

Relazioni fondamentali

Relazione fondamentale tra seno e coseno: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\text{Tangente: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{Cotangente: } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{Conversioni di unità}^1: \rho = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}; \quad \alpha = \frac{\rho \cdot 180}{\pi}$$

Valori comuni

α (gradi)	ρ (radianti)	sin	cos	tan	cot
0	0	0	1	0	\nexists
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	\nexists	0
180	π	0	-1	0	\nexists
270	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	\nexists	0
360	2π	0	1	0	\nexists

Formule di addizione e sottrazione

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Formule di duplicazione

$$\text{Duplicazione del seno: } \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{Duplicazione del coseno: } \cos(2\alpha) = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

¹ α è l'angolo in gradi; ρ è l'angolo in radianti.

Duplicazione della tangente: $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Formule di bisezione

Bisezione del coseno: $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

Bisezione del seno: $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

Bisezione della tangente: $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\tan \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \end{cases}$

Archi associati

	sin	cos	tan	cot
$f(-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$f(\pi+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$f(\pi-\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$f\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$f\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$f\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$

Formule parametriche e razionali

Secondo la posizione $t = \tan \frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

Formule di Werner

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

Formule di prostaferesi²

$$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

Rette incidenti

α è l'angolo acuto; β è l'angolo ottuso; m ed m_1 sono i coefficienti angolari delle rette incidenti.

$$\tan \alpha = \frac{m - m_1}{1 + mm_1}; \quad \tan \beta = \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}$$

² Prostaferesi, parola di origine incerta, vorrebbe forse dire in greco "somma e sottrazione".