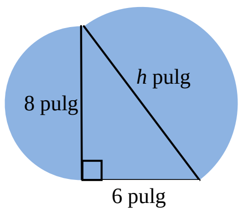
$A = 25\pi$

$A = 78.53981634$

El área del círculo es 78.5cm^2 hasta la decima más próxima.

Ejemplo

Determine el área sombreada en la figura.



Solución

La figura es una combinación de un triángulo y dos semicírculos.

Si observamos h es la hipotenusa de un triangulo rectángulo y el diámetro del semicírculo.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para encontrar *h*.

$h = \sqrt{a^2 + b^2}$

$h = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$h = \sqrt{36 + 64}$

$h = \sqrt{100}$

$h = 10$

Ahora calculamos las áreas por separado

$A_{trian} = \frac{1}{2} bh$

$A_{trian} = \frac{1}{2}\ 6\quad 8$

$A_{trian} = \frac{1}{2}\ 48$

$A_{trian} = 24$

Área del semicírculo con diámetro de 8 pulgadas.

$C_{r=4} = \frac{1}{2}\pi r$

$C_{r=4} = \frac{1}{2}\pi\ \ 4^{\ 2}$

$C_{r=4} = 8\pi$

Área del semicírculo con diámetro de 10 pulgadas.

$C_{r=5} = \frac{1}{2}\pi r$

$C_{r=5} = \frac{1}{2}\pi \; 5^{2}$

$C_{r=5} = 12.5\pi$

El área total es

$A_{total} = 24 + 8\pi + 12.5\pi$

$A_{total} \approx 88.4026494$

El área total es 88.40 $pulg^2$ hasta la centésima más cercana.

Pintura de plataforma para helicóptero

La pintura anaranjada está disponible en recipientes de un galón que cuestan $19 cada uno y cada galón cubrirá 375 pies^2. Para calcular cuánto costará la pintura para cubrir una plataforma circular para helicóptero de 60 pies de diámetro, calculamos primero el área de la plataforma del helicóptero.

$$\begin{aligned} A &= \pi \mathbf{r}^2 \\ &= \pi(\mathbf{30})^2 \quad \text{Sustituimos } r \text{ con la mitad de 60.} \\ &= 30^2\pi \end{aligned}$$

El área de la plataforma es $30^2\pi$ pies^2. Como cada galón de pintura cubre 375 pies^2, podemos encontrar el número de galones de pintura necesarios dividiendo $30^2\pi$ entre 375.

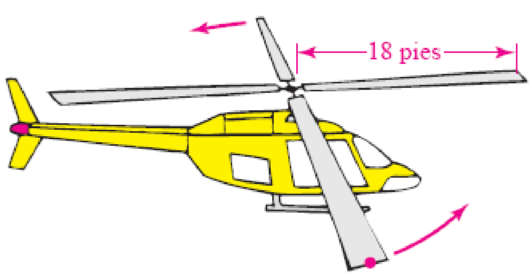
$$\text{Número de galones necesarios} = \frac{30^2\pi}{375}$$

Para aproximar el valor de $\frac{30^2\pi}{375}$ usando una calculadora científica, introducimos

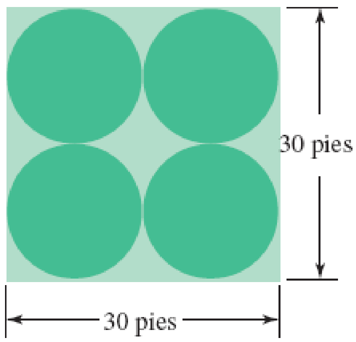
30 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 375 $\boxed{=}$ $\boxed{7.539822369}$

El resultado es aproximadamente 7.54. Como la pintura viene sólo en galones completos el pintor necesitará 8 galones. El costo de la pintura será 8($19) o $152.

HELICÓPTEROS ¿Qué distancia recorre la punta de una hélice cuando da una vuelta completa?

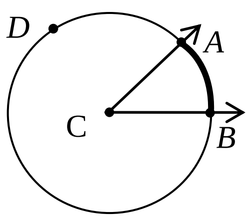


DISEÑO DE PAISAJES Vea la ilustración. ¿Qué tanto del césped no se riega por los rociadores colocados en el centro de cada círculo?



Largo de un arco

Un ángulo central de un círculo es un ángulo cuyos vértice esta en el centro del círculo. En la figura el círculo tiene centro C. En este círculo, $\angle ACB$ con vértice C, es un ángulo central.



En la figura anterior, los lados del ángulo central $\angle ACB$ intercepta el círculo para crear un arco menor $\overset{\frown}{AB}$ y arco mayor $\overset{\frown}{ADB}$. La medida en grados del arco es definido igual a la medida del ángulo correspondiente al ángulo central. Esto es que si la $m(\angle ACB) = 45^\circ$ entonces, la medida del $\overset{\frown}{AB}$ es 45° y podemos decir que $m\ \overset{\frown}{AB} = 45^\circ$.

Recuerde que la medida de un ángulo de una revolución completa es de 360°. Podemos utilizar este hecho para determinar la medida del arco mayor $\overset{\frown}{ADB}$ de la figura anterior. En general la medida del arco mayor es la diferencia de 360° y la medida asociado al arco menor.

$m\ \angle ADB = 360^\circ - m\ \angle \overset{\frown}{AB} = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

Podemos utilizar la siguiente fórmula para determinar el largo de un arco de un círculo.

Largo de un arco

Si un arco tiene una medida *q* (en grados) y radio *r*, su largo *L* es dado por

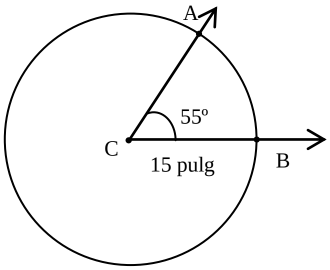
$L = \frac{q}{360°} \cdot 2\pi\, r$; donde L y r tienen las mismas unidades de medidas.

Nota: El largo de un arco de un círculo es una fracción de la circunferencia de un círculo ($2\pi\, r$). La fracción es una razón de la medida del arco asociado con una revolución completa, $360°$.

Ejemplo

Encuentre el arco del círculo.

Determine el largo del arco menor $\overset{\frown}{AB}$ como se muestra en el círculo con centro *C*.



Solución

$\overset{\frown}{AB}$ corresponde al ángulo central $\angle ACB$. Como el $m\ \angle ACB\ = 55°$, $m\ \overset{\frown}{AB}\ = 55°$.

Determinemos el largo del $\overset{\frown}{AB}$ usando la fórmula $L = \frac{q}{360°} \cdot 2\pi\, r$; donde q = 55º y

r = 15pulg

$L = \frac{q}{360°} \cdot 2\pi\ r$

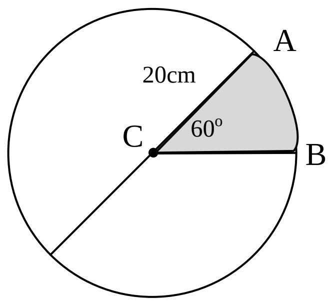
$L = \frac{55°}{360°} \cdot 2\pi\ 15$

$L = 14.39896632895$

El largo del arco $\overset{\frown}{AB}$ es exactamente ____ pulgadas. El valor aproximado es 14.

Área de un sector

La región sombreada en la figura es llamada un sector. El sector en la figura tiene un radio de 20 centímetros, y la medida asociada con el arco es de $60°$



Podemos encontrar el área de un sector usando la siguiente fórmula.

Área de un sector

Si un sector tiene un radio *r*, y si un arco tiene una medida *q*, su área está dada por

$$A = \frac{q}{360°} \cdot \pi r^2$$

Nota: El área de un sector es una fracción del área del círculo $\left(\pi r^2\right)$. La fracción es una razón de la medida del arco asociado con una revolución completa, $360°$.