Nekaj nalog, ki smo jih delali na krožku na gimnaziji Bežigrad

Leto 2003/2004, Irena Majcen

1 Nekaj nalog iz indukcije

1. Dokaži, da za vsako naravno število n velja:

   (a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

   (b) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (3n + 1) = n(n + 1)^2$.

   (c) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n - 2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$.

2. Dokaži, da za naravno število $n \geq 4$ velja $n! > 2^n$, kjer je $n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1$.

3. Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n - 1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n + 1}}.$$

4. *Fibonaccijevo zaporedje* je dano s predpisom $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ in $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da velja

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

5. Dokaži, da za *Fibonaccijeva števila* velja

   (a) $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

   (b) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.