FILTRADO LINEAL OPTIMO: FILTRO DE WIENER

TRATAMIENTO AVANZADO DE SEÑAL EN COMUNICACIONES

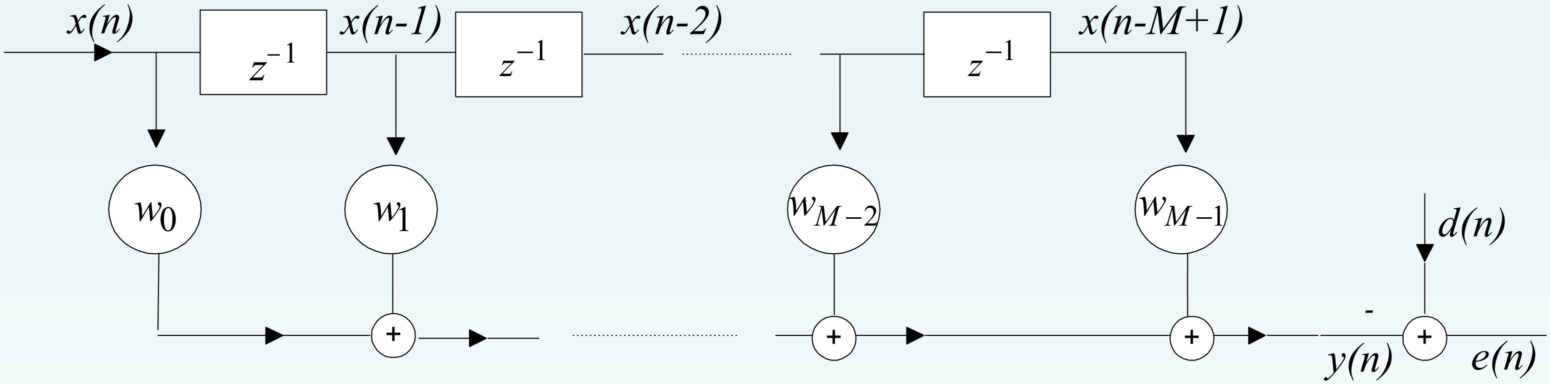
Grupo de Tratamiento Avanzado de Señal (GTAS)

Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones (DICOM), Universidad de Cantabria

Indice

- Derivación del filtro de Wiener.
- Un primer ejemplo en comunicaciones: Igualación.
- Cálculo teórico y estima del filtro de Wiener en Matlab.
- Principio de ortogonalidad.
- Superficie de error. Propiedades.
- Extensiones: IIR causal y no causal, complejo.
- Filtrado óptimo con restricciones: “LCMV beamformer”, ejemplos.
- Filtro adaptado estocástico (“eigenfilter”).
- Conclusiones.

Planteamiento del problema: CASO FIR



- Entrada: $$\boldsymbol{x}_n = [x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M+1)]^T$$

- Coeficientes: $$\boldsymbol{w} = [w_0, w_1, \ldots, w_{M-1}]^T$$

- Salida: $$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} x(n-i) w_i = \boldsymbol{x}_n{}^T \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}_n$$

Función de coste I

- Error: $e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \boldsymbol{x}_n{}^T \boldsymbol{w}$

- La estima de mínimo error cuadrático medio (MMSE), es la solución que minimiza

$$J(\boldsymbol{w}) = E[e^2(n)]$$

- Desarrollando la función de coste se obtiene

$$J(\boldsymbol{w}) = E[d^2(n) + \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}_n \boldsymbol{x}_n^T \boldsymbol{w} - 2d(n)\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}_n]$$

$$J(\boldsymbol{w}) = E[d^2(n)] + \boldsymbol{w}^T E[\boldsymbol{x}_n \boldsymbol{x}_n^T]\boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{w}^T E[d(n)\boldsymbol{x}_n] = \sigma_d^2 + \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{p}$$

Función de coste II

- Siendo $\boldsymbol{R}_x$ la matriz de autocorrelación de la entrada

$$\boldsymbol{R}_x = E\left[\boldsymbol{x}_n \boldsymbol{x}_n^T\right] = \begin{bmatrix} E[x(n)x(n)] & E[x(n)x(n-1)] & \cdots & E[x(n)x(n-M+1)] \\ E[x(n-1)x(n)] & \vdots & \vdots & E[x(n-1)x(n-M+1)] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ E[x(n-M+1)x(n)] & \cdots & \cdots & E[x(n-M+1)x(n-M+1)] \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \cdots & R_x(M-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \vdots & R_x(M-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R_x(M-1) & R_x(M-2) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix}_{M\times M}$$

MATRIZ TOEPLITZ

M es la longitud del filtro FIR

Hemos tenido en cuenta que $R_x(k) = R_x(-k)$

Función de coste III

- $\boldsymbol{p}$ es el vector de correlación cruzada entre la entrada y la salida deseada

$$\boldsymbol{p} = E\left[d(n)\boldsymbol{x}_n\right] = \begin{bmatrix} E\left[d(n)x(n)\right] \\ E\left[d(n)x(n-1)\right] \\ \vdots \\ E\left[d(n)x(n-M+1)\right] \end{bmatrix}$$

- Por ejemplo, para un filtro con dos coeficientes, la función de coste sería

$$J(\boldsymbol{w}) = \sigma_d^2 + \begin{pmatrix} w_0 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(1) & R_x(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} w_0 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) \\ p(-1) \end{pmatrix}$$

$$J(\boldsymbol{w}) = \sigma_d^2 + \left(w_0^2 + w_1^2\right) R_x(0) + 2w_0 w_1 R_x(1) - 2w_0 p(0) - 2w_1 p(-1)$$

Filtro de Wiener

- La función de coste es cuadrática en los coeficientes del filtro

Solución única (filtro de Wiener)

$$\nabla_{\mathrm{w}} J(\boldsymbol{w}) = \left[\frac{\partial J}{\partial w_0} \quad \frac{\partial J}{\partial w_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial J}{\partial w_{M-1}} \right]^T = \frac{\partial(\sigma_d^2 + \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{w}} = 2\boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{p} = 0$$

Ec's normales: $\boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} = \boldsymbol{p}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{w}_{opt} = \boldsymbol{R}_x^{-1} \boldsymbol{p}}$

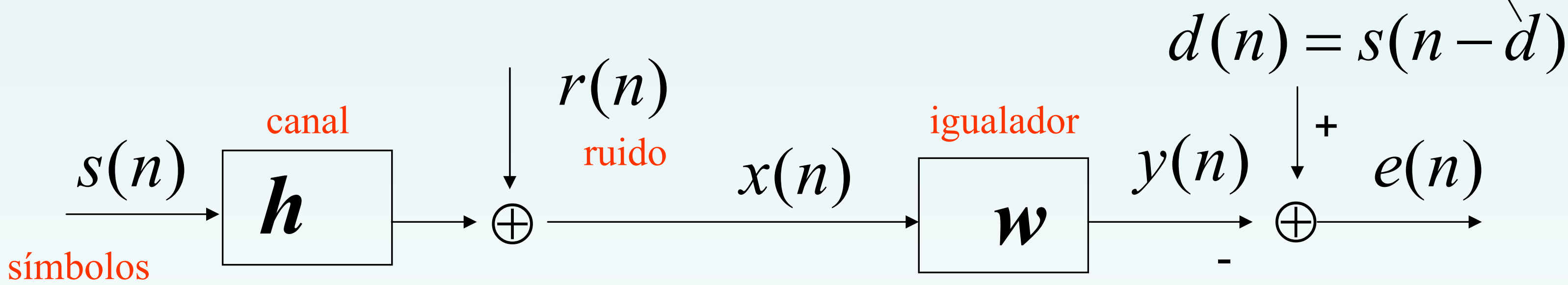
¿Qué pasa si $\boldsymbol{R}_{\mathrm{x}}$ es singular?

- Sustituyendo la solución en la función de coste se obtiene el error cuadrático medio mínimo

$$J(\boldsymbol{w}_{opt}) = \sigma_d^2 - \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{w}_{opt}$$

Ejemplo 1

- Igualación de un canal de comunicaciones digitales



- Para resolver teóricamente el filtro de Wiener son necesarios los <u>estadísticos de segundo order</u> del problema, en concreto hay que conocer:
  - 1.- Modelo estadístico de la señal de entrada: i.i.d BSPK {-1,+1}.
  - 2.- Modelo estadístico del ruido: AWGN de media cero y varianza σ_r^2.
  - 3.- El canal ***h.***

Ejemplo 1

- Para el modelo considerado:

$$R_x(k) = R_{hh}(k) + \sigma_r^2 \delta(k) \qquad \text{con} \qquad R_{hh}(k) = h(k) * h(-k)$$

$$p(-k) = E\left[s(n-d)x(n-k)\right] =$$

$$= E\left[s(n-d)\left(\sum_r h(r)s(n-k-r) + r(n-k)\right)\right] = h(d-k)$$

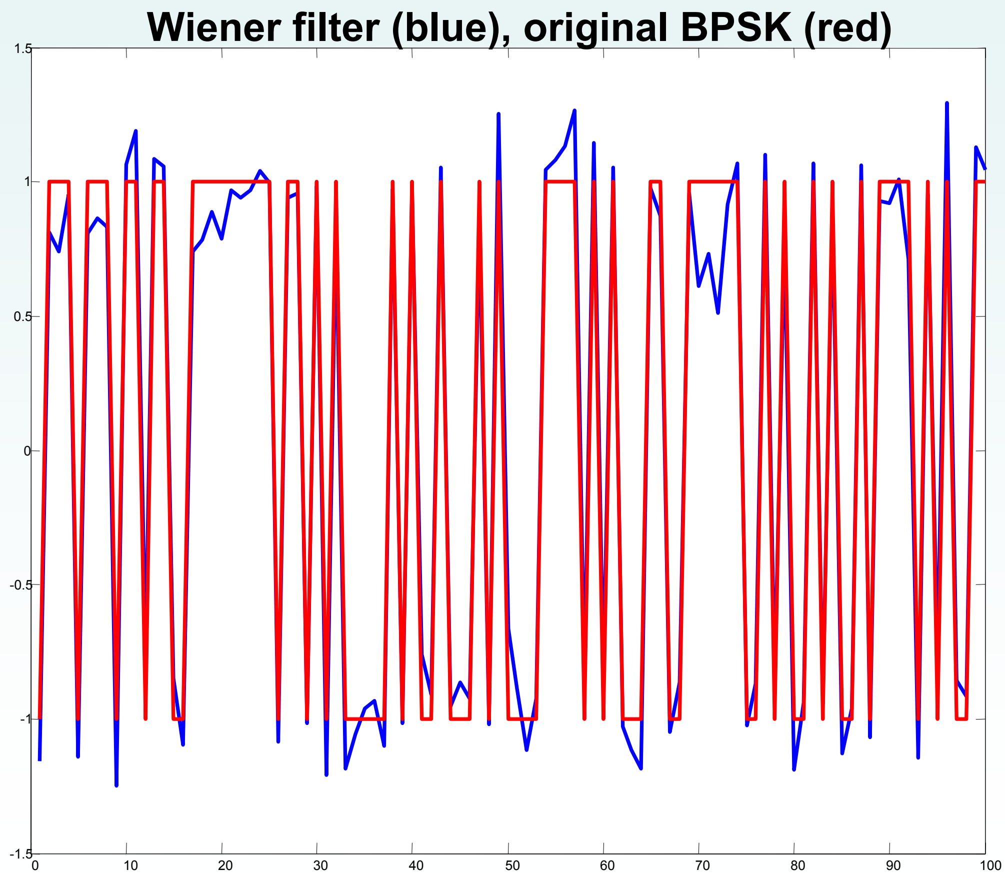
- Ecuaciones normales:

$$\begin{bmatrix} R_{hh}(0)+\sigma_r^2 & R_{hh}(1) & \dots & R_{hh}(M-1) \\ R_{hh}(1) & R_{hh}(0)+\sigma_r^2 & \vdots & R_x(M-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R_{hh}(M-1) & R_{hh}(M-2) & \dots & R_{hh}(0)+\sigma_r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(d) \\ h(d-1) \\ \vdots \\ h(d-M+1) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

- Fichero: Wiener_eq.m

$$h = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.7 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$
$$SNR = 20\,dB$$
$$M = 15$$
$$d = 7$$



Ejemplo 1

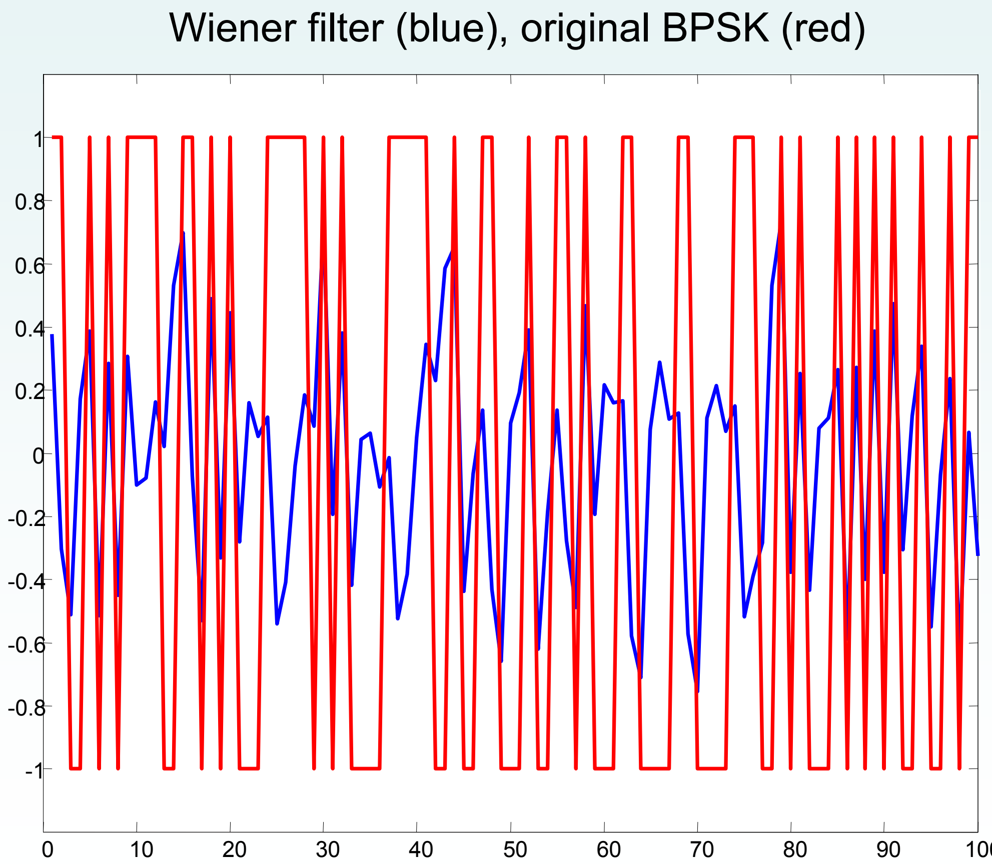
- Fichero: Wiener_eq.m

$$h = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.7 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$SNR = 20\, dB$$

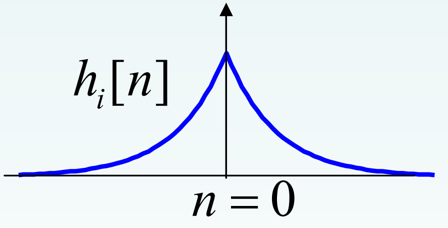
$$M = 15$$

$$d = 0$$

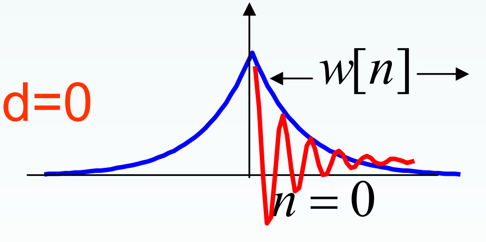


¿Por qué es necesario un retardo?

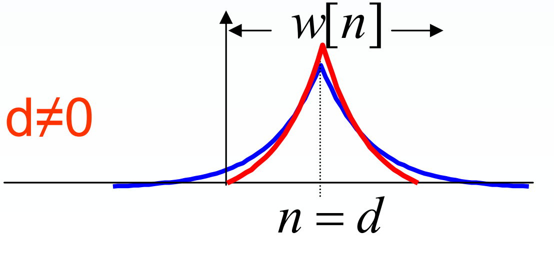
- Suponemos una situación sin ruido y un canal causal y estable.
- Si el canal es de fase no mínima (alguno de sus ceros fuera del círculo unidad) el inverso estable es no causal.



- Si no incluimos un retardo, la aproximación del filtro de Wiener al inverso del canal será muy mala:

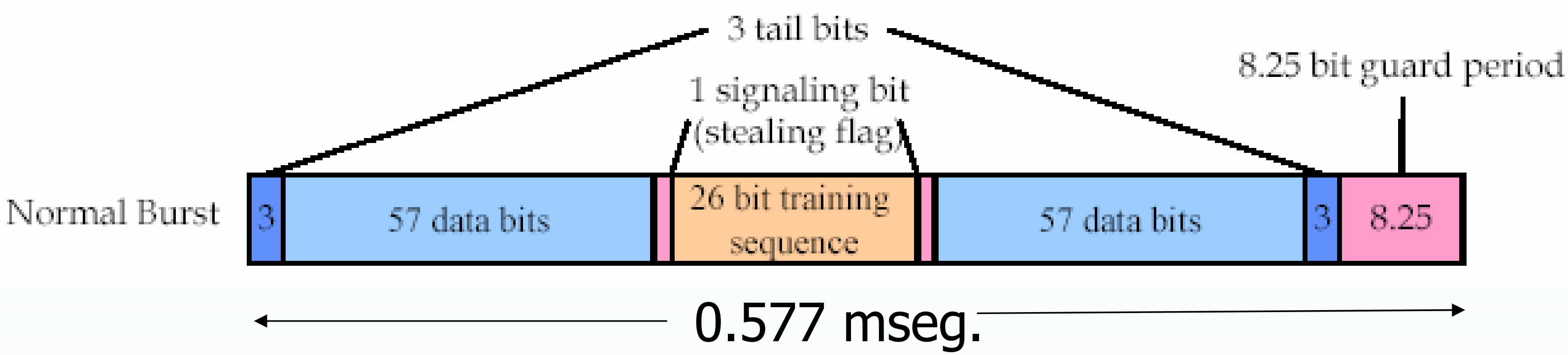


- Si permitimos un cierto retardo:



Estima del filtro de Wiener I

- En un caso práctico no se conoce el canal ni la varianza de ruido, tan sólo se conoce la señal deseada s(n), en un intervalo n=1,…N. (Secuencia de entrenamiento).
- Por ejemplo, en GSM



$$R_b = 270.833 \quad kb/s$$

Hay 26 símbolos conocidos por el receptor

Estima del filtro de Wiener II

- La matriz de autocorrelación se estima como $\hat{\boldsymbol{R}}_x = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_n^T$
- La correlación cruzada $\hat{\boldsymbol{p}} = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} s(n)\boldsymbol{x}_n$
- Si queremos incluir un retardo d

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} s(n)\boldsymbol{x}_{n+d} \qquad \hat{\boldsymbol{R}}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}_{n+d}\boldsymbol{x}_{n+d}^T$$

- El igualador óptimo bajo un criterio MMSE es

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{opt} = \hat{\boldsymbol{R}}_x^{-1}\hat{\boldsymbol{p}}$$ "Direct Matrix Inversion" (DMI)

Ejemplo 2

Fase mínima

$$h = \begin{bmatrix} 1 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \quad SNR = 25\,dB$$

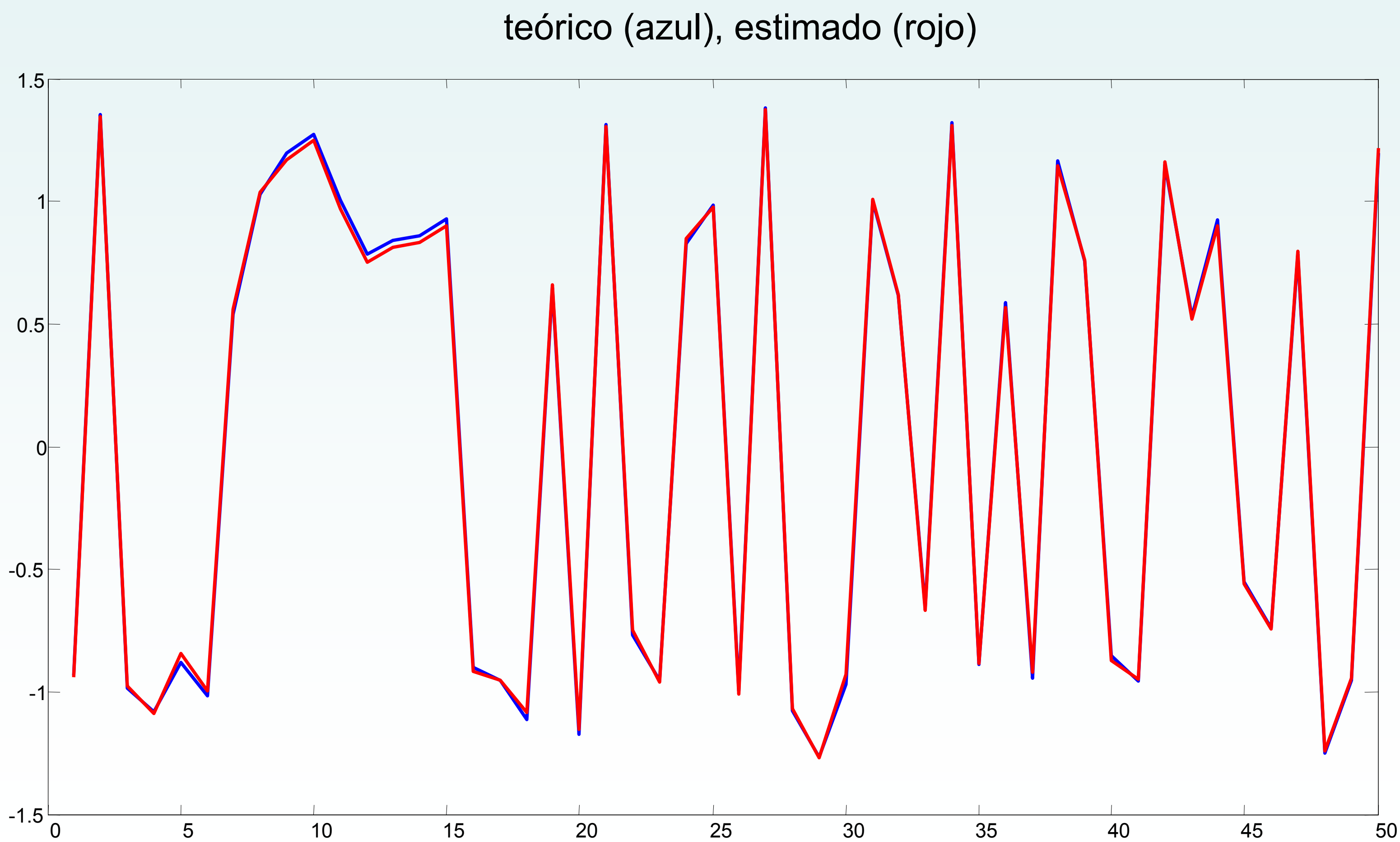
$$M = 5 \qquad d = 0 \qquad N = 50$$

- Fichero: Wiener_eq_est.m

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{bmatrix} 1.4546 & -0.4800 & 0.6000 & 0 & 0 \\ -0.4800 & 1.4546 & -0.4800 & 0.60 & 0 \\ 0.6000 & -0.4800 & 1.4546 & -0.48 & 0.6 \\ 0 & 0.6000 & -0.4800 & 1.4546 & -0.4800 \\ 0 & 0 & 0.6000 & -0.4800 & 1.4546 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{w}_{opt} = \begin{bmatrix} 0.9452 \\ 0.2623 \\ -0.4150 \\ -0.2117 \\ 0.1013 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_x = \begin{bmatrix} 1.4734 & -0.5413 & 0.5827 & -0.0655 & -0.0346 \\ -0.5413 & 1.4650 & -0.5400 & 0.6066 & -0.0770 \\ 0.5827 & -0.5400 & 1.4738 & -0.5518 & 0.5925 \\ -0.0655 & 0.6066 & -0.5518 & 1.4132 & -0.5050 \\ -0.0346 & -0.0770 & 0.5925 & -0.5050 & 1.4253 \end{bmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 1.0065 \\ -0.0415 \\ -0.0430 \\ -0.0188 \\ -0.0508 \end{bmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{w}}_{opt} = \begin{bmatrix} 0.9380 \\ 0.2521 \\ -0.4275 \\ -0.2074 \\ 0.1050 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2


teórico (azul), estimado (rojo)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Principio de ortogonalidad I

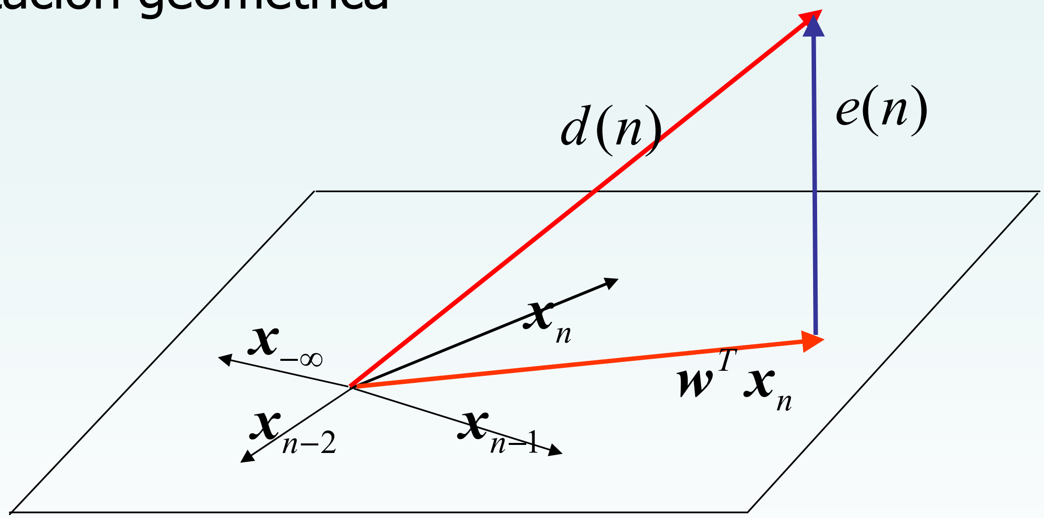
- El filtro de Wiener se puede también derivar a partir del principio de ortogonalidad: EL ERROR ES ORTOGONAL A LOS DATOS.

$$E[e(n)\boldsymbol{x}_n] = E[\boldsymbol{x}_n(d(n) - \boldsymbol{x}_n^T\boldsymbol{w})] = 0$$

$$\left.\underbrace{E[\boldsymbol{x}_n d(n)]}_{\Downarrow \atop \boldsymbol{p}} = \underbrace{E[\boldsymbol{x}_n \boldsymbol{x}_n^T]}_{\Downarrow \atop \boldsymbol{R}_x}\boldsymbol{w}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{w}_{opt} = \boldsymbol{R}_x^{-1}\boldsymbol{p}$$

Principio de ortogonalidad II

- Interpretación geométrica



- Corolario: el error es ortogonal a la salida estimada

$$E[e(n)\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}_n] = \boldsymbol{w}^T E[e(n)\boldsymbol{x}_n] = 0$$

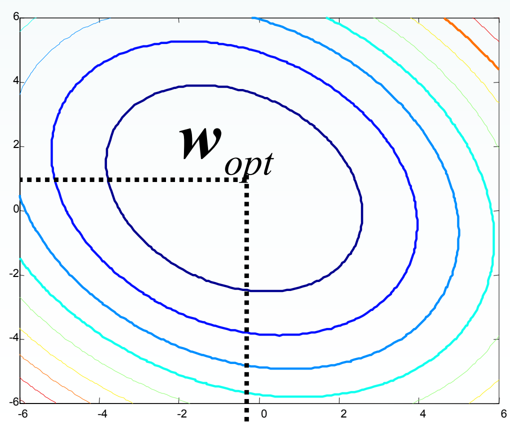
Superficie de error I

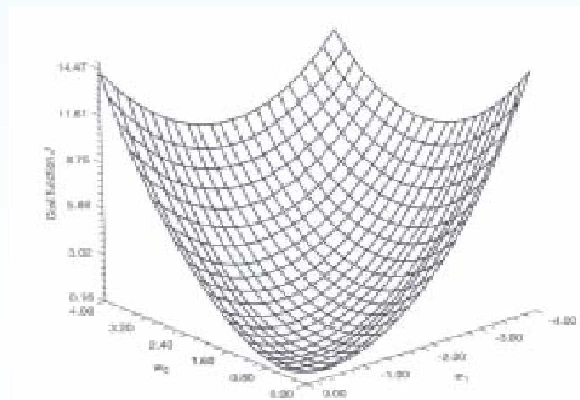
- La función de coste es un paraboloide con un único mínimo

$$J(\boldsymbol{w}) = \sigma_d^2 + \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{p}$$

- Si consideramos un filtro de 2 coeficientes

$$J(\boldsymbol{w}) = \sigma_d^2 + \begin{pmatrix} w_0 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} w_0 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) \\ p(-1) \end{pmatrix}$$





Superficie de error II

- El eje del paraboloide es perdendicular al plano J(w)=cte.
- El mínimo está en $\boldsymbol{w}_{opt} = \boldsymbol{R}_x^{-1}\boldsymbol{p}$
- Su orientación y forma dependen exclusivamente de $\boldsymbol{R}_x$
- La función de coste puede escribirse como

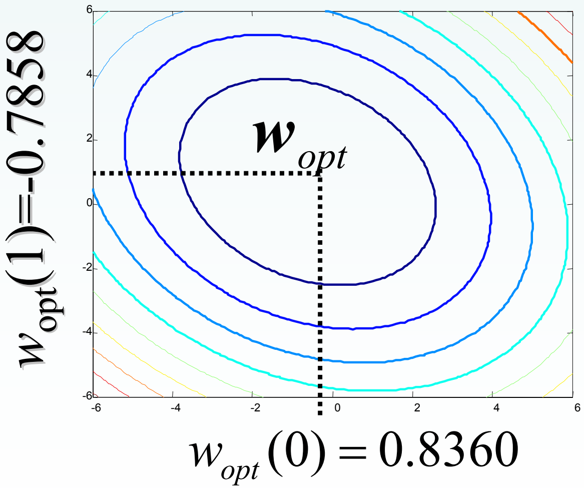
$$J = J_{\min} + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_{opt})^T \boldsymbol{R}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_{opt})$$

$$J = J_{\min} + \tilde{\boldsymbol{w}}^T \boldsymbol{R}_x \tilde{\boldsymbol{w}} \qquad \text{siendo} \qquad \tilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_{opt}$$

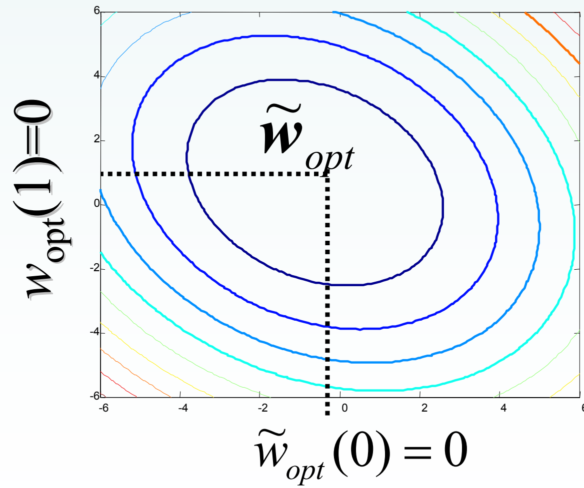
Superficie canónica I

- $\tilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_{opt}$ define una traslación: el mínimo de la función de coste está ahora en $\tilde{\boldsymbol{w}}_{opt} = 0$

$J(\boldsymbol{w})$



$J(\tilde{\boldsymbol{w}})$



Superficie canónica II

- La matriz de autocorrelación puede escribirse en términos de sus autovectores y autovalores como

$$\boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^T = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \ldots & \boldsymbol{q}_M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_M^T\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{M}\lambda_i\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^T$$

$$J = J_{\min} + \tilde{\boldsymbol{w}}^T\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^T\tilde{\boldsymbol{w}}$$

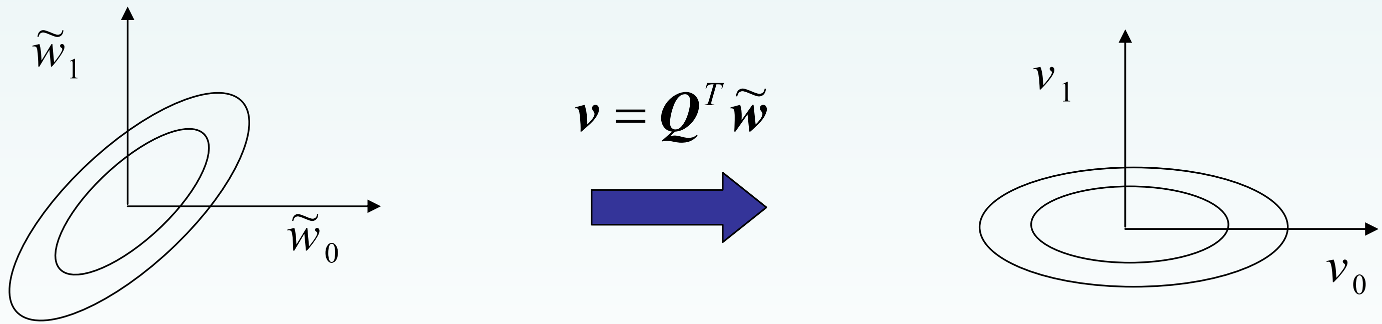
- Definimos ahora los vectores transformados (linealmente)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Q}^T\tilde{\boldsymbol{w}}$$

Superficie canónica III

- Se obtiene así la forma o superficie canónica

$$J = J_{\min} + \boldsymbol{v}^T \Lambda \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_k \left| v_k^2 \right|$$



- Las direcciones en el espacio transformado (canónico) están alineadas con las direcciones principales del paraboloide.

- La excentricidad depende de los autovalores.

Un ejemplo

- Matriz de autocorrelación $\boldsymbol{R}_{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- Autovalores y autovectores

$$\left|\boldsymbol{R}_x - \lambda \boldsymbol{I}\right| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

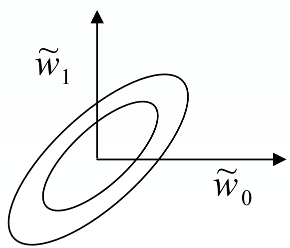
$$\boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Superficie de error</u>:

$$J(\tilde{\boldsymbol{w}}) = J_{\min} + \begin{pmatrix} \tilde{w}_0 & \tilde{w}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\tilde{w}_0^2 + 2\tilde{w}_0\tilde{w}_1 + 2\tilde{w}_1^2$$

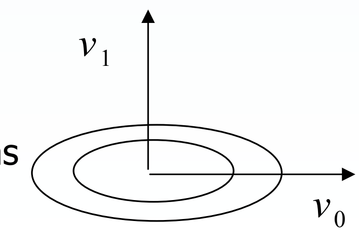
Variables acopladas



<u>Superficie canónica</u>:

$$J(\boldsymbol{v}) = J_{\min} + \begin{pmatrix} v_0 & v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = v_0^2 + 3v_1^2$$

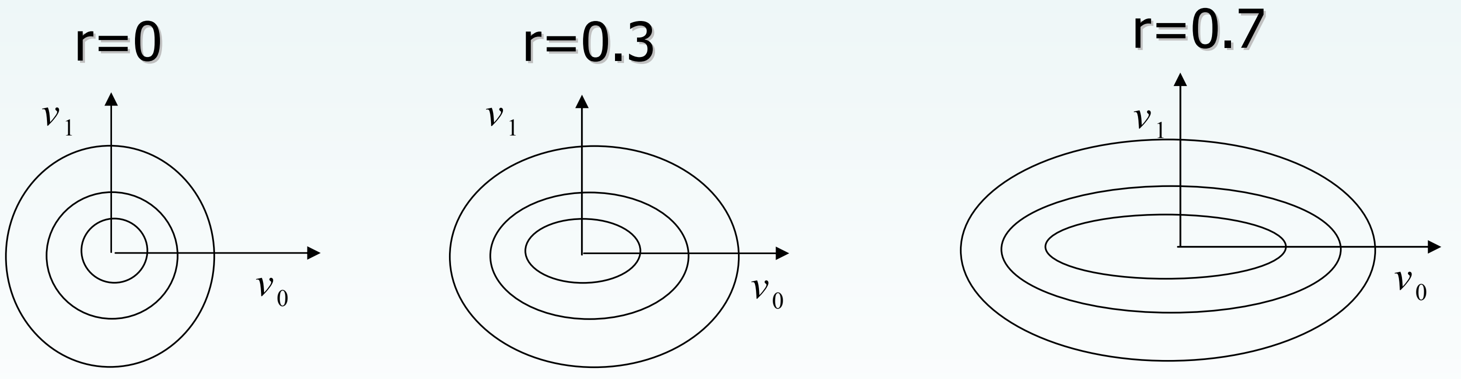
Variables desacopladas



Caso general

- Matriz de autocorrelación $\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} \sigma^2 & r\sigma^2 \\ r\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} (1+r)\sigma^2 & 0 \\ 0 & (1-r)\sigma^2 \end{pmatrix}$

siendo $r = \dfrac{R_x(1)}{R_x(0)}$ el coeficiente de correlación.



- Dispersión de autovalores: $\dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \dfrac{1+r}{1-r}$
- Un valor alto indica mal condicionamiento de la matriz de autocorrelación.

Estimación lineal vs. no lineal

- Hemos visto hasta ahora que el filtro de Wiener es el estimador LINEAL que minimiza el MSE

$$\hat{d}(n) = \boldsymbol{w}_{opt}^{T} \boldsymbol{x}_n \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{w}_{opt} = \boldsymbol{R}_x^{-1} \boldsymbol{p}$$

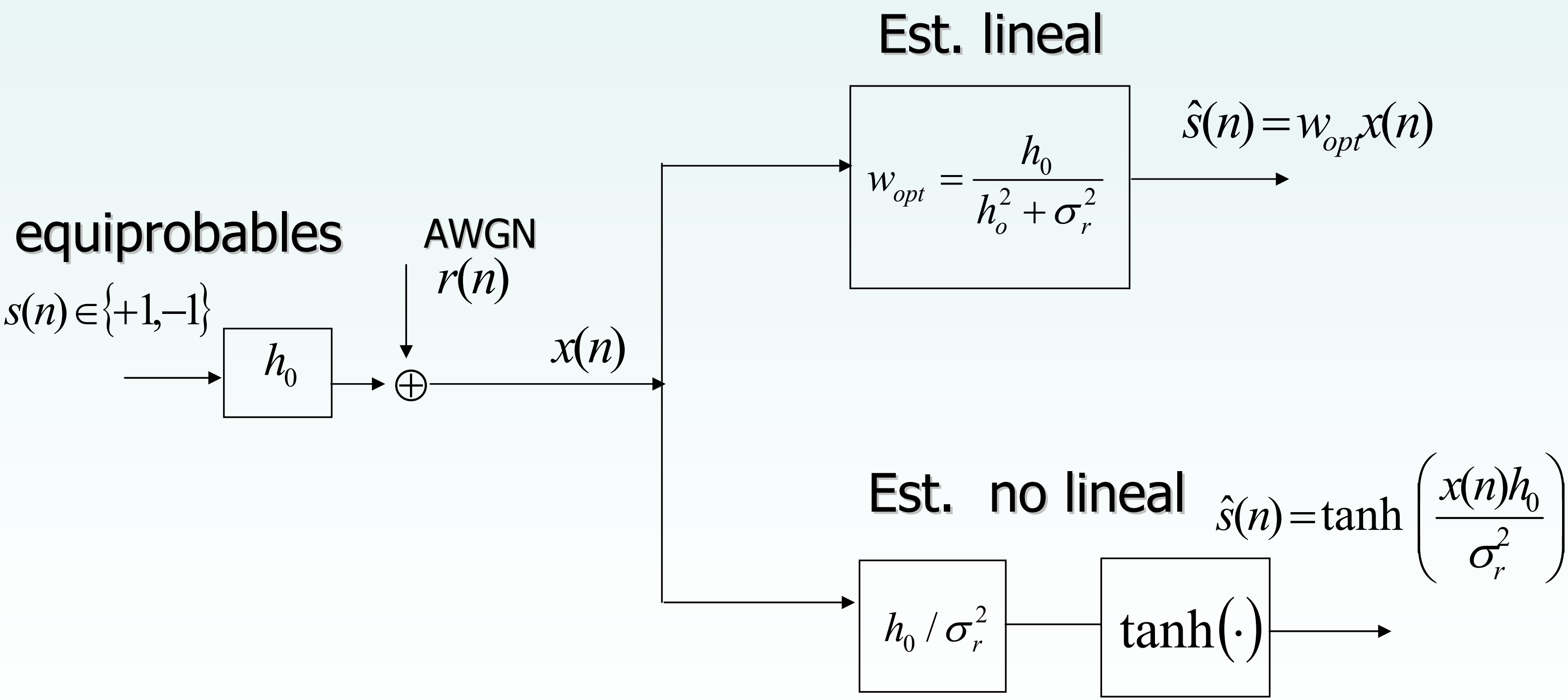
Es necesario conocer los estadísticos de segundo orden.

- El estimador que minimiza el MSE es, en general, no lineal y se obtiene como

$$\hat{d}(n) = E[d(n) \,|\, \boldsymbol{x}_n]$$

Es necesario conocer: $f_{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{x}_n}(d(n) \,|\, \boldsymbol{x}_n)$

Estimación lineal vs. no lineal: ejemplo



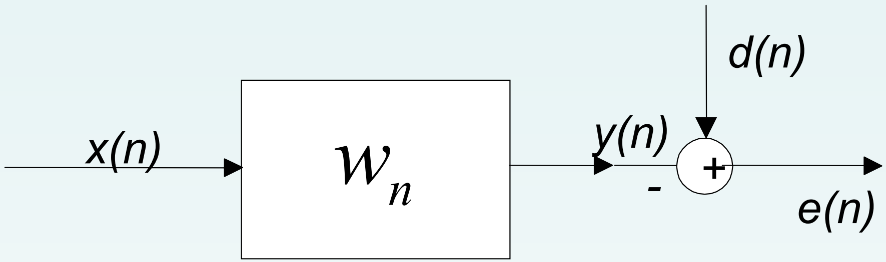
Algunas extensiones

- Hasta ahora nos hemos concentrado en el caso del filtrado óptimo FIR con secuencias reales.

- A continuación extendemos las ideas expuestas sobre filtrado óptimo a:

  1.- Filtros IIR (no causales)
  2.- Filtro IIR (causales)
  3.- Filtros FIR complejos

Filtro de Wiener IIR



$$w_n \neq 0 \qquad -\infty < n < \infty$$

- La salida del filtro IIR es $\quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k x(n-k)$
- El principio de ortogonalidad sigue siendo válido

$$\min E\left[e^2(n)\right] \Rightarrow E\left[e(n)x(n\text{-}l)\right] = 0 \qquad -\infty < l < \infty$$

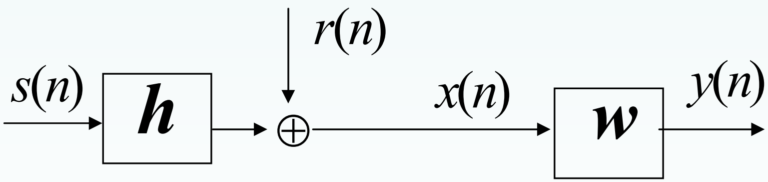
Ec's Normales: $\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k R_{xx}(l-k) = p(l) \qquad -\infty < l < \infty$

Filtro de Wiener IIR

- Es posible escribir la solución en el dominio de la frecuencia:

$$W(\omega) = \frac{S_{xd}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

- Para el problema de igualación/deconvolución visto anteriormente



$$W(\omega) = \frac{S_{xd}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{H(\omega)^*}{|H(\omega)|^2 + \sigma_r^2}$$

- Si no hay ruido: $W(\omega) = \frac{S_{xd}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{H(\omega)^*}{|H(\omega)|^2} = \frac{1}{H(\omega)}$

El filtro de Wiener es el filtro inverso (en general, IIR no causal)

Filtro de Wiener IIR (causal)

- Es posible también obtener el filtro óptimo IIR causal

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k R_x(l-k) = p(l) \qquad l \geq 0$$

- La solución de este problema es algo más complicada

$$S_{xx}(z) = \sigma_x^2 Q(z) Q(z^{-1}) \qquad\qquad Q(z) \qquad \text{es fase mínima}$$

- Entonces:

$$W(z) = \underbrace{\left[\frac{S_{xd}(z)}{Q(z^{-1})}\right]_+}_{\text{Parte causal}} \frac{1}{\sigma_x^2 Q(z)}$$

Filtro de Wiener complejo

- En el caso de secuencias complejas (filtro FIR)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} x(n-i) w_i^* = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{x}_n$$

H denota hermítico (conjugado y transpuesto)

- La solución del filtro óptimo sigue siendo

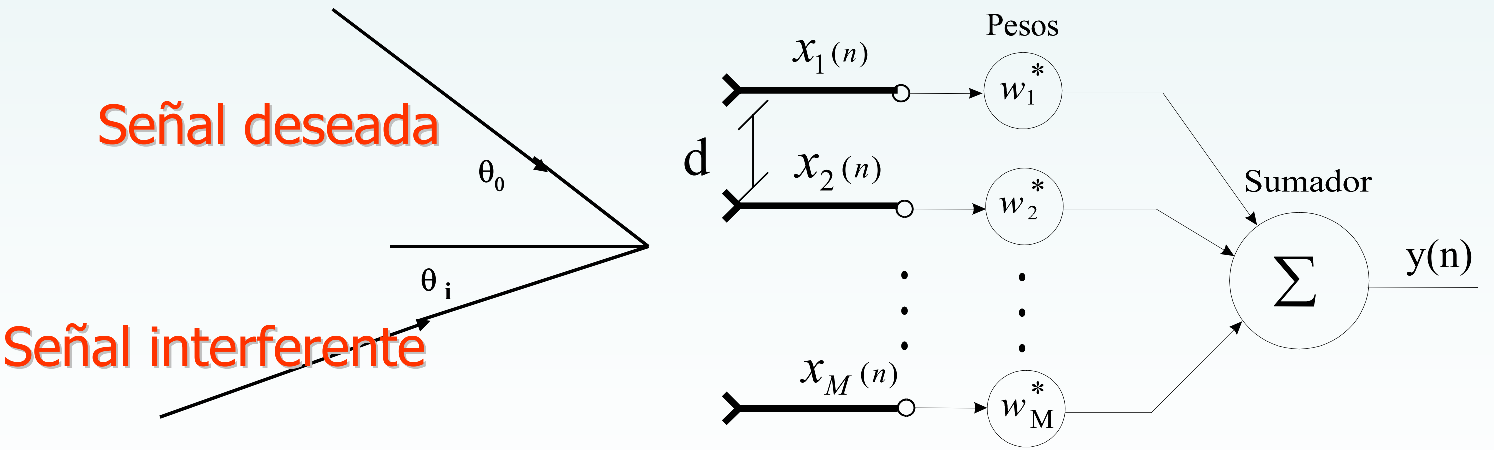
$$\boldsymbol{w}_{opt} = \boldsymbol{R}_x^{-1} \boldsymbol{p}$$

pero ahora $\boldsymbol{R}_x = E[\boldsymbol{x}_n \boldsymbol{x}_n^H]$ $\qquad \hat{\boldsymbol{R}}_x = \dfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}_n \boldsymbol{x}_n^H$

$$\boldsymbol{p} = E[\boldsymbol{x}_n d^*(n)] \qquad \hat{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}_n d^*(n)$$

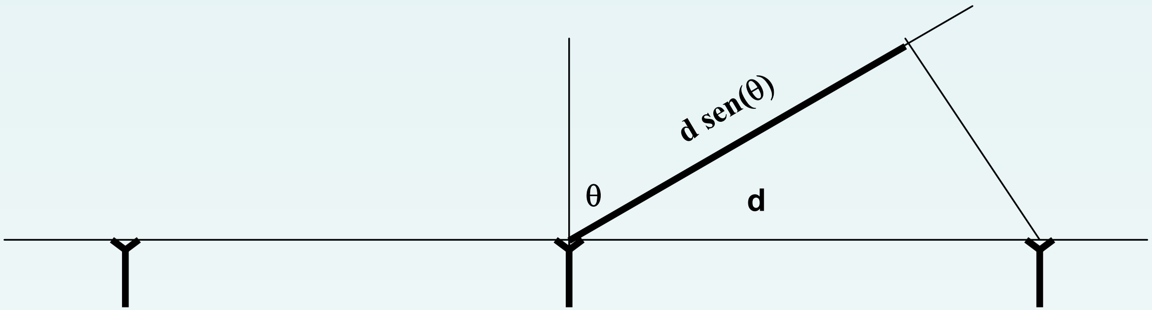
Filtrado lineal óptimo con restricciones

- En ciertos problemas de comunicaciones, por ejemplo en conformación de haz ("beamforming"), es necesario minimizar el MSE sujeto a un restricción lineal.



minimizar $E[|y(n)|^2] = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w}$ s.t. $\boldsymbol{w}^H s(\theta_0) = g$

Modelo de propagación



$$s_1(t) = s_0(t - \tau(\theta)) \qquad\qquad s_0(t)$$

El retado entre dos elementos del array es $\tau(\theta) = \dfrac{d\,\mathrm{sen}(\theta)}{c}$

Hipótesis: onda plana, banda estrecha, array equiespaciado:

$$s_0(t) = u(t)e^{j\omega_0 t} \quad \Rightarrow s_1(t) = u(t - \tau(\theta))e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega_0\tau(\theta)} \approx u(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega_0\tau(\theta)}$$

$$s_1(t) = s_0(t)e^{-j\omega_0\tau(\theta)} \;=\; s_0(t)e^{-j2\pi\left(\frac{f_0}{c}\right)d\,\mathrm{sen}(\theta)} = s_0(t)e^{-j\pi\frac{d}{\lambda/2}\mathrm{sen}(\theta)}$$

“Linearly constrained minimum variance” (LCMV)

- PROBLEMA:

minimizar $E[|y(n)|^2] = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w}$ s.t. $\boldsymbol{w}^H s(\theta_0) = g$

siendo $s(\theta_0) = \left(1 \quad e^{-j\theta_0} \quad \ldots \quad e^{-j(M-1)\theta_0}\right)^T$

- Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange

$$J(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} + \lambda_R \left(\mathrm{Re}\left(w^H s(\theta_0)\right) - g_R\right) + \lambda_I \left(\mathrm{Im}\left(w^H s(\theta_0)\right) - g_I\right)$$

$$J(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} + \mathrm{Re}\left(\lambda^* \left(w^H s(\theta_0) - g\right)\right)$$

"Linearly constrained minimum variance" (LCMV)

- Tomando derivadas e igualando a cero

$$\nabla J = 2\boldsymbol{R}_x \boldsymbol{w} + \frac{\lambda^*}{2}\mathbf{s}(\theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w}_{opt} = -\frac{\lambda^*}{2}\boldsymbol{R}_x^{-1}\mathbf{s}(\theta_0)$$

- Para obtener el multiplicador de Lagrange

$$\boldsymbol{w}_{opt}^H \mathbf{s}(\theta_0) = g = -\frac{\lambda}{2}\mathbf{s}^H(\theta_0)\boldsymbol{R}_x^{-1}\mathbf{s}(\theta_0) \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2g}{\mathbf{s}^H(\theta_0)\boldsymbol{R}_x^{-1}\mathbf{s}(\theta_0)}$$

- El LCMV o "Minimum variance distorsionless response" (MVDR) beamformer es

$$\boxed{\boldsymbol{w}_{opt} = \frac{g^* \boldsymbol{R}_x^{-1}\mathbf{s}(\theta_0)}{\mathbf{s}^H(\theta_0)\boldsymbol{R}_x^{-1}\mathbf{s}(\theta_0)}}$$

MVDR Spectrum

- Tomando g=1, la potencia mínima a la salida del conformador es

$$J_{\min} = \frac{1}{\boldsymbol{s}^H(\theta_0)\boldsymbol{R}_x^{-1}\boldsymbol{s}(\theta_0)}$$

que mantiene la respuesta (potencia) en la dirección θ_0 minimizando el resto.

- Considerando la expresión anterior como función de la frecuencia espacial θ , o temporal ω

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{\boldsymbol{s}^H(\omega)\boldsymbol{R}_x^{-1}\boldsymbol{s}(\omega)}}$$

"MVDR spectrum" o
"Capon spectrum"

Ejemplo LCMV

- Programa: Lcmv.m

-Señal QPSK deseada en $\theta_0 = -20^\circ$

-Interferencia 1 en $\theta_1 = 20^\circ$ con SIR=-10 dB

-Interferencia 2 en $\theta_2 = -60^\circ$ con SIR=-15 dB

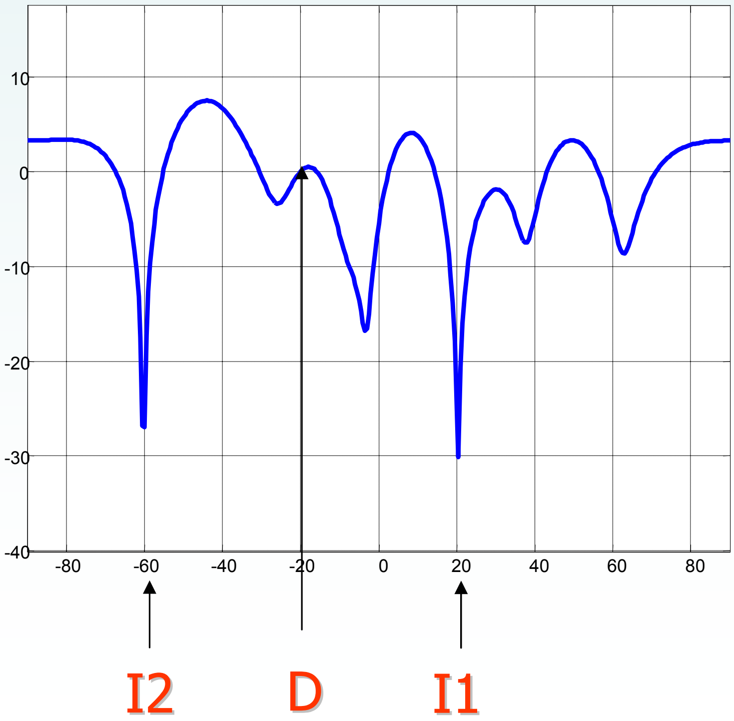
-Ruido gaussiano y espacialmente blanco con SNR=0 dB

-Array lineal con M=10 elementos, separación entre antenas d=λ/2.

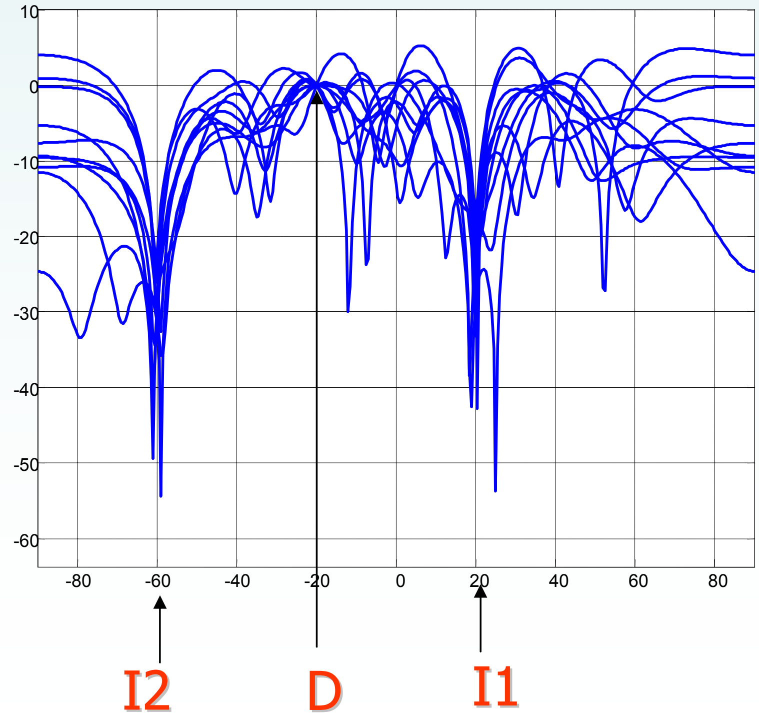
Ejemplo LCMV

N=25 “snapshots”

Una realización



10 realizaciones ind.

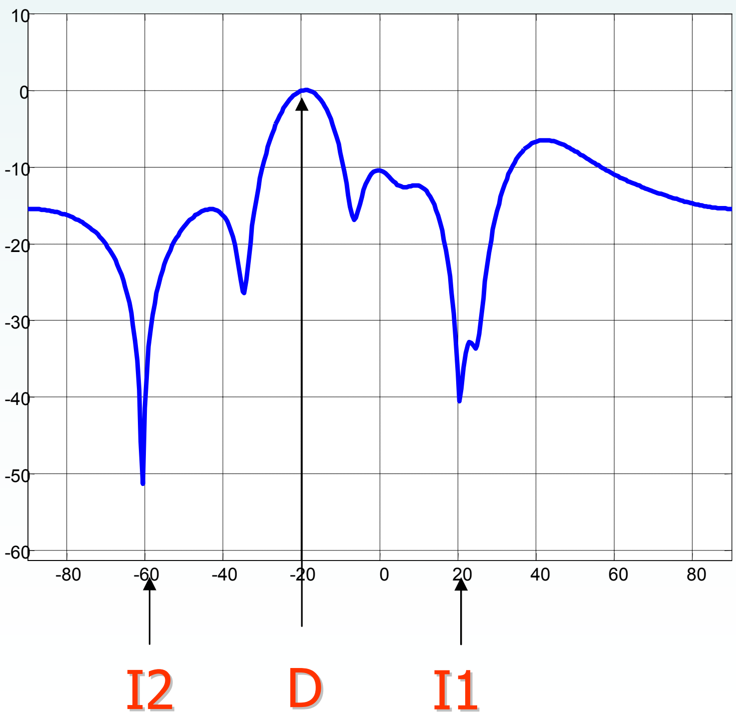


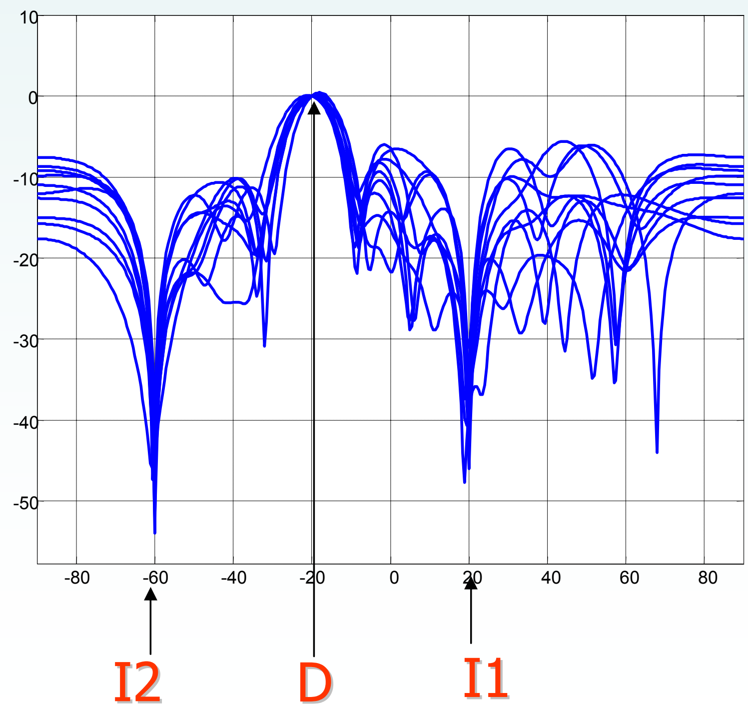
Ejemplo LCMV

N=250 “snapshots”

Una realización

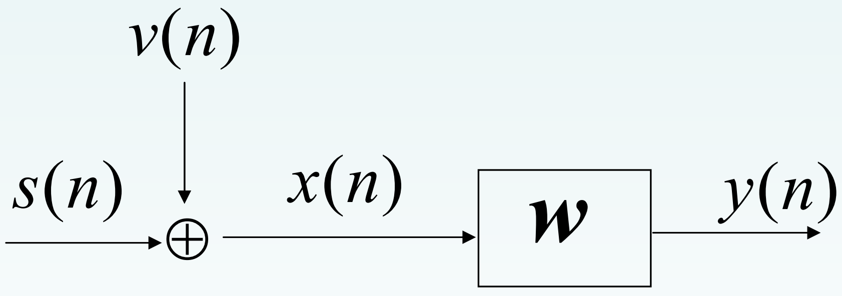
10 realizaciones ind.





Filtro adaptado estocástico I

- Otro problema filtrado óptimo que aparece frecuentemente en comunicaciones es el siguiente:



¿Cúal es el filtro que maximiza la SNR a la salida?

- Potencia de señal a la salida del filtro: $\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_s \boldsymbol{w}$
- Potencia de ruido a la salida del filtro: $\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_v \boldsymbol{w}$

SNR máxima $\Rightarrow$ maximizar $SNR = \dfrac{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_s \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_v \boldsymbol{w}}$

Filtro adaptado estocástico II

- Si suponemos que el ruido es blanco $\boldsymbol{R}_v = \sigma_v^2 \boldsymbol{I}$

maximizar $$SNR = \frac{1}{\sigma_v^2} \frac{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_s \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{w}}$$

- El problema es equivalente a

maximizar $\dfrac{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_s \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{w}}$ s.t. $\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{w} = 1$

- La solución es el autovector correspondiente al máximo autovalor de : $\boldsymbol{R}_s$

$\boldsymbol{w}_{opt} = \boldsymbol{q}_{\max}$ siendo $\boldsymbol{R}_s \boldsymbol{q}_{\max} = \lambda_{\max} \boldsymbol{q}_{\max}$ y la $SNR_{\max} = \dfrac{\lambda_{\max}}{\sigma_v^2}$

- Puede verse como un filtro adaptado estocástico, también se denomina en la literatura "eigenfilter".

Conclusiones

- El filtrado lineal óptimo (filtro de Wiener) aparece en multitud de problemas de comunicaciones.
- Su obtención requiere conocer (o estimar) los estadísticos de 2º orden.
- El filtro de Wiener extrae de la entrada la parte correlada con la señal deseada (si $\boldsymbol{p}=0$, $\boldsymbol{w}=0$).
- La señal de error resultante está incorrelada con la entrada (y con la salida del filtro): Principio de ortogonalidad.
- Minimización del MSE sujeto a una restricción lineal (LCMV).
- Maximización de la potencia de salida sujeto a una restricción cuadrática ("eigenfilters").