Naloge iz britanskih državnih tekmovanj - priprave v letu 2000/2001 - Irena Majcen

1. Dokaži, da število $3^n + 2 \cdot 17^n, n \in \mathbb{N}$ ni nikoli popoln kvadrat.

2. Dokaži, da $19 \cdot 8^n + 17$ ni praštevilo za noben $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Poišči vse a, b in c, da velja izraz $(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c)$.

4. Poišči vse celoštevilske rešitve naslednjih dveh enačb

$$a^3 + b^3 = 9$$

$$35x^3 + 66x^2y + 42xy^2 + 9y^3 = 9.$$

5. Poišči vse pare (m, n) pozitivnih števil, ki zadoščajo naslednjima pogojema:
a) Dve cifri m-ja sta enaki kot cifri na istem mestu n-ja, drugi dve cifri m-ja pa sta za eno manjši kot istoležni cifri n-ja.
b) m in n sta štirimestna kvadrata.

6. Poišči šestmestna naravna števila z lastnostjo, da je:
a) število iz zadnjih treh števk števila n za 1 večje kot število iz prvih treh števk (n lahko izgleda tako 123124),
b) število n je popolni kvadrat.

7. Za vsako naravno število c je definirano zaporedje $a_1 = 1$, $a_2 = c$ in $a_n = (2n + 1)a_{n-1} - (n^2 - 1)a_{n-2}$. Za katere vrednosti c ima zaporedje lastnost, da a_i deli a_j za vsak i manjši od j?

8. Kvadrat števila 20 ima isto število števk različnih od nič kot 20.
a) Ali obstaja še kakšno dvomestno število poleg 10, 20, 30 s takšno lastnostjo?
b) Ali poleg 100, 200 in 300 obstaja še kakšno tromestno število s takšno lastnostjo?

9. Določi najmanjšo vrednost izraza $x^2 + 5y^2 + 8z^2$, kjer so x, y, z realna števila, ki zadoščajo pogoju $yz + zx + xy = -1$.

10. Pokaži, če sta x in y naravni števili in je $x^2 + y^2 - x$ deljivo z $2xy$, potem je x popoln kvadrat.

11. Dokaži, če sta x in y racionalni števili, ki zadostujeta enačbi $x^5 + y^5 = 2x^2y^2$, potem je $1 - xy$ kvadrat racionalnega števila.

Rešitve

1. Opazimo, da velja $3^4 \equiv 1$ $(mod\ 10)$ in $17^4 \equiv 1$ $(mod\ 10)$ in tako ločimo 4 možnosti: če je $n = 4k + 1$ potem je $3^n = 3^(4k + 1) \equiv 3^1$ (10) in $2 \cdot 17^{4k+1} \equiv 2 \cdot 17 \equiv 4$ (10), torej je vsota $3^n + 2 \cdot 17^n \equiv 3 + 4 = 7$ (10); če je $n = 4k + 2$ potem je $3^n = 3^(4k + 2) \equiv 3^2 = 9$ (10) in $2 \cdot 17^{4k+2} \equiv 2 \cdot 17^2 \equiv 8$ (10), torej je vsota

$3^n+2\cdot 17^n \equiv 9+8 \equiv 7$ (10); če je $n = 4k+3$ potem je $3^n = 3^(4k+3) \equiv 3^3 \equiv 7$ (10) in $2 \cdot 17^{4k+3} \equiv 2 \cdot 17^3 \equiv 6$ (10), torej je vsota $3^n + 2 \cdot 17^n \equiv 6 + 7 \equiv 3$ (10); če je $n = 4k + 4$ potem je $3^n = 3^(4k + 4) \equiv 1$ (10) in $2 \cdot 17^{4k+4} \equiv 2 \cdot 1 = 2$ (10), torej je vsota $3^n + 2 \cdot 17^n \equiv 1 + 2 = 3$ (10). Izraz nam da ostanke 3 in 7 po mod 10, kvadrati pa se končajo na 1, 4, 5, 6, 9 in 0, zato $3^n + 2 \cdot 17^n$ ne more biti popolni kvadrat.

2. V enačbo vstavimo prvih nekaj n-jev in sklepamo o deljivosti in jo nato dokažemo. Za $n = 2k$ velja $8^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1$ $(mod\ 3)$ in $19 \cdot 8^2 + 17 \equiv 19 + 17 = 36 \equiv 0(mod 3)$, torej je za sode n-je deljivo s 3.
   Pa poglejmo lihe n-je. Ker je $8^2 \equiv -1$ $(mod\ 13)$ in $8^4 \equiv 1$ $(mod\ 13)$, dobimo $8^{4k+1} \equiv 8$ $(mod\ 13)$, torej je za $n = 4k+1$ izraz enak: $19\cdot 8^{4k+1}+17 \equiv 19\cdot 8+17 = 169 = 0$ $(mod\ 13)$. Se pravi, da je za $n = 4k + 1$ deljivo s 13. Ostane nam še samo $n = 4k + 3$. Očitno 2 in 3 ne delita takega števila, zato poglejmo deljivost s 5: $8^2 = 64 \equiv -1$ $(mod\ 5)$ in $8^3 \equiv 3^3 = 27 \equiv 2$ $(mod\ 5)$, torej
   $19 \cdot 8^{4k+3} + 17 = 19 \cdot 2 + 17 \equiv (-1) \cdot 2 + 2 \equiv 0$ $(mod\ 5)$. Izraz je za sode n-je deljiv s 3, za lihe pa z 13 oziroma 5. Zato ne more biti praštevilo.

3. **1. način** Najprej zmnožimo in pogledamo koeficiente pri x, ki nam dajo enačbo $b+c = -a-10$ ter proste člene, kjer dobimo $10a+1 = bc$. Iz zadnjih dveh enačb eliminiramo a: $bc+10b+10c+99 = 0$, kar preoblikujemo v $(b+10)(c+10) = 1$. Ločimo dva primera (oba člena sta 1 ali -1), ki nam dasta dve rešitvi za (a, b, c) in sicer $(8, -9, -9)$ in $(12, -11, -11)$.
   2. način V prvotno enačbo najprej vstavimo $x = 10$ in takoj dobimo zvezo $(b + 10)(c + 10) = 1$. Nadaljujemo tako kot pri prejšnji rešitvi.

4. **1. način** Najprej opazimo, da so rešitve prvega dela $a = 2, b = 1$ in $b = 2, a = 1$. Pa pustimo dokaz za pozneje. Pa poglejmo del b). Očitno sta oba dela naloge povezana, zato poskusimo preoblikovat enačbo pod b) v enačbo pod a). Nastavimo $a = Ax + By$ in $b = Cx + Dy$ in to zmnožimo ter primerjamo koeficiente, ki nam dajo enačbe $A^3+C^3 = 35$ in $B^3+D^3 = 9\ldots$. S poskušanjem pridemo do $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$ in $D = 2$.
   Vrnimo se na prvi del dokaza. Če sta a in b obe pozitivni, lahko predpostavimo $a \geq b$ in ocenimo $a^3 < 9$ oziroma $a \geq 2$. Dobimo že znani rešitvi.
   Pa naj bo eno izmed a in b negativno. Naj bo $b = -c,\ c \in \mathbb{N}$. Vendar se lahko prepričamo, da enačba $a^3 - c^3 = 9$ nima rešitev (razstavimo).
   Za del b) iz enačbe $(2x + y)^3 + (3x + 2y)^3 = 9$ sledi $(x, y) \in\ (0, 1), (3, -4)$.
   2. način za del a Uvedemo substitucijo $a + b = u$ in $ab = v$. Potem enačbo preoblikujemo v$9 = a^3 + b^3 = u^3 - 3uv = u(u^2 - 3v)$, kjer dobimo smiselne rešitve za $(a, b) \in\ (2, 1), (1, 2)$ le za $u = 3$ in $v = 2$.
   3. način za del a Enačbo bi radi reševali npr. kot kvadratno enačbo po a, da se znebimo potence a^3 uporabimo substitucijo $b = k - a$, kar nam da enačbo $(3k)a^2 - (3k^2)a + k^3 - 9 = 0$.Diskriminanta $D = 3k(36 - k^3)$ mora biti popolni kvadrat. Diskriminanta je pozitivna le za $0 \leq x < 4$, popolni kvadrat pa le pri $k = 3$, ki na da že znane rešitve.

5. Najprej vemo, da sta oba popolna kvadrata. Torej $n - m = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Potem sta oba desna faktorja liha, ali pa oba soda. Torej sta m in n različne parnosti ali pa je njuna razlika deljiva s 4. Če zapišemo m v obliki

'abcd, kjer so abcd števke, ima n obliko:
I. $ab(c+1)(d+1)$ Naredimo razliko teh dveh kvadratov: $n-m=11$.
$(x+y)(x-y)=11; x+y=11$ in $x-y=1$;
To enačbo rešita le kvadrata 36 in 25. Torej ni rešitev.
II. $a(b+1)c(d+1)$ Razlika teh dveh kvadratov znaša 101, kar pomeni $x=51, y=50$. Torej dobimo $m=2500$ in $n=2601$.
III. $(a+1)bc(d+1)$ Kvadrata se razlikujeta za 1001 = 71113. Dobimo: $x=501, y=500$, kvadrata nista več štirimestna; in $x=75, y=68$, kvadrata sta $n=5625$ in $m=4624$, ter še $x=51$ in $y=40$, $n=2601inm=1600$ in $x=45, y=32, m=1024$ in $n=2025$.
IV. $a(b+1)(c+1)d$ Razlika kvadratov znaša 110. Je deljiva z 2, ni pa s 4, zato tu rešitev ni.
V. $(a+1)(b+1)cd$ Razlika kvadr. znaša 1100=225511. Dobimo pare (x,y) : $(276,274),(60,50),(36,14)$. Edina rešitev za m in n je $(2500,3600)$.
VI. $(a+1)b(c+1)d$. Razl. kv. znaša 1010, kar je sodo in ni deljivo s 4.
Vse rešitve so
$(2500,2601),(4624,5625),(1600,2601),(1024,2025)$ in $(2500,3600)$.

6. Število n lahko zapišemo kot $n=1000x+1+x$, kjer je x neko tromestno število. Naj bo $n=y^2$. Potem $y^2=1000x+x+1$ in to razstavimo kot $(y-1)(y+1)=1001x=13*7*11x$.
Ločimo 6 primerov ($y<1000$):
I. $y+1=143k, y-1=7m$
$k=3, m=61, x=183, n=183184$
II. $y+1=7k, y-1=143m$
$m=4, k=82, X=328, n=328329$
III. $y+1=91k, y-1=11m$
$k=8, m=66, x=528, n=528529$
IV. $y-1=91k, y+1=11m$
$k=3, m=25, X=75$, ni šestmestno.
V. $y+1=77k, y-1=13m$
$k=11, m=65, x=715, n=715716$
VI. $y-1=77k, y+1=13m$
$k=2, m=12, x=24$, ni šestmestno.

7. Pogledamo naslednji člen: $a_3=7c-8$ torej c deli 8. Možnosti za c so 1, 2 ,4, 8.
I. $c=1$. Dobimo zaporedje 1, 1, -1, -24, -240, -3960, torej a_5 ne deli a_6.
II. $c=2$ Zaporedje: 1, 2, 6, 24, 120, ...
Domnevamo: $a_n=na_{n-1}$ kar dokažemo z indukcijo s pomočjo rekurzivne zveze.
III. $c=4$, zaporedje se glasi 1, 4, 20, 120, 840, ...
Domnevamo: $a_n=(n+2)a_{n-1}$ kar spet dokažemo z indukcijo s pomočjo rekurzivne zveze.
IV. $c=8$, zaporedje: 1, 8, 48, 318,.... torej a_3 ne deli a_4.

8. Naj bo $N=10a+b$.
I. $c=0$ in so očitno rešitve le 10, 20, 30. II. c različen od 0, potem sta le zadnja in prva števka kvadrata neničelni. Zapišemo $N^2=10^2a^2+20ab+b^2$. Če b manjši ali enak 3, potem mora biti $a=5$, a vse možnosti: 51, 52, 53 odpadejo.

Če $b=5$, desetice niso 0, če $b=6$, desetice niso 0, če $b=7$ dobimo $a=4$ ali 9, a noben kvadrat ni pravi. Če $b=8$ dobimo $a=4$ ali 9, spet noben kvadrat ni pravi. Pri $b=9$ dobimo $a=4$ ali 9, noben kvadrat ni pravi.
Torej ni druge rešitve.
Za primer tromestnega števila ravnamo podobno...
Pozor, rešitev je, npr. 251 251 = 63001.

9. Poskušamo zapisat dani izraz kot vsoto kvadratov in $yz+zx+xy$. Opazimo $8z^2=(2z)^2+(2z)^2, 5y^2=(2y)^2+y^2$. Recimo da lahko zapišemo z dvema kvadratoma. V prvem kvadratu vzamemo x, v oba kvadrata $2z$, v enega y in v drugega $2y$. S poskušanjem ugotovimo še predznake, da so koeficienti pri xy, yz in zx enaki in negativni.
Dobimo $x^2+y^2+8z^2=(x+2y+2z)^2+(y-2z)^2-4(yz+zx+xy)\geq 0+0+4=4$. Pokazati moramo še, da lahko vrednost 4 ta izraz zavzame. Zato vzamemo enačaj te neenakosti, oba kvadrata sta 0. Sledi $x=-2y-2z$ in $y=2z$. Od tod in iz pogoja $yz+zx+xy=-1$ sledi $x=-3/2, y=1/2$ in $z=1/4$. Za največjo vrednost pa lahko vzamemo $z=0$ in $x=-(1/y)$. Izraz $x^2+y^2+8z^2$ narašča brez kakršne koli meje.

10. **1.način** Opazujmo: če je p praštevilo, ki deli x, potem p deli tudi y. Ker $2xy$ deli x^2+y^2-x sledi, da p^2 deli x.
To seveda ni dovolj. Sedaj pa naj bo p poljubno praštevilo, kjer p^{2k-1} deli x. Zato mora p^{2k-1} deliti y^2. Vemo, da p^k deli y. $2xy=2p^{2k-1}\cdot p^k\cdot q$, kjer je q neko celo število. Ker je k večji ali enak 1 je $2k-1+k$ večje ali enako $2k$ in p^{2k} deli $x2+y2-x$. Očitno deli prva dva člena, zato deli tudi x.
2.način V dani enačbi vidimo kvadratno enačbo dveh spemenljivk. Zapišemo jo kot $x^2+y^2-x-2kxy=0$ in rešimo po y. Ker je y celo, mora biti diskriminanta popolni kvadrat. $D=(2kx)^2-4(x^2-x)=4x(x(k^2-1)-1)$. Ker sta x in izraz v oklepaju tuja, mora biti x popolni kvadrat.

11. Čeprav enačba ni homogena, delimo z y^5 na obeh straneh,
V dobljeno enačbo $(\frac{x}{y})^5+1=2\frac{(\frac{x}{y})^2}{y}$ uvedemo substitucijo $\frac{x}{y}=t$, torej $t^5+1=2\frac{t^2}{y}$
Podobno naredimo za x: $1+(\frac{y}{x})^5=2\frac{(\frac{y}{x})^2}{x}$ in vstavimo t: $1+t^5=2\frac{t^2}{x}$.
Iz dobljenih enačb izrazimo x in y: $y=\frac{2t^2}{1+t^5}$; $x=\frac{2}{t^2(1+t^5)}$ in vstavimo v $1-xy=1-\frac{4t^2}{t^2(1+t^5)(1+t^5)}=\frac{(t^5-1)^2}{(t^5+1)^2}$.