Teorija števil - naloge

Priprave 22.01.2002 - Irena Majcen

Naloge za ogrevanje

Naloge v tem delu so namenjene predvsem dijakom prvega in drugega letnika in ne zahtevajo nobenega posebnega predznanja.

1. Dokaži, da je kvadrat poljubnega lihega števila oblike $8k+1, k \in \mathbf{Z}$.
2. Dokaži, da za vsako celo število n velja $120|n^5 - 5n^3 + 4n$.
3. Dokaži, da vsota kvadratov petih zaporednih celih števil ne more biti popoln kvadrat.
4. Dokaži, da za nobeno celo število n, število $n^2 + 3n + 5$ ni deljivo z 121.
5. Dokaži, da ulomka $\frac{14n+3}{21n+4}$ ni mogoče okrajšati za nobeno celo število n.
6. Izmed 15-ih listov papirja jih določeno število razrežemo na 10 delov. Od vseh dobljenih listov jih določeno število ponovno razrežemo na 10 delov. Ta postopek ponovimo nekajkrat ter na koncu preštejemo 1975 listov. Dokaži, da je bilo štetje napačno.
7. Števila $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$ so manjša od $2n$. Dokaži, da je med njimi vsaj eno število, ki je deljivo z nekim drugim izmed teh števil.
8. Dano je n števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$.Dokaži, da si lahko med njimi izberemo nekaj števil, katerih vsota kvadratov je deljiva z n.
9. Neko število zapišemo v desetiškem sistemu s 300 enicami in določenim številom ničel. Dokaži, da to število ne more biti popoln kvadrat.
10. Zaporedje $1, 1, 2, 3, 7, 22, 155, \ldots$ tvorimo tako, da je vsak njegov člen enak produktu predhodnih dveh povečanemu za 1. Dokaži, da niti eno število tega zaporedja ni deljivo s 4.

Rešitve lahko najdete v knjižici *Kadelburg - Mičič - Jankovič: Elementarna teorija brojeva, Dirihleov princip, Diferencne jednačine.*

Malo mešano

1. Poišči vsa števila, ki so deljiva s 30 in imajo natanko 30 deljiteljev.
2. Pokaži, da je $((x+y)^p)^n \equiv x^{p^n} + y^{p^n}\ (mod\ p)$, kjer je p praštevilo in $n \in \mathbf{N}$.

3. Poišči vse rešitve enačbe $2^n + 7 = k^2$, kjer sta k in n naravni števili.

Celi del

1. Reši enačbo $[\frac{2x+1}{3}] + [\frac{4x+5}{6}] = \frac{3x-1}{2}$ za $x \in \mathbf{R}$.
2. Reši enačbo $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \ldots + [\sqrt[3]{n}] = 2n$.
3. Dokaži, da za vsako naravno število n velja enakost:
$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \left[\frac{n+8}{16}\right] + \ldots = n.$$
4. Dokaži, da za vsako naravno število n velja enakost:
$$\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right].$$
5. Dokaži, da za vsako naravno število n velja enakost:
$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}\right] = \left[\sqrt{16n+20}\right].$$
6. Dokaži, da za vsako nenegativno celo število n velja enakost:
$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{9n+8}\right].$$
7. Dokaži, da funkcija $f(n) = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$ v svoji zalogi vrednosti zgreši natanko popolne kvadrate.

Literatura:
Kadelburg - Mičič - Jankovič: Elementarna teorija brojeva, Dirihleov princip, Diferencne jednačine - Priporočam predvsem prvim in drugim letnikom.
Mičič - Kadelburg: Uvod u teoriju brojeva - Knjižica s teorijo, nalogami in rešitvami, a z eno pomanjkljivostjo = v cirilici!
Engel: Problem solving strategies - Odlična knjiga, pokriva praktično vse teme; slaba stran je le geometrija.
Za ostale knjige išči v cobiss-u npr. materijali za mlade matematičare.