Nekaj nalog, ki smo jih delali na krožku na gimnaziji Bežigrad

Leto 2003/2004, Irena Majcen

1 Deljivost, praštevila

1. Ali obstaja naravno število, katerega produkt števk je 385?
2. Poišči najmanjši naravni števili m in n, s katerima moramo pomnožiti število 864, da dobimo popoln kvadrat oziroma popoln kub.
3. Namesto $\star$ v številu $3145\star$ vstavi cifro, da da dobljeno število pri deljenju s 3 in 5 enake ostanke. Poišči vse možne rešitve.
4. Določi najmanjše naravno število, ki je deljivo s 75 in je sestavljeno samo iz ničel in enic.
5. Določi vsa tromestna števila, da so ta števila in vsota njihovih števk deljiva s 15.

2 Geometrija 1

1. V ravnini je dana premica in na premici različne točke A, B, C tako, da B leži med A in C. Izberimo točki D in E na enem bregu premice ter točko F na drugem, da bodo $\triangle ABD$, $\triangle BCE$ in $\triangle ACF$ enakostranični trikotniki. Dokaži, da središča teh trikotnikov spet določajo enakostraničen trikotnik. AC, na kateri leži točka B.
2. Izračunaj ploščino trikotnika, v katerem je en kot $60°$, drugi $45°$, dolžina najdaljše stranice pa je enaka 1.
3. Dokaži, da je vsota razdalj točke od nosilk stranic pravilnega mnogokotnika neodvisna od mesta točke, če je le točka znotraj mnogokotnika.
4. V trikotniku naj stranica A ne bo daljša od 1, stranica b ne bo daljša od 2 in stranica c ne bo daljša od 3. Kolikšna je največja možna ploščina takega trikotnika?
5. Diagonali konveksnega štirikotnika razdelita četverokotnik na štiri trikotnike. Znane so ploščine treh od štirih trikotnikov. Izračunaj ploščino četverokotnika.

3 Indukcija

1. Dokaži, da za vsako naravno število n velja:
   (a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
   (b) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (3n + 1) = n(n + 1)^2$.
   (c) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n - 2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$.
2. Dokaži, da za naravno število $n \geq 4$ velja $n! > 2^n$, kjer je $n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1$.
3. Dokaži, da za vsako naravno število n velja
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n - 1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n + 1}}.$$

4. *Fibonaccijevo zaporedje* je dano s predpisom $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ in $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da velja

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

5. Dokaži, da za *Fibonaccijeva števila* velja

   (a) $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

   (b) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

4 Geometrija 2

1. Tetivni štirikotnik je trapez. Dokaži, da je ta trapez enakokrak.

2. Dana je krožnica $\mathcal{K}$ s središčem v O in točka A izven nje. Premica AO seka krožnico $\mathcal{K}$ zaporedoma v točkah B in C, tangenta iz točke A pa se je dotika v točki D. Izberimo poljubno tako točko E na premici BD, da leži točka D med B in E. Trikotniku DCE očrtana krožnica seka premico AO v točkah C in F, premico AD pa v točkah D in G. Dokaži, da sta premici BD in FG vzporedni.

3. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ se sekata v točkah A in B. Skupna tangenta krožnic se dotika krožnice $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ zaporedoma v točkah M in N. Izračunaj vsoto $\angle MAN + \angle MBN$.

4. V tetivnem štirikotniku $ABCD$ se diagonali AC in DB sekata pravokotno v točki S. Premica, ki je pravokotna na AB in gre skozi točko S, razpolavlja stranico CD. Dokaži.

5. Na stranici BC trikotnika $\triangle ABC$ je dana točka M. Naj bosta O_1 in O_2 središči krožnic očrtanih trikotnikoma $\triangle ABM$ in $\triangle ACM$. Dokaži, da je $\angle O_1AO_2 = \angle BAC$.