

論自然語言量化結構的單調推理關係

**On Monotonic Inferential Relationships of
Quantified Structures in Natural Language**

周家發

CHOW Ka Fat

Master of Arts in Chinese Linguistics

The Hong Kong Polytechnic University

2007

論文撮要

本文把「廣義量詞理論」的理論框架擴大應用於自然語言的多種量化結構，借助集合論、三分結構、可能世界理論、模糊數學以及邏輯學、數學和形式語義學的其他理論工具，對傳統邏輯研究的某些課題，如對當方陣和三段論推理提供了數學解釋，並把它們與「廣義量詞理論」研究的單調推理統一起來。透過對對當方陣和單調推理的深入研究，本文取得兩個有廣泛應用的重要結果－「對當方陣一般模式」和「單調推理原理」。除了簡單句外，本文亦把研究結果推廣應用於含有多個量詞／算子的句子以及某些並列結構和焦點結構，以解釋及解決自然語言的某些語義／邏輯疑難問題。

ABSTRACT

This study extends the scope of the generalized quantifier theory (GQT) to various quantified structures in natural language. By using set theory, tripartite structure, possible worlds theory, fuzzy mathematics and other conceptual tools in logic, mathematics and formal semantics, certain concepts studied by traditional logic such as the square of opposition and syllogism are given a mathematical interpretation and are unified with the monotonic inferences studied by GQT. Through thorough studies of the square of opposition and monotonic inferences, two important results with wide applications – the “General Pattern of Squares of Opposition” and the “Principle of Monotonic Inferences”, are generated. Apart from simple sentences, these results are also extended and applied to sentences with more than one quantifier / operator as well as some coordinate structures and focus constructions to explain and resolve certain semantic / logical problems pertaining to natural language.

鳴謝

本論文完成於二零零六年秋，為香港理工大學中文及雙語學系中國語言學文學碩士論文。在寫作過程中，本人得蒙蔣嚴博士指導，並給予寶貴意見，謹此向蔣嚴博士致以衷心感謝。

目錄

1. 引言	8
2. 本文的主旨和研究方法	11
3. 基本定義	13
3.1 廣義量詞	13
3.2 三分結構	13
3.3 單調性	14
4. 對當關係的數學解釋	16
4.1 個體論域	16
4.1.1 「所有對當方陣」	16
4.1.2 「只有對當方陣」	17
4.1.3 「所有對當方陣」與「只有對當方陣」的關係	20
4.2 時間論域	21
4.3 可能世界論域	23
4.4 相關詞論域與命題論域	24
4.5 模糊程度與比較結構	25
4.6 不可數名詞與部分-整體關係	27
4.7 數量比較算子	28
4.8 「對當方陣一般模式」的推導	29
4.8.1 第一形式	29
4.8.2 第二形式	31
4.9 「對當方陣一般模式」的應用	32
4.9.1 「剛好 n 個對當方陣」	32
4.9.2 「多於 n 成、多於 m 個對當方陣」	33
4.9.3 模糊算子	34
4.9.4 「除...外」對當方陣	37
4.9.5 「對當方陣一般模式」的其他應用	38
4.10 對當方陣與單調性的關係	39
4.10.1 差等關係的單調性	39
4.10.2 差等關係與否定詞的結合	40
5. 傳統邏輯其他課題的數學解釋	41
5.1 結構變換的數學解釋	41
5.2 三段論的數學解釋	41

6. 左、右單調性的數學解釋	43
6.1 引言	43
6.2 存在量詞	43
6.2.1 存在量詞的左、右單調性	43
6.2.2 各種否定對單調性的影響	43
6.2.3 單調推理的對當方陣	44
6.3 全稱量詞	45
6.4 只有	46
6.5 數量比較算子	47
6.5.1 絕對數量比較	47
6.5.2 相對數量比較	48
6.5.3 「所有」、「只有」和「沒有」的特殊性	49
6.5.4 含有相等語義的算子	49
6.5.5 模糊算子	50
6.5.6 「極多」等的歧義問題	50
6.6 非單調算子總表	51
6.7 其他算子	51
6.8 其他論域上的應用	52
6.8.1 連續時間論域	52
6.8.2 離散時間論域	53
6.8.3 比較結構	53
6.8.4 命題論域	54
6.9 單調推理原理	54
 7. 「單調推理原理」的擴展	 55
7.1 引言	55
7.2 無算子結構	55
7.2.1 「光桿」名詞短語結構	55
7.2.2 無主句	56
7.3 泛化量化結構	56
7.4 多式算子結構	57
7.4.1 迭代量詞	57
7.4.2 轄域歧義	58
7.4.3 「逐指解」與「統指解」	59
7.4.4 「單調推理原理」在多式算子上的應用	60
7.4.5 否定域的確定	62

8. 並列結構	64
8.1 「和-或錯位現象」	64
8.2 「邏輯-集合論不對應現象」	66
9. 焦點結構	69
9.1 引言	69
9.2 焦點否定	69
9.3 含有「只」的焦點結構	70
9.4 「只有 n 個」與「不只 n 個」	70
10. 結論	72
參考文獻	74
附錄 1：對當方陣總覽	76
附錄 2：某些廣義量詞的集合論定義	81
附錄 3：本文定理的證明	82

1. 引言

「廣義量詞理論」(generalized quantifier theory, GQT)是當代「形式語義學」的重要分支，這個理論大大擴充了邏輯學所研究「量詞」(quantifier)的範圍。傳統邏輯只研究兩個量詞：「全稱量詞」universal quantifier 和「存在量詞」existential quantifier，GQT 則把研究範圍擴大為自然語言中幾乎所有限定詞／名詞結構，統稱「廣義量詞」(generalized quantifier, GQ)。此外，GQT 還研究涉及 GQ 的各種邏輯推理關係，其中尤以「單調推理」¹最引人注目。通過對 GQ「單調性」(monotonicity)的研究和分類，GQT 為以下「單調推理」提供了解釋：

- (S1) 有學生穿紅色的 T 恤 $\Rightarrow$ 有學生穿 T 恤
本校所有學生都穿 T 恤 $\Rightarrow$ 本校所有男生都穿 T 恤

不過，從論域(domain of discourse)方面看，GQT 的研究範圍一般僅限於「個體論域」，即「謂詞邏輯」所研究的論域，而不包括其他邏輯分支所研究的論域，如「時態邏輯」所研究的「時間論域」、「模態邏輯」所研究的「可能世界論域」等。不過，亦有某些學者把 GQT 的概念擴大應用於「時間論域」。舉例說，蔣嚴、潘海華(2005)便設有專章討論對時間的量化，並且還建立了某些「時間狀語」與 GQ 的對應關係，例如 always 對應「全稱量詞」、sometimes 對應「存在量詞」、never 對應「否定量詞」²等。De Swart (1996)也專門討論了時間量化的問題，而且還把 GQT 中的各種宏觀特性(特別是「單調性」)推廣到「時間論域」，從而解釋某些涉及時間狀語的單調推理。

其實，傳統邏輯早已看到不同論域之間的聯繫。傳統邏輯著重研究的推理問題有兩大類：直接推理和間接推理，前者以「對當關係」推理為代表(此外還有「結構變換」推理)，後者以「三段論」(syllogism)推理為代表。所謂「對當關係」，是指 Aristotle 所研究的四個「量化句」(亦稱「性質命題」categorical statement，包括「所有 A 是 B」、「所有 A 不是 B」、「有 A 是 B」、「有 A 不是 B」，傳統邏輯稱為 A、E、I、O)之間的四種推理關係：「差等關係」(subalternate)、「矛盾關係」(contradictory)、「反對關係」(contrary)和「下反對關係」(subcontrary)。後來有人把這些關係總結成一個圖表，稱為「對當方陣」(square of opposition)(為區別於現代某些邏輯學家提出的其他類型的對當方陣，本文把傳統邏輯的對當方陣稱為「古典對當方陣」，詳見附錄 1 圖 1)。上述「量化句」的對象是「個體論域」中的元素，所以「對當方陣」本來是用來表述「個體論域」中的推理關係的。但是

¹ 「單調推理」有廣狹二義。廣義的「單調推理」是指如果能從某個前提集合導出某結論，那麼把新的前提加入該前提集合，仍能導出該結論。本文所指的「單調推理」是狹義的「單調推理」，其定義見下文。

² 「否定量詞」是指表示「沒有」的量詞。在傳統邏輯中，「沒有」是「否定詞」與「存在量詞」的複合體，因而沒有特別給它一個名稱。本文為方便以下的討論，所以設立這個術語。

歷來有不少邏輯學家注意到，可以把「對當方陣」推廣到其他邏輯分支，周禮全(1994)便記錄了歷代邏輯學家總結出來的多種「非經典」對當方陣，包括「真勢模態邏輯」(alethic modal logic)、「道義模態邏輯」(deontic modal logic，亦作「規範模態邏輯」)和兩個「時態邏輯」(temporal logic)的對當方陣(本文對周禮全(1994)記錄的對當方陣略作修改，載於附錄 1 圖 2 至圖 5)。其實，在 Leibniz 把「必然 p」和「可能 p」分別解釋為「在所有可能世界中 p 都真」和「在至少一個可能世界中 p 真」，從而把「模態算子」解釋成「可能世界論域」上的量詞後，上述各種「非經典」對當方陣與「經典」對當方陣之間的相似性便不言而喻了。

傳統邏輯的「三段論」推理以「直言三段論」為主，是「個體論域」上的推理關係。但是從 Aristotle 開始，歷代邏輯學家便已把「三段論」推理推廣至其他邏輯分支，從而導出「模態三段論」、「道義三段論」等(參見朱志凱(1989))。由此可見，傳統邏輯學家雖然分門別類地研究各種邏輯分支，但他們從來沒有忽視各種邏輯分支之間的聯繫，某一支的很多概念、結果，往往可以推廣應用於其他分支。

有些語法學家也注意到量詞與「情態助動詞」(相當於「模態算子」)之間的聯繫，例如 Langacker (1991)便指出 all、most、some 與 must、should、may 之間的對應關係。在他的「認知語法」框架下，「量詞」與「情態助動詞」正好分別是「名詞短語」和「分句」層面的「語境定位謂項」(grounding predication)，具有平行的語法功能。

其實，我們還可以從自然語言的語法系統獲得更多啓示。我們知道，很多 GQ 對應於自然語言的限定詞／名詞結構，而自然語言的限定詞／名詞結構除了可用來對「個體」量化外，亦可用來對其他範疇(包括時間、空間、原因、方式等)進行量化。例如英語除了 somebody、something 外，還有 sometimes、somewhere 等，而「世界語」(Esperanto)在這方面更是表表者。世界語有著一套非常整齊劃一的「相關詞」(correlative)，茲列表如下(摘自魏原樞、徐文琪(1986))：

表 1

	人物	事物	性質	領屬	時間	空間	原因	方式	數量
集合	ĉiu	ĉio	ĉia	ĉies	ĉiam	ĉie	ĉial	ĉiel	ĉiom
不定	iu	io	ia	ies	iam	ie	ial	iel	iom
否定	neniu	nenio	nenia	nenies	neniam	nenie	nenial	neniel	neniom
指示	tiu	tio	tia	ties	tiam	tie	tial	tiel	tiom
疑問	kiu	kio	kia	kies	kiam	kie	kial	kiel	kiom
關係	kiu	kio	kia	kies	kiam	kie	kial	kiel	kiom

請注意上表中的「集合」、「不定」、「否定」和「指示」相關詞分別對應於「全稱量詞」、「存在量詞」、「否定量詞」和「定冠詞」，例如 *ĉiu* 表示「所有人」、「*nenio*」則代表「沒有東西」；而「人物」、「事物」、「性質」等類別則對應於各種論域，其中「人物」和「事物」合起來便相當於「個體論域」。

現在以一個世界語的例句及其漢語翻譯來說明「相關詞」的特點。

(S2) *Li ĉiel klopodas gajni la titolon “bravulo”.*
 他 一切方法 想 得到 定冠詞 稱號 英雄
 「他想盡一切方法以得到『英雄』的稱號。」

請注意世界語只用一個單詞 *ĉiel* 來表達「集合+方式」的意思，而漢語則須以短語「盡一切方法」來表達相同的意思。同樣，英語也因缺乏一個像“*everyhow”的詞，所以也要用短語“in every way”來表達同一意思。世界語的「相關詞」系統給予我們一個重要啓示：既然在自然語言句法上，「空間」、「原因」、「方式」等範疇與「個體」範疇具有平行關係，那麼這些範疇在邏輯上也應與「個體」範疇具有平行的特性，即應可對這些範疇進行量化。

從邏輯學的角度看，在不同的論域下進行量化，所得的邏輯結果沒有太大差別，這也許就是 GQT 歷來把研究範圍集中於「個體論域」的原因。可是，從語言學的角度看，各種論域下的量化結構各有其語言特點。而且，研究自然語言如何表達不同論域下的量化結構，也能揭示自然語言在這方面的豐富表達力。正是基於此一認識，本文採取一種「橫向」的研究策略(即廣泛探討把 GQ 推廣應用於其他領域的可能性)，有別於歷來 GQT 採取的「縱向」研究策略(即把研究範圍限定於「個體論域」，深入探討在此論域下與 GQ 有關的各種邏輯問題)。

2. 本文的主旨和研究方法

本文的主旨可以概括為三個詞：「擴大」、「深化」和「統一」。首先，本文將把 GQT 的某些定義、特性(特別是「單調性」)推廣到其他論域。這樣做將帶來兩方面的效果：一方面把 GQ 的量化範圍和「單調推理」從「個體論域」擴大至其他論域，包括前面提過的「時間論域」、「可能世界論域」，以及一些前人未有提過的領域(如「模糊程度」、「比較結構」等)；另一方面亦把某些「非經典」量詞(例如表示數量比較的量詞、模糊量詞等)引入到傳統邏輯的某些領域，從而推導出某些新的內容，如「模糊模態算子」、「模糊對當方陣」、「數量比較三段論」等。除了一般簡單句外，本文還會把討論擴展至「並列結構」和「焦點結構」。

本文並不單只應用前人的成果，而是要深化已有的成果。本文將運用當代形式語義學和數學的多種方法重新考察傳統邏輯的某些課題，如對當方陣、結構變換、三段論推理等。其實，Peterson (2000)和高東平(2006)也進行了這方面的研究。Peterson (2000)把對當方陣和三段論推理擴大應用於某些模糊量詞(如 *almost all*、*most*、*many*)以及表示數量、比例的量詞，並為此而推廣了三段論的推理規則和「周延」(*distribution*)概念。高東平(2006)則對 Peterson (2000)的結果作出修改和進一步的推廣。不過他們的研究沒有應用 GQT 對這些量詞的集合論定義和模糊數學方法。本文將把傳統邏輯的概念與當代的 GQT 和模糊數學加以結合，並將深入探討對當方陣的背後理據，總結出其一般模式。

歷來介紹 GQT「單調推理」的文獻，大多只描述其內容，而甚少探討其背後的理據。Hoeksema (1986)討論了單調性現象，他特別討論到「否定」對單調性的影響，並嘗試總結出一般規律；但他沒有從數學上對這些規律作出證明，而且他的表述也是非形式的。張喬(1998)則把對單調性的研究推廣至「模糊量詞」，但她的研究結果是從各種推理實例中歸納出來的，而非通過數學的演繹證明。劉偉(2002)則用集合論方法具體證明了「全稱量詞」的「左單調性」，但只是「點到即止」，沒有討論其他 GQ 單調性的證明。本文將運用集合論方法全面探討單調推理的理據，並總結出更具概括性的「單調推理原理」。

本文將沿襲 GQT 的做法，運用集合論語言研究並表述 GQ。此外，本文亦採用蔣嚴、潘海華(2005)介紹的「三分結構」(*tripartite structure*)作為分析工具。儘管「三分結構」在本質上也是一種集合論語言，但由於它以統一的形式突出了 GQ 定義中的三個主要部分(詳見下文的定義)，因而具有提綱挈領的優點。利用「三分結構」、「單調性」、「三段論」等概念的定義會變得非常清晰。我們會看到「對當關係」也可歸結為一種「單調推理關係」，從而確立傳統邏輯與當代 GQT 之間的統一性。

本文的研究對象雖以漢語的 GQ 為主，但本文的立論大多基於普遍的邏輯語義原則，因此大多數結論亦適用於其他自然語言。鄒崇理(2002)也曾深入研究把 GQT 應用於漢語的情況，但其主旨是建構漢語 GQ 的部分語句(fragment)推理系統，並證明這個系統的某些「元邏輯」特性，與本文主旨不同。

由於本文重點並非要建構一個形式系統，本文一般不考慮句法問題，也不從「組合性原理」(principle of compositionality)的角度考慮問題。因此之故，本文討論 GQ 的範圍也較為寬泛。雖然某些涉及量化的概念在漢語(以及其他自然語言)中並不表現為一個「詞」，而且其句法作用也往往跟限定詞有很大出入，例如漢語的「沒有」本身便是由一個副詞加一個動詞組成的「短語」，其句法作用也是主要作謂語而非定語；但從邏輯角度看，我們常常可以把「沒有」看做一個單位，對應於英語的 no。例如鄒崇理(2002)便把「沒有」處理成一個只能用於主語上的 GQ，石毓智(2001)則索性把「沒(有)」看做一個「邏輯小品詞」。此外，由於本文的討論範圍越出了傳統邏輯以至 GQT 所定義的「量詞」範圍，為使討論具有更大的概括性，本文有時會用「算子」(operator)一詞代替「量詞」，並把含有「算子」的語言結構稱為「量化結構」(quantified structure)。

最後還要指出，本文討論的是一般邏輯學所研究的推理，而非「語用推理」。在日常語言使用中，有些人可能不贊同本文討論的某些推理，例如

(S3) John 必然成功 $\Rightarrow$ John 可能成功

他們認為當某人說「John 可能成功」時，他暗含著「John 並不必然成功」的意思，因為如果他的意思是「John 必然成功」，那麼他便不應說「John 可能成功」。既然「可能」暗含「不必然」的意思，「必然」就不可能涵蘊「可能」。筆者認為，這種觀點正是 Grice「合作原則」中的「量的準則」以及語用學中「梯級隱涵」(salar implicature)描述的情況。此外，石毓智(2001)提出「否定範圍的規律」，指出在自然語言中否定一個量 X 時，往往暗含著肯定一個迫近 X 的較小的量，例如當某人說「那個水塔沒有十米高」時，一般是指水塔的高度是八、九米，而不太可能是一、二米。以上這種推理有別於一般邏輯推理，也可算作某種「語用推理」。由於「語用推理」是另一層面的課題，不在本文討論範圍內。

3. 基本定義

以下介紹本文將討論到的幾個重要概念的定義。

3.1 廣義量詞

Keenan & Westerstahl (1993)用一套特別的符號為 GQ 分類(以下根據 Westerstahl (2005)略作簡化)，並詳細討論了 $\langle 1 \rangle$ 、 $\langle 1,1 \rangle$ 、 $\langle 1,1,1 \rangle$ 、 $\langle 1,1,2 \rangle$ 等類 GQ。第一類的例子如「everything」、「somebody」、「John」等，這類 GQ 相當於句法中的代名詞／名詞短語³；第二類的例子如「所有」、「至少有一個」等，這類 GQ 相當於句法中的限定詞；第三類的例子如「more ... than ...」、「as many ... as ...」等，這類 GQ 可看成含有多個論元的限定詞，Beghelli (1994)把這種 GQ 稱為「結構化量詞」(structured quantifier)；第四類的例子如「每個...一個」等，這類 GQ 其實是由兩個 GQ 組成的複合結構，反映了「及物動詞句」的量化結構。由於 $\langle 1,1 \rangle$ 類 GQ 是 GQT 研究得最多的類別，以下對 GQ 的討論以 $\langle 1,1 \rangle$ 類 GQ 為主。

Keenan & Westerstahl (1993)把 $\langle 1,1 \rangle$ 類 GQ 定義為兩個集合之間關係的算子，例如把 some 定義為

$$(F1) \quad \text{some}(A)(B) = 1 \text{ iff } A \cap B \neq \emptyset$$

即 some 是以兩個集合為論元並以 0 或 1 為值的算子，當這兩個論元的交集不為空集時，算子的值為 1，否則為 0。

3.2 三分結構

「三分結構」由「算子」、「左論元」(又稱「限定部分」restrictor)和「右論元」(又稱「主體部分」nuclear scope)三部分組成。假如我們把前述的 $\text{some}(A)(B)$ 抽象為 $Q(A)(B)$ (這裡 Q 代表 $\langle 1,1 \rangle$ 類 GQ)，那麼三分結構中的算子、左論元和右論元便正好與 Q 、 A 和 B 一一對應。「三分結構」是一個具有廣泛適用性的概念，定義中的算子不必限於 GQ。只要是涉及兩個集合之間的關係，都可以表述為三分結構。例如 Aristotle 討論的四個「量化句」(即前述的 A 、 E 、 I 、 O)便可以表述為「*所有* $(A)(B)$ 」、「*所有* $(A)(\sim B)$ 」、「*有* $(A)(B)$ 」和「*有* $(A)(\sim B)$ 」。這裡的「*所有*」和「*有*」以斜體表示，是為了突出其算子性質，前者代表「包含於」(相當於集合論中的符號 $\subseteq$)，後者則代表「有共同元素」(相當於 $\dots \cap \dots \neq \emptyset$)，而 $\sim$ 則代

³ GQT 對 GQ 採取一種寬泛的定義，把所有名詞短語(包括帶有限定詞的名詞短語和「光桿名詞短語」)都歸入 GQ 的範圍。

表集合的「補」運算，即 $\sim A = E - A$ （這裡沿襲 GQT 的習慣，以 E 代表個體論域）。若將「所有」和「有」寫成集合論中的常用符號，「所有(A)(B)」和「有(A)(B)」便應寫成「 $\subseteq(A)(B)$ 」和「 $(\dots \cap \dots \neq \emptyset)(A)(B)$ 」。這是數理邏輯和計算機科學中常用的「前置式」(prefix)算子記法，我們可以把它改成「中置式」(infix)記法並略去不必要的括號、省略號等，使得 $A \subseteq B$ 和 $A \cap B \neq \emptyset$ ，這樣便更符合常用的集合論語言習慣。以下筆者會視乎語言習慣採用「前置式」或「中置式」記法。附錄 2 列載了某些 GQ 的三分結構式及其集合論定義。

三分結構的概念不僅可用來表述集合之間的關係，也可用來表述元素與集合之間的屬於關係，以及數字與數字之間的比較關係。這是因為元素與集合之間的「屬於關係」可以轉化為由有關元素組成的集合與母集之間的「包含關係」。例如 $j \in R$ 可以轉化為 $\{j\} \subseteq R$ ，這樣三分結構便不僅可以表述量化句，亦可表述帶單純謂詞的句子，如“John runs”便可以表述為「 $\subseteq(\{j\})(R)$ 」。同樣，自然數也可表述為某些特殊集合。例如 0、1、2 可分別表述為 $\emptyset$ 、 $\{\emptyset\}$ 、 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ （參見鄭君文、張恩華(1995)）。這樣自然數與自然數之間的「比較關係」便可以表述為元素與集合之間的「屬於關係」，例如 $1 < 2$ 可以表述為 $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 。至於其他數系(如負數、有理數、實數等)，根據相應的數學理論，都可以基於自然數而作出定義，這裡就不詳細討論了。在以下的討論中，凡涉及具體的數字，筆者會直接使用數字以及和數字有關的各種運算符號(如 $<$ 、 $=$ 、 $|$ 等)，我們只要記著數字可以定義為集合便行了。

把數字引入三分結構的框架後，我們便可表述某些涉及數字的量化句了。例如「多數學生是男生」便可以表述為

$$(F2) \quad \text{多於}(|\{\text{學生}\} \cap \{\text{男性}\}|)(|\{\text{學生}\} - \{\text{男性}\}|)$$

這裡的「多於」就是數學上常用的比較符號「 $>$ 」。或者我們可以定義一個新的算子「多數」，它的定義為

$$(F3) \quad \text{多數}(A)(B) = 1 \text{ iff } |A \cap B| > |A - B|$$

這樣便可以把「多數學生是男生」表達為「 $\text{多數}(\{\text{學生}\})(\{\text{男性}\})$ 」了。

3.3 單調性

有了三分結構的概念，我們便可以為「單調性」提供一個「操作定義」。算子 Q 是「左遞增」的當且僅當對所有 A 、 B 、 A' 而言， $Q(A)(B) \Rightarrow Q(A')(B)$ ，其中 A' 是 A 的真母集(proper superset)。若把上述定義中的真母集換成真子集(proper

subset)，使得「左遞減」的定義。算子 Q 是「右遞增」的當且僅當對所有 A 、 B 、 B' 而言， $Q(A)(B) \Rightarrow Q(A)(B')$ ，其中 B' 是 B 的真母集。若把上述定義中的真母集換成真子集，使得「右遞減」的定義。若 Q 是「左(右)遞增」或「左(右)遞減」的，則 Q 是「左(右)單調」的；若 Q 不是「左(右)單調」的，則 Q 是「左(右)非單調」的。

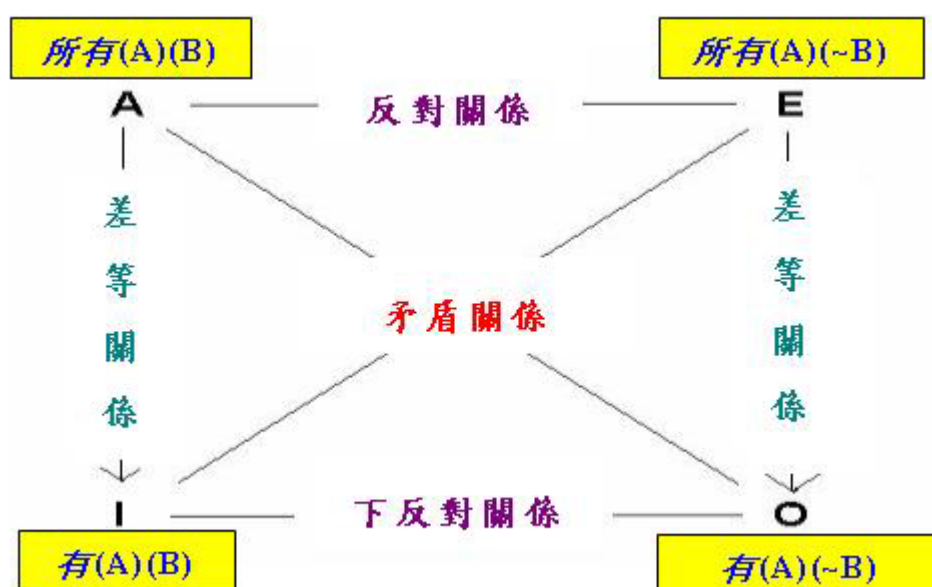
以上「左／右單調性」定義的共同點是把 Q 固定而讓 A/B 變化。如果我們把 A 和 B 固定而讓 Q 變化，能否得到第三種單調性定義？下文將會證明，這第三種單調性，即不同算子之間的單調推理關係，就是「古典對當方陣」中的「差等關係」。

4. 對當關係的數學解釋

4.1 個體論域

4.1.1 「所有對當方陣」

筆者首先討論 Aristotle 有關四個量化句的古典對當方陣(姑名之為「所有對當方陣」，見下圖)。



首先必須說明的是，以上方陣乃建基於一個預設，即在以上包含「所有」的兩個語句中，A 皆非空集，此即所謂「主語存在預設」。現代數理邏輯把全稱量詞定義為一種條件關係，即「所有(A)(B)」被定義為對所有元素 x 而言，如果 x 是 A，則 x 是 B。根據邏輯對「實質蘊涵」的定義，當某條件式的前件假時，該條件式自動取真值。換句話說，即使 A 是空集，「所有(A)(B)」仍然真。但在 A 為空集的情況下，以上方陣中的差等關係、反對關係和下反對關係便不成立了，那麼「古典對當方陣」將變成數理邏輯學家所稱的「布爾 Boolean 對當方陣」，並將失去古典對當方陣中的很多內容⁴。為保存這些內容，本文在討論對當方陣時，把 A 為空集這種情況排除掉。請注意「 $A \neq \emptyset$ 」在這裡是一種「預設」(presupposition)而非「斷言」(assertion)，根據語用學上有關「預設」的定義，當某命題被否定時，其預設仍然成立。這一點對上述對當方陣來說是非常重要的，因為假如「 $A \neq \emptyset$ 」是「所有(A)(B)」的斷言的一部分(即該句的邏輯形式為 $A \subseteq B \wedge A \neq \emptyset$)，那麼作為其否定的「有(A)(~B)」的邏輯形式便是 $A \cap \sim B \neq \emptyset \vee A = \emptyset$ 。

⁴ Brown (1984)和 Keenan (2003)對古典對當關係作出了推廣，定義了 GQ 之間的某些推理關係，這些關係可視為新型的對當關係，甚至可藉以構造新型的對當方陣。但新型的對當關係跟古典對當關係有很多不同之處，本文只擬集中討論古典對當關係。

可是這麼一來，便輪到語句「有(A)(~B)」中的 A 可能為空集了，但這有悖我們對這句的語感。因此為了避免這些問題，我們必須把「 $A \neq \emptyset$ 」看作一種預設。事實上，它不僅是包含「所有」的兩個語句的預設，而是方陣中四個語句的預設。

確定了「所有對當方陣」的預設⁵，我們便能利用集合論語言證明對當方陣上的各種關係。「所有對當方陣」上的四個語句可分別表述為 $A \subseteq B$ 、 $A \cap B \neq \emptyset$ 、 $A \subseteq \sim B$ 和 $A \cap \sim B \neq \emptyset$ 。從 $A \subseteq B$ 我們得到 $A \cap B = A$ (定理 1，見附錄 3)。由於 $A \neq \emptyset$ (主語存在預設)，因此我們得到 $A \cap B \neq \emptyset$ 。但是 $A \cap B \neq \emptyset \sim \Rightarrow A \subseteq B$ ⁶，反例如下：設論域 $E = \{x, y\}$ ， $A = \{x, y\}$ ， $B = \{x\}$ ，則 $A \cap B \neq \emptyset$ ，但 $A \not\subseteq B$ 。在上述推理中，只要我們把 B 換作 $\sim B$ ，便得到 $A \subseteq \sim B \Rightarrow A \cap \sim B \neq \emptyset$ 。上述反例同樣可證明 $A \cap \sim B \neq \emptyset \sim \Rightarrow A \subseteq \sim B$ 。由此我們證明了「所有對當方陣」的兩個差等關係。接著讓我們來看對當方陣中的兩個矛盾關係。假設我們否定 $A \subseteq B$ ，即 $A \not\subseteq B$ 。根據定理 2(2)，此式等價於 $A \cap \sim B \neq \emptyset$ 。其次我們否定 $A \cap B \neq \emptyset$ ，即 $A \cap B = \emptyset$ 。根據定理 2(3)，此式等價於 $A \subseteq \sim B$ 。由此我們證明了兩個矛盾關係。接著我們考慮 $A \subseteq B$ 與 $A \subseteq \sim B$ 的反對關係。由於 $B \cap \sim B = \emptyset$ ，A 不可能既是 B 的子集，又是 $\sim B$ 的子集，所以上述兩式不可同真。但它們可以同假，設論域 $E = \{x, y\}$ ， $A = \{x, y\}$ ， $B = \{x\}$ ，則 $\sim B = \{y\}$ 。因此得 A 既非 B 的子集，亦非 $\sim B$ 的子集，由此證明上述兩式的反對關係。最後考慮 $A \cap B \neq \emptyset$ 和 $A \cap \sim B \neq \emptyset$ 的下反對關係。由於根據定理 2 和前面的論述，這兩式的否定 $A \cap B = \emptyset$ 和 $A \cap \sim B = \emptyset$ (分別等同於 $A \subseteq \sim B$ 和 $A \subseteq B$) 不可能同真，因此這兩式不可能同假。但這兩式卻可以同真，只要使用剛才假設的論域 E 和集合 A、B 的定義便可。根據這個假設， $A \cap B = \{x\}$ ， $A \cap \sim B = \{y\}$ ，兩者都不等於 $\emptyset$ 。這兩式的下反對關係得證。

此外，根據定理 2(3)，我們還可以看到以上對當方陣右上角的語句「所有(A)(~B)」在邏輯上等值於「沒有(A)(B)」(GQT 通常把「沒有(A)(B)」定義為 $A \cap B = \emptyset$)。由此可見，「所有對當方陣」反映了「全稱量詞」、「存在量詞」和「否定量詞」之間的推理關係。

4.1.2 「只有對當方陣」

以上筆者利用集合論語言解釋了「所有對當方陣」背後的邏輯理據。接下來的問題是，能否將上述推理模式加以推廣，從而發掘新的對當方陣？「所有(A)(B)」的集合論表達式 $A \subseteq B$ 顯示「所有」對應於集合論的 $\subseteq$ 關係。一個很自

⁵ 其實除了「主語存在預設」外，還必須預設主語不是單元集(singleton)，因為如果主語是單元集，那麼「所有(A)(B)」便等價於「有(A)(B)」，上述「所有對當方陣」便不再成其為對當方陣了。

⁶ $\sim \Rightarrow$ 代表「不蘊涵」。請注意「 $\sim$ 」在本文中有兩重意思，它既代表邏輯上的「非」，亦代表集合論上的「補」運算。

然的推論是，能否把 $\subseteq$ 換成它的「逆向算子」 $\supseteq$ 從而得到另一個 GQ？事實上，在自然語言中， $\supseteq$ 對應的詞語就是「只有」⁷。可是，在建構一個包含「只有」的對當方陣(姑名之為「只有對當方陣」)前，我們須先解答兩個基本問題，就是「只有」是否具有 GQ 性質，以及「只有對當方陣」是否滿足「存在預設」？

GQT 一向把「只有」摒於研究範圍以外，這是由於很多學者認為自然語言的 GQ 都具有「守恆性」(conservativity)，而「只有」卻不滿足「守恆性」。可是 De Mey (1996)指出 GQT 把「守恆性」作為 GQ 的普遍屬性，是未經嚴格論證的一種「教條」(dogma)。他同時指出，如果把「守恆性」的定義加以推廣⁸，那麼「只有」也滿足「守恆性」，只不過它所滿足的是「左守恆性」，跟其他 GQ 的「右守恆性」不同而已。因此從更廣義的角度看，「只有」與其他 GQ 的差異其實不大。而且更重要的是，「只有」跟其他 GQ 一樣，可視為兩個集合之間關係的算子，他認為這一點是判定 GQ 的關鍵。其次，陳宗明(1993)和徐頌列(1996)都把「只有」列為現代漢語四種總括表達式之一，稱為「僅指」，與其他三種總括表達式「統指」(以「所有」為代表)、「任指」(以「任何」為代表)和「逐指」(以「每」為代表)並列。由此可見，「只有」的確具有量詞性質。而且，筆者認為「只有」所代表的 $\supseteq$ 是道地的 $\langle 1, 1 \rangle$ 類 GQ，符合三分結構的定義，因此沒有理由把它摒於研究範圍之外。

其次，由於 $\supseteq$ 是 $\subseteq$ 的逆向算子，「只有」也有「存在預設」的問題。具體地說，如要「只有(A)(B)」 $\Rightarrow$ 「有(A)(B)」，即 $A \supseteq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ ，我們必須假定 B 不為空集，此即「謂語存在預設」。可是，在日常語言中，我們可以用「只有」表達各種假設語句，這些句子都不滿足「謂語存在預設」。例如句子「只有能超越熱力學定律的人才能製造永動機」的謂語「能製造永動機」便是一個空集(這裡把謂詞看成一個集合)。這是否表示「只有」跟「所有」有著本質上的不同呢？

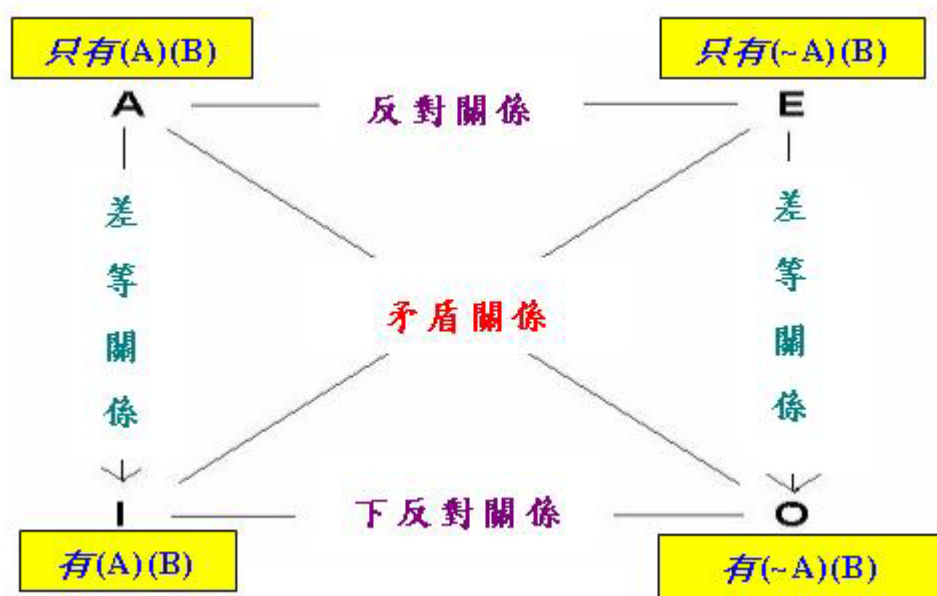
Vendler (1970)曾指出英語的 all (相當於漢語的「所有」)是模稜兩可的，或者換句話說，有兩個不同的 all。「實存性的 all」(existential all)近似 every 和 each，它所修飾的名詞是實際存在的；而「非實存性的 ell」(nonexistential all)則近似 any，它所修飾的名詞是假設性，不一定存在的。以上分類的重點在於看有關句子是描述已然事態還是未然事態。筆者認為，「只有」也可分為「實存性的只有」和「非實存性的只有」，前者用於描述已然事態，有關句子滿足「謂語存在預設」

⁷ 這是因為「只有」和「所有」的集合論定義分別對應「必要條件句」和「充分條件句」，而邏輯學界一般認為這兩種條件句互為逆向對等形式，即「如果 p，則 q」 $\Leftrightarrow$ 「只有 q，才 p」。但 McCawley (1993)反對上述等值式。根據 McCawley (1993)，只能把「只有(A)(B)」理解為「如果不是 B，則不是 A」。雖然 McCawley (1993)的觀點有一定道理，但本文還是採納邏輯學界的主流意見。

⁸ 根據 De Mey (1996)的定義，Q 是「守恆」的，當且僅當它滿足下列關係式： $Q(A)(B) \Leftrightarrow Q(A)(A \cap B)$ 或 $Q(A)(B) \Leftrightarrow Q(A \cap B)(A)$ 。前者可稱為「右守恆性」，後者可稱為「左守恆性」。

(例如當我們說「在昨天的嘉年華會中，只有學生才穿校服」時，穿校服的人顯然是存在的)；而後者用於描述未然事態，有關句子不滿足「謂語存在預設」。這樣我們便只需規定，「只有對當方陣」中的「只有」是「實存性的只有」，滿足「謂語存在預設」，便能保證該方陣中的各種關係都成立了。此外，筆者還認為，即使是描述未然事態的句子，仍然滿足某種「存在預設」，只不過這種預設是在現實世界以外的某種可能世界(或「不可能世界」)中成立罷了。由於這涉及與「違實條件句」(counterfactual conditional)有關的可能世界理論，本文不作深入討論。

解決了上述兩個基本問題後，我們便可以著手構造「只有對當方陣」了。由於 $\supseteq$ 是 $\subseteq$ 的逆向算子，語句「只有 A 是 B」等同於「所有 B 是 A」。這樣我們只需把「所有對當方陣」中 A、B 的角色對調一下，便可得到如下的「只有對當方陣」。具體地說，就是把「所有對當方陣」中的「所有」換成「只有」，並把否定的對象從原來的 B 換成 A。這個對當方陣的證明與「所有對當方陣」的證明完全對應，本文不再重覆。



在以上方陣中， $\sim$ 的作用對象是 A 而非 B。這個 $\sim$ 是集合的求補運算， $\sim A$ 的定義就是「論域中不是 A 的個體組成的集合」。可是這裡有一個語言使用習慣的問題。A 通常表達為一個名詞短語，在漢語中，名詞短語的內部否定可用「非」表示。但這個「非」有很大的使用限制，只有少數名詞短語(如「會員」、「教友」、「自僱人士」)才能用「非」來否定。對於大多數名詞短語，如要進行否定，只能把它們表達為「不是...的...」或索性把句子換成其逆向對等形式。例如設 A 代表「學生」，B 代表「穿校服的人」，那麼「有 $(\sim A)(B)$ 」可表達為「有不是學生的穿校服」或者「有穿校服的不是學生」($\sim A \cap B \neq \emptyset$ 的逆向對等形式是 $B \cap \sim A \neq \emptyset$)。同樣，「只有 $(\sim A)(B)$ 」可表達為「只有不是學生的才穿校服」或者「所有穿校服的都不是學生」($\sim A \supseteq B$ 的逆向對等形式是 $B \subseteq \sim A$)。

4.1.3 「所有對當方陣」與「只有對當方陣」的關係

比較一下「所有對當方陣」與「只有對當方陣」，我們發現位於它們左下角的語句都是「有(A)(B)」，由於這兩個對當方陣的右上角都與該語句處於矛盾關係，我們可以得出如下結論：上述兩個對當方陣右上角的語句是等值的，即「所有(A)(~B)」等值於「只有(~A)(B)」(這兩句的等值關係也可根據定理 3 得到)。由於以上兩句各有逆向對等式「只有(~B)(A)」和「所有(B)(~A)」，而「所有(A)(~B)」和「所有(B)(~A)」又可以分別表達為帶「沒有」的等值式——「沒有(A)(B)」和「沒有(B)(A)」，這樣我們便一共得到六句互相等值的命題。由此我們看到，只要在謂詞邏輯中加入「所有」的逆向對等形式「只有」，我們便得到豐富得多的內容。

以上兩個對當方陣還可用來解釋某些涉及連詞「和」和「或」的語句之間的推理關係。設有兩個個體 John 和 Mary，我們如何表達「John 和 Mary 都上學」和「John 或 Mary 上學」？我們知道，當主語是個體數目大於一的有限集並且其元素可以列舉出來時(如 $A = \{j, m\}$)，謂詞邏輯的全稱量詞 $\forall$ 和存在量詞 $\exists$ 可以分別看成廣義的「和」($\wedge$)運算和「或」($\vee$)運算，即 $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) = B(j) \wedge B(m)$ 以及 $\exists x(A(x) \wedge B(x)) = B(j) \vee B(m)$ 。由於全稱量詞和存在量詞分別對應於本文討論的「所有」和「有」，這樣我們便找到了表達上述兩句的方法，即「John 和 Mary 都上學」可以表達為 $\{j, m\} \subseteq G$ (這裡用 G 代表謂詞「上學」)，而「John 或 Mary 上學」則可以表達為 $\{j, m\} \cap G \neq \emptyset$ 。這樣某些涉及「和」和「或」的推理關係便可以視為「所有對當方陣」中的推理關係的特例。例如「John 和 Mary 都上學」 $\Rightarrow$ 「John 或 Mary 上學」便是「所有(A)(B)」 $\Rightarrow$ 「有(A)(B)」的特例。同樣，「John 和 Mary 都上學」與「John 或 Mary 不上學」的矛盾關係便是「所有(A)(B)」與「有(A)(~B)」的矛盾關係的特例。

現在我們來考慮，如果把上段的 $\{j, m\} \subseteq G$ 改為 $\{j, m\} \supseteq G$ ，這代表甚麼意思？這語句表示所有上學的人(假設論域是人的集合)都屬於由 John 和 Mary 組成的集合，但它沒有保證 John 和 Mary 兩者都上學，因此這語句的意思應是「只有 John 或 Mary 上學」。這樣，運用「只有對當方陣」中的關係，我們便又可得到更多推理關係。例如從「只有(A)(B)」與「有(~A)(B)」的矛盾關係，我們可以推出，「只有 John 或 Mary 上學」的否定就是「有 John 或 Mary 以外的人上學」，亦即「有上學的人不是 John 或 Mary」。

討論到這裡，筆者發現一個問題。如果 $\{j, m\} \subseteq G$ 代表「John 和 Mary 都上學」，而 $\{j, m\} \supseteq G$ 代表「只有 John 或 Mary 上學」，那麼「只有 John 和 Mary(兩人)上學」又應如何表達？只要細想想，這句話的意思其實是「John 和 Mary 都上學並且只有他們兩人上學」。換句話說，「只有...和...」就是「所有」(以「和」

表示)與「只有」的結合。用集合論語言來表達，就是 $\{j, m\} \subseteq G \wedge \{j, m\} \supseteq G$ ，亦即 $\{j, m\} = G$ 。

4.2 時間論域

在透徹分析涉及個體論域的兩個對當方陣後，現在我們把上述推理推廣到其他論域。首先討論「時間論域」。在「時間論域」下，三分結構 $Q(A)(B)$ 中的 A 和 B 是由時間量組成的集合。時間量大致可分為兩大類：離散的時間量(即事件 event⁹)以及連續的時間量(即時間的延續長度 duration)。相應地，我們亦可以從兩個不同的角度對時間進行量化。若以事件作為量化的對象，那麼相對於謂詞邏輯中的「全稱量詞」、「存在量詞」和「否定量詞」，我們有「次次」、「有至少一次」和「一次也沒有」。若以延續長度作為量化的對象，又可以視乎「時間集合」的大小分為幾種情況。假如「時間集合」是「永恆時間」，相應的三個量詞就是「總是」、「有時」和「永不」。若把時間軸比擬為實數軸，那麼「永恆時間」就相當於整條實數軸，以區間形式表示就是一個無限長的區間 $(-\infty, \infty)$ 。正如在數學上無限長的區間除了上述形式外，還可以採取其中一個端點是有限實數的形式，如 $(-\infty, 0)$ ，「時間集合」也可以採取「半無限時間區間」的形式。相應於 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 的「時間集合」就代表「(整個)過去時間」和「(整個)將來時間」(這裡用數字 0 代表「現在」時刻)，相應的「全稱量詞」就分別是「過去一直」和「將來總是」，相應的「存在量詞」則分別是「過去曾經」和「將來有時」，而相應的「否定量詞」則分別是「過去從不」和「將來永不」。當然「半無限時間區間」也可以「現在」以外的時刻為其中一個端點，這樣的「時間區間」可表達自然語言中「自從」或「直至」的意義。舉例說，若以 x 代表「昨天三時正」這一時刻，那麼 $[x, \infty)$ 就代表「自從昨天三時正以來的時間」，相應的三個量詞分別是「自從昨天三時正一直」、「自從昨天三時正曾經」和「自從昨天三時正一直沒有」。 $(-\infty, x]$ 的情況類此。當然我們的時間區間還可以是一個有限區間，表達這種區間的方法既可以是一個含有「...至...」的短語，例如「十月一日至十月七日」，也可以是表達某一特定時段或過程／狀態的詞語，如「昨天」、「今晨他跑步的時候」等，相應於最後一例的三個量詞分別是「今晨他跑步的整個時間都」、「今晨他跑步時曾經」和「今晨他跑步的整個時間都不」。

在上段中，筆者討論了對時間進行量化的多種形式，由此可見自然語言在這方面的表達方式是非常豐富的。不過，從對當方陣的角度看，這些表面上不同的語言形式其實都可以表達為相同的邏輯形式。以下筆者把 GQ 的集合論定義擴大

⁹ 本文假設「事件」是有明確起訖點並因而可以計數(count)的時間量。當然，即使是瞬間發生的「事件」也是由連續的時間段落組成的，但若把整個「事件」看做一個單位，則可把「事件」看成離散量。另外，在漢語中，「次」既可用來指稱頻率(例句：「他每天刷兩次牙」)，亦可用來指稱事件(例句：「他每次去看牙醫都怕得要死」)。

應用於對時間的量化。由於現在我們的量化對象是時間，我們必須引入一個「時間論域」 T 。討論到這裡，我們有一個問題，究竟 T 的成員是甚麼？根據蔣嚴、潘海華(2005)和鄒崇理(2000)，當代形式語義學對 T 的成員的性質大致上有兩種看法，即把它們看成「時刻」(moment)或「時段」(interval)。雖然很多學者已指出「時刻語義學」的局限性，不過由於「時刻」概念較為直觀，且符合本文的目的，因此本文假定，當以連續時間量作為量化對象時， T 的成員是「時刻」，而當以離散時間量作為量化對象時， T 的成員則是「事件」。

在討論了「時間論域」 T 的「本體論」問題後，我們便可著手把時間量化式翻譯成集合論語言。我們把時間論域中的「全稱量化式」和「存在量化式」分別表達為 $T' \subseteq \{t: AT(t, p)\}$ ¹⁰ 和 $T' \cap \{t: AT(t, p)\} \neq \emptyset$ 。在以上兩式中， T' 是某個由時間量組成的集合， p 代表一個命題， AT 則是仿照蔣嚴、潘海華(2005)而引入的介詞，用以表達時間變量 t 與命題 p 之間的關係， $AT(t, p)$ 的意思就是 p 在時間 t 真¹¹。只要給 T' 和 p 賦以適當的解釋，我們便能表達各種時間量化句。例如若把 T' 解釋為「昨天」(可寫成 Y)，把 p 解釋為「John 穿校服」(可寫成 $U(j)$)，那麼 $Y \subseteq \{t: AT(t, U(j))\}$ 就表示昨天的全部時間都是 John 穿校服的時間，亦即「昨天整天 John 都穿著校服」。

此外，這裡還有一個和否定有關的問題。自然語言中的很多否定都是對謂詞的否定，可是在上段的表達式中，謂詞乃內嵌於集合符號內介詞 AT 的論元位置，例如「昨天整天 John 都不穿校服」表達為 $Y \subseteq \{t: AT(t, \sim U(j))\}$ 。為了方便進行推理，我們必須把否定詞從這個論元位置抽出於集合符號之外，這一點其實不難。由於我們所考慮的是「二值邏輯」，某命題 p 在時間 t 非真即假，因此 p 假的時間所組成的集就是 p 真的時間所組成的集的補集，即 $\{t: AT(t, \sim p)\} = \sim \{t: AT(t, p)\}$ 。這樣，「昨天整天 John 都不穿校服」便又可表達為 $Y \subseteq \sim \{t: AT(t, U(j))\}$ 。這式完全對應於「所有對當方陣」右上角的 $A \subseteq \sim B$ 。

由此我們建立了時間量化式與個體量化式的對應關係，因此個體論域中的「所有對當方陣」完全適用於時間量化式的推理。我們無需為時間量化式構造特別的對當方陣，只需把「所有對當方陣」中的 A 、 B 解釋成時間集合便行了。這樣，應用「所有對當方陣」，我們容易得到涉及時間狀語的推理，例如：

(S4) John 並非昨天整天都穿校服 $\Leftrightarrow$ John 昨天有時不穿校服

¹⁰ 嚴格地說，應在集合定義內的 t 後面加上「 $\in T$ 」以說明這個集合的成員來自「時間論域」。但為簡化寫法，這裡省去不寫。以下遇到類似情況，亦會使用類似的簡寫法，只須記住這些集合的成員來自適當的論域便行了。

¹¹ 嚴格地說， $AT(t, p)$ 應寫為 $AT(t, p) = 1$ 。不過為了簡化寫法，本文沿襲某些邏輯書的慣例，採用 $AT(t, p)$ 這種較為簡便的寫法。相應地， $AT(t, p) = 0$ 亦簡單寫作 $\sim AT(t, p)$ 。以下遇到類似情況，亦會使用類似的簡寫法。

從「所有」與「只有」這對逆向對等量詞，我們還可推知，時間量化式也應有類似「只有對當方陣」的推理。仿照上面的處理方法，我們可以把「John 只在昨天才穿校服」(假設把「論域」設定為過去數天的時間)表達為 $\{t: AT(t, U(j))\} \subseteq Y$ 。這樣，應用「只有對當方陣」，我們可以得到涉及「只有+時間狀語」的推理，例如：

(S5) John 並非只在昨天才穿校服 $\Leftrightarrow$ John 曾在昨天以外的其他時間穿校服

4.3 可能世界論域

接著我們把上述推理模式推廣到模態邏輯¹²。根據模態邏輯，「模態算子」可視為「可能世界」的量詞。為此，我們必須引入「可能世界論域」 W 以及代表「現實世界」的 W_r 。由於本文的重點並非討論「可能世界理論」，這裡不詳細考慮「可能世界」的「本體論」問題。不過，有一點要說明的是，這裡引入的「可能世界論域」必須有一定的邏輯結構。具體地說，我們必須規定，如果 $p \Rightarrow q$ ，那麼使 p 真的可能世界集必須被包含於使 q 真的可能世界集，否則我們將無從進行推理。

跟時間量化類似，「可能世界論域」 W 在不同應用中具體表現為不同的集合。根據蔣嚴、潘海華(2005)，若對可能世界作出不同詮釋，便可得到不同的模態邏輯：「真勢模態邏輯」、「道義模態邏輯」和「認知模態邏輯」。在「真勢模態邏輯」中， W 是在邏輯上與現實世界相容的所有可能世界組成的集合¹³。在這種邏輯中，「全稱量詞」、「存在量詞」和「否定量詞」分別是「必然」、「可能」和「不可能」。我們也可以把 W 界定為「道義可能世界論域」，相應的三個量詞分別是「必須」、「可以」和「不准」。我們還可以把 W 界定為「認知可能世界論域」，相應的三個量詞分別是「(基於...的知識)肯定」、「(基於...的知識)大概」和「(基於...的知識)不會」¹⁴。

現在我們把「可能世界論域」中的「全稱量化式」和「存在量化式」分別表達為 $W' \subseteq \{w: AT(w, p)\}$ 和 $W' \cap \{w: AT(w, p)\} \neq \emptyset$ 。在以上兩式中，除了引入代

¹² 其實「時態邏輯」也可算作「模態邏輯」的一種。不過，由於時間觀念本身較為直觀；若把時間看成某種「可能世界」，反而失去直觀性，所以本文對時間的量化作單獨的處理。

¹³ 模態邏輯一般在模態算子的定義中引入「相關性」(亦譯作「可及性」accessibility)的概念。例如「“必然 p ”在 w 真」可定義為 $\forall w'(wRw' \wedge p \text{ 在 } w' \text{ 真})$ ，定義中的 R 代表「相關關係」。由於本文採用集合論語言來定義模態算子，「相關性」概念乃體現於論域 W 的定義中。例如「真勢模態可能世界論域」就是由與現實世界相關(即在邏輯上相容)的所有可能世界組成的集合。

¹⁴ 「認知邏輯」其實有兩種，本文所指的「認知邏輯」乃根據蔣嚴、潘海華(2005)的定義。另一種「認知邏輯」則是有關「知道」、「相信」、「斷定」的邏輯，這種「認知邏輯」較為複雜，本文不予討論。

表某個可能世界集合的 W' 以及代表可能世界的變項 w 外，其餘的形式跟上文對時間量化式的處理完全一樣。如果 W' 被解釋成論域 W ，那麼由於 W 是「全集」(universal set)，根據「全集」的特性，以上兩個量化式等同於 $W = \{w: AT(w, p)\}$ 和 $\{w: AT(w, p)\} \neq \emptyset$ 。在這種情況下，必然真的句子就是在所有可能世界中都真的句子，即無條件的真，這種模態可稱為「絕對模態」。

除了「絕對模態」外，還有「相對模態」，即有條件的模態。在這種模態中， W' 被解釋為滿足某一條件 c 的所有可能世界的集合，用集合論語言表達就是 $W' = \{w: AT(w, c)\}$ 。這樣，「全稱量化式」和「存在量化式」就分別表達為 $\{w: AT(w, c)\} \subseteq \{w: AT(w, p)\}$ 和 $\{w: AT(w, c)\} \cap \{w: AT(w, p)\} \neq \emptyset$ 。其中前一式直譯出來是「所有令 c 真的可能世界都是令 p 真的可能世界」，用日常語言表達就是「如果 c 真，則 p (必然) 真」¹⁵，此即命題邏輯中的「充分條件句」；而後一式則表達「可能 c 真而且 p 真」。若把以上「全稱量化式」中的 $\subseteq$ 換成其逆向對等算子 $\supseteq$ ，便得到 $\{w: AT(w, c)\} \supseteq \{w: AT(w, p)\}$ ，用自然語言表達就是「只有當 c 真時， p 才真」，此即命題邏輯中的「必要條件句」。至此，透過「可能世界理論」，命題邏輯研究的兩種條件句都可以表述為集合論語言，而涉及這兩種條件句的很多推理關係都可以從「所有對當方陣」和「只有對當方陣」中得到刻劃¹⁶。例如前文討論過，「 $\text{所有}(A)(\sim B)$ 」 $\Leftrightarrow$ 「 $\text{只有}(\sim A)(B)$ 」。把這個等值關係應用於「充分條件句」和「必要條件句」，更容易推得以下等值關係：

(S6) 如果 John 來，則 Mary 一定不來 $\Leftrightarrow$ 只有 John 不來，Mary 才來

4.4 相關詞論域與命題論域

以上我們討論了把 GQ 的集合論定義推廣到「時間論域」和「可能世界論域」的情況。其實我們可以循此思路，把 GQT 推廣到更多論域。例如，從世界語的「相關詞」系統獲得啟發，我們可以引入「空間」、「原因」、「方式」、「數量」和「謂詞」¹⁷等論域(分別以 S 、 R 、 M 、 N 和 $PRED$ 代表)以及適當的介詞，便可以用集合論語言表達涉及多種範疇的量化句。例如，「John 用盡各種方式求救」可以表達為 $M = \{m: BY(m, HELP(j))\}$ 。這裡 $BY(m, HELP(j))$ 表示「John 用方式 m 求救」， M 則是「方式論域」，代表講話者想到的一切可用來求救的合理方式組

¹⁵ 嚴格地說，這個表達式不夠準確，因為這個表達式不能表達「如果 c 真，則 p 可能真」。筆者認為，應把「如果 c 真，則 p 必然真」表達為 $\{w: AT(w, c)\} \subseteq \{w: w \subseteq \{w': AT(w', p)\}\}$ ，這樣「如果 c 真，則 p 可能真」就可以表達為 $\{w: AT(w, c)\} \subseteq \{w: w \cap \{w': AT(w', p)\} \neq \emptyset\}$ 。不過，由於這兩個表達式過於複雜，本文不再深入探討這問題。

¹⁶ 為了讓「所有對當方陣」和「只有對當方陣」中的關係成立，還應加上一個類似前述「主／謂語存在預設」的規定，即這裡所討論的條件句都是「事實條件句」而非「違實條件句」。

¹⁷ 世界語的「相關詞」系統包含一個「性質」範疇。在邏輯學上，「性質」一般由「謂詞」表達，所以筆者在這裡採用更廣泛的「謂詞」概念來取代世界語的「性質」範疇，並把對應於這個範疇的論域稱為「謂詞論域」。

成的集合¹⁸，由於它是一個全集，所以這裡的 $\subseteq$ 變成了 $=$ 。這樣，應用「所有對當方陣」，我們又可以發掘出一些推理，以下提供關於「方式論域」和「空間論域」的推理：

(S7) John 沒有用盡各種方式求救 $\Leftrightarrow$ 至少有一種方法 John 沒有用來求救
 John 到處碰壁 $\Leftrightarrow$ John 沒有一處不碰壁

我們甚至可以引入一個「命題論域」PROP 以及一個由真命題組成的集合 TRUE。仿照上文 4.1.3 節對並列主語的處理，我們可以把合取命題(conjunction)「p 真和 q 真」和析取命題(disjunction)「p 真或 q 真」分別表達為 $\{p, q\} \subseteq \text{TRUE}$ 和 $\{p, q\} \cap \text{TRUE} \neq \emptyset$ 。這樣，應用「所有對當方陣」，我們可得到如下推理：

(S8) 並非 p 真和 q 真 $\Leftrightarrow$ p 假或 q 假
 並非 p 真或 q 真 $\Leftrightarrow$ p 假和 q 假

此即「命題邏輯」中的「德·摩根律」(De Morgan's law)。由此可見，「命題邏輯」的某些推理可歸結為「所有對當方陣」推理模式的特例。

4.5 模糊程度與比較結構

接著我們考慮如何把上述推理模式推廣到涉及程度¹⁹和比較結構的推理，筆者假設程度可以表達為數字。不過由於這裡涉及的程度詞「完全」、「在某程度上」、「最」、「較」等都是表達模糊量的算子，所以這裡的程度並不像高度、重量那樣可實際量度出來，而是「模糊程度」(fuzzy degree)，代表說話人對有關程度的一種主觀評估。本文借用「模糊數學」中的「隸屬度函數」(membership function) $\mu[S](x)$ 來刻劃「模糊程度」。這個二階函數有兩個論元 S 和 x，分別代表具有某性質的模糊集合和個體，用以表達 x 符合 S 的程度。 $\mu[S](x)$ 為 0 至 1 之間的實數，1 代表達到最高程度(相當於「完全」)，0 代表程度最低(相當於「完全不」，即「一點也不」)。這樣我們便可以把「John 完全可靠」、「John 在某程度上可靠」和「John 一點也不可靠」分別表達為 $\mu[\text{RELIABLE-PERSON}](j) = 1$ 、 μ

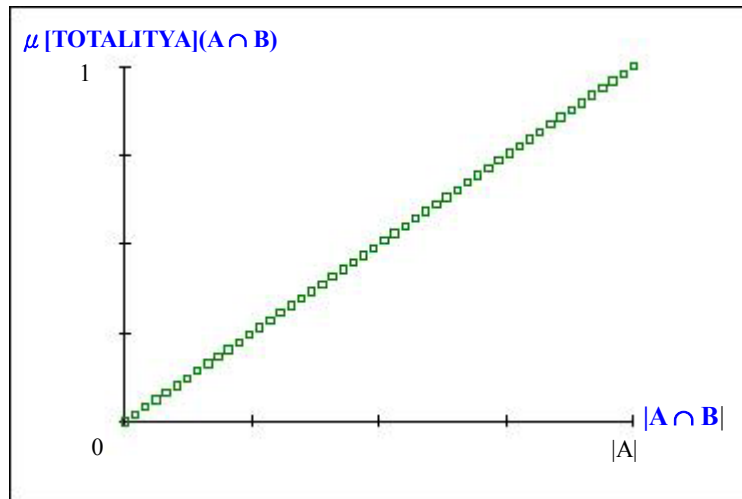
¹⁸ 這裡 M 是一個受限定的集合，而不是一切方式組成的集合，這是因為當某人說「John 用盡各種方式求救」時，他心目中的「方式」只包括他想到的一切可用來求救的合理方式，而不包括那些他想不到的或不可能的方式。其實，在自然語言中，很多「全稱量化句」的概括範圍都是受限定的。因此之故，本文經常強調論域的範圍是隨著具體應用而不同的。

¹⁹ 本文對「程度」採取一種廣義的觀點。按照這種觀點，不僅一般的形容詞有程度之分，某些動詞和抽象名詞也有程度之別。在某些情況下，修飾動詞的「程度詞」除了表達程度外，還兼有表達「範圍」的功能。例如在句子「我完全相信 John」中，「完全」除了表達動詞「相信」的程度達到最高外，在某些語境中亦兼指說話人在各方面均相信 John。

$[\text{RELIABLE- PERSON}](j) > 0$ 和 $\mu[\text{RELIABLE-PERSON}](j) = 0^{20}$ 。

可是我們如何把上段討論的內容與前面的「所有對當方陣」拉上關係？即如何建立「完全」等「程度詞」與 GQ 的聯繫？筆者認為，關鍵在於把 GQ 表達為數字形式。在自然語言中，人們有時會用比率來表達個體的數量，例如「本校百分之一百的會考生取得及格成績」就等同於「本校所有會考生取得及格成績」。用算式表達這個比率就是 $|A \cap B| / |A|$ ，其值正好介於 0 與 1 之間。如果我們用 X 代表這個算式，便可以把「所有對當方陣」中的四個語句重新表達為 $X = 1$ 、 $X > 0$ 、 $X = 0$ 和 $X < 1$ 。這裡我們同樣看到「主語存在預設」的必要性：假如 A 是空集，即 $|A| = 0$ ，那麼 $X = 0/0$ 便沒有定義。

爲了統一表達式，我們還需要把 $|A \cap B| / |A|$ 重新解釋為隸屬度函數。筆者首先借用 Cresswell (1976) 中的 totality 概念(近似漢語的「齊全」、「盡」等意思)，用 TOTALITY_A 來表示「齊備 A 所有成員的集合的模糊集合」²¹，然後定義以下隸屬度函數： $\mu[\text{TOTALITY}_A](A \cap B) = |A \cap B| / |A|$ ，其圖像為：



以上圖像乃由離散點組成，這是因為在個體論域下的集合 A 一般都只包含有限個元素，所以 $|A \cap B|$ 只體現為有限個離散數值。上述函數顯示子集 $A \cap B$ 相對於 A 的比率， $|A \cap B|$ 越接近 $|A|$ ，函數值便越接近 1；反之則越接近 0。當 $|A \cap B|$ 取兩個極端值(0 和 $|A|$)時，函數值分別為 0 和 1，分別相當於「沒有(A)(B)」和「所有(A)(B)」。透過這個隸屬度函數，「程度詞」和 GQ 便具有相同的表達形式，兩者之間的聯繫乃得以確立。

²⁰ 這種表達法實際上是把原句改寫為「John 是完全／在某程度上／一點也不可靠的人」，這跟 Cresswell (1976) 把“John is y tall (y = degree of tallness)”表達為“John is a man who is tall to degree y”是相通的。

²¹ 請注意 A 與 TOTALITY_A 是兩個性質完全不同的集合，前者是「非模糊集」(crisp set)，後者則是「集合的模糊集合」(fuzzy set of sets)。後者的「隸屬度函數」描述論域中任何一個集合符合「齊備 A 所有成員的集合」的程度，例如 $\mu[\text{TOTALITY}_A](A) = 1$ ， $\mu[\text{TOTALITY}_A](\emptyset) = 0$ 。

在新定義下，我們必須重新證明「所有對當方陣」中各推理關係的正確性，這是容易的。從 $X = 1$ 和 $X = 0$ ，容易分別推得 $X > 0$ 和 $X < 1$ 。但是從 $X > 0$ 和 $X < 1$ 卻不能分別推得 $X = 1$ 和 $X = 0$ (例如設 $X = 0.5$ 便行)，對當方陣中的兩個差等關係得證。若 $X \neq 1$ ，則 $X < 1$ 。相反，若 $X \geq 1$ ，則必得 $X = 1$ (因為 X 不可能大於 1)。 $X = 1$ 與 $X < 1$ 的矛盾關係得證。同理易證 $X > 0$ 與 $X = 0$ 的矛盾關係。 $X = 1$ 與 $X = 0$ 不可能同真，但可同假(設 $X = 0.5$)， $X = 1$ 與 $X = 0$ 的反對關係得證。同理易證 $X > 0$ 與 $X < 1$ 的下反對關係。

確立了「所有對當方陣」數字形式的正確性，我們便可把它應用於涉及程度詞「完全」、「在某程度上」和「一點也不」的推理。這樣，從「所有對當方陣」我們可以發掘和解釋一些推理關係，例如：

(S9) John 並非完全可靠 $\Leftrightarrow$ John 在某程度上不可靠

綜合運用集合論語言和隸屬度函數 $\mu[S](x)$ ，我們還可以解釋某些涉及比較結構的推理。涉及比較的推理可分為兩種：第一種是「最高級」與「比較級」之間的推理關係，本文稱為「比較結構」(comparative construction)；第二種是數量多少的比較。本段討論的是第一種推理，第二種推理留待下文再述。筆者認為，我們可以把「最高級」和「比較級」分別與「全稱量詞」和「存在量詞」聯繫起來。舉例說，我們可以把「John 在全班同學中最高」和「John 比班中至少一個同學高」分別表達為 $C - \{j\} \subseteq \{x: \mu[\text{TALL-PERSON}](j) > \mu[\text{TALL-PERSON}](x)\}$ 和 $C - \{j\} \cap \{x: \mu[\text{TALL-PERSON}](j) > \mu[\text{TALL-PERSON}](x)\} \neq \emptyset$ 。這裡假設論域是某校全體學生。在上式中 C 代表 John 那一班全體學生組成的集合，這裡我們使用 $C - \{j\}$ 是因為日常語言中的比較結構一般不包含自己跟自己比較的情況。此外，我們還假設論域中沒有兩個人的高度相同。這樣，我們便可以得到「A 不比 B 高」等同於「A 比 B 矮」。應用「所有對當方陣」，我們又可以得到一些涉及比較結構的推理，例如：

(S10) John 不是全班中最高的學生 $\Leftrightarrow$ John 比班中至少一個同學矮

4.6 不可數名詞與部分-整體關係

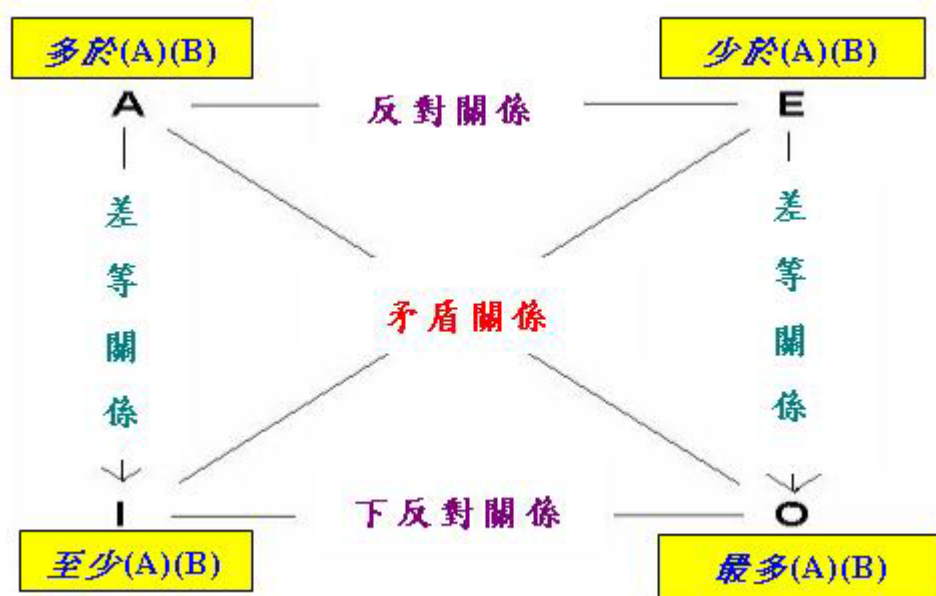
以上對「模糊程度」的處理還可推廣至「不可數名詞」(mass noun)和「部分-整體關係」(part-whole relation)。「不可數名詞」雖然不能像「可數名詞」(count noun)那樣一個個的計數，但我們卻可以計量它們的比率。另外，對於某些表示個體或集體的單數名詞，有時我們會把它們看成由多個部分組成的整體。在這種情況下，部分與整體的關係也可以表達為比率。我們可以使用前面的隸屬度函數： $\mu[\text{TOTALITY}_x](Y)$ 來表達 Y 所佔 X 的比率(這裡 Y 必項是 X 的一部分)。這

樣「John 喝了全部水」和「John 全身濕透」便可分別表達為 $\mu[\text{TOTALITY}_{\text{WATER}}](\{y \subseteq \text{WATER: DRINK}(j, y)\}) = 1$ 和 $\mu[\text{TOTALITY}_{\text{JOHN'S BODY}}](\{y \subseteq \text{JOHN'S BODY: WET}(y)\}) = 1$ ²²。透過以上類比，我們得知「不可數名詞」和「部分-整體關係」也應具有類似前面「模糊程度」的推理模式，例如：

- (S11) John 並非喝了全部水 $\Leftrightarrow$ 有水 John 沒有喝
 John 並非全身濕透 $\Leftrightarrow$ John 身體上至少有某部分沒有濕

4.7 數量比較算子

以上各節討論的內容基本上只涉及謂詞邏輯的三個量詞「所有」、「有」、「沒有」以及「所有」的逆向對等形式「只有」。可是 GQT 研究的 GQ 已大大超出上述範圍，涵蓋上文未有討論的眾多 GQ，其中包括很多涉及數量比較的 GQ(如「多數」、「很多」等)，傳統邏輯的對當方陣並不包括這些 GQ。可是根據筆者的觀察，這類 GQ 之間其實也存在對當關係，也可概括為對當方陣。我們先從以下對當方陣開始(姑名之為「多於對當方陣」)：



以上對當方陣的四個語句是一個抽象模式，可表達自然語言的多種句式。這裡的 A、B 是兩個數量，在不同場合，它們代表不同的意義。舉例說，當 A 和 B 分別是整數 5 和 3 時，「多於(A)(B)」便代表數學不等式「 $5 > 3$ 」。當 A 是「穿校服的學生人數」，B 是數字 3 時，「多於(A)(B)」便代表「超過三名學生穿校服」。當 A 是「正在玩耍的兒童人數」，B 是數字 1 時，「多於(A)(B)」便代表「有些兒

²² 這裡的兩個 $\{\dots\}$ 所定義的不是「集合」，而是「整體」(ensemble)。本文不擬闡釋有關「整體」的理論，只想指出根據 McCawley (1993)，「集合論」只適用於表達「可數名詞」，如要表達「不可數名詞」或「部分-整體關係」，則需使用「整體論」(ensemble theory)。

童在玩耍」。當 A 是「穿校服的學生人數」，B 是「不穿校服的學生人數」時，「多於(A)(B)」便代表「多數學生穿校服」。當 A 是「John 的高度」，B 是「1.8 米」時，「多於(A)(B)」便代表「John 的高度高於 1.8 米」。當 A 是 μ [TOTALITY_{WATER}]{ $y \subseteq \text{WATER}: \text{DRINK}(j, y)\}$ ，B 是分數 1/3 時，「多於(A)(B)」便代表「John 喝了超過三分一水」。當 A 是 μ [RELIABLE-PERSON](j)(代表「John 的可靠程度」)，B 是 μ [RELIABLE-PERSON](m)(代表「Mary 的可靠程度」)時，「多於(A)(B)」便代表「John 較 Mary 可靠」。由此可見，「多於」、「少於」等算子在不同場合中可體現為多種不同的詞語，充分顯示自然語言的多樣性。例如「多於」可表達為「超過」、「大於」，「至少」可表達為「不少於」、「多於或等於」等。

以上對當方陣的正確性是容易證明的，只需基本的命題邏輯和數學知識便行了。上段說過，「至少」等同於「多於或等於」。根據命題邏輯的「析取引入律」($P \Rightarrow P \vee Q$)，容易看到「多於(A)(B)」 $\Rightarrow$ 「至少(A)(B)」。我們也容易看到「至少(A)(B)」 $\sim \Rightarrow$ 「多於(A)(B)」。同理亦容易證明「少於(A)(B)」 $\Rightarrow$ 「最多(A)(B)」和「最多(A)(B)」 $\sim \Rightarrow$ 「少於(A)(B)」。「多於對當方陣」中的兩個差等關係得證。從數學中，我們知道若 $A \sim \Rightarrow B$ ，則 $A \leq B$ 。相反，若 $A \sim \leq B$ ，則 $A > B$ 。「多於(A)(B)」與「最多(A)(B)」的矛盾關係得證。同理亦容易證明「少於(A)(B)」與「至少(A)(B)」的矛盾關係。此外，我們知道 A 不可能同時多於 B 又少於 B，但卻可以既不多於 B 又不少於 B，即當 $A = B$ 的時候。「多於(A)(B)」與「少於(A)(B)」的反對關係得證。同理亦容易證明「至少(A)(B)」與「最多(A)(B)」的下反對關係。

確立了「多於對當方陣」的正確性後，我們便可以用它來發掘和解釋多種涉及數量比較的推理。例如從「少於(A)(B)」與「至少(A)(B)」的矛盾關係，可以得到以下推理：

- (S12) 並非少於三名學生穿校服 $\Leftrightarrow$ 至少三名學生穿校服
 穿校服的學生不佔少數 $\Leftrightarrow$ 至少一半學生穿校服
 John 的高度不少於 1.8 米 $\Leftrightarrow$ John 至少有 1.8 米高
 John 的可靠程度並不低於 Mary $\Leftrightarrow$ John 的可靠程度至少有 Mary 那樣高

4.8 「對當方陣一般模式」的推導

4.8.1 第一形式

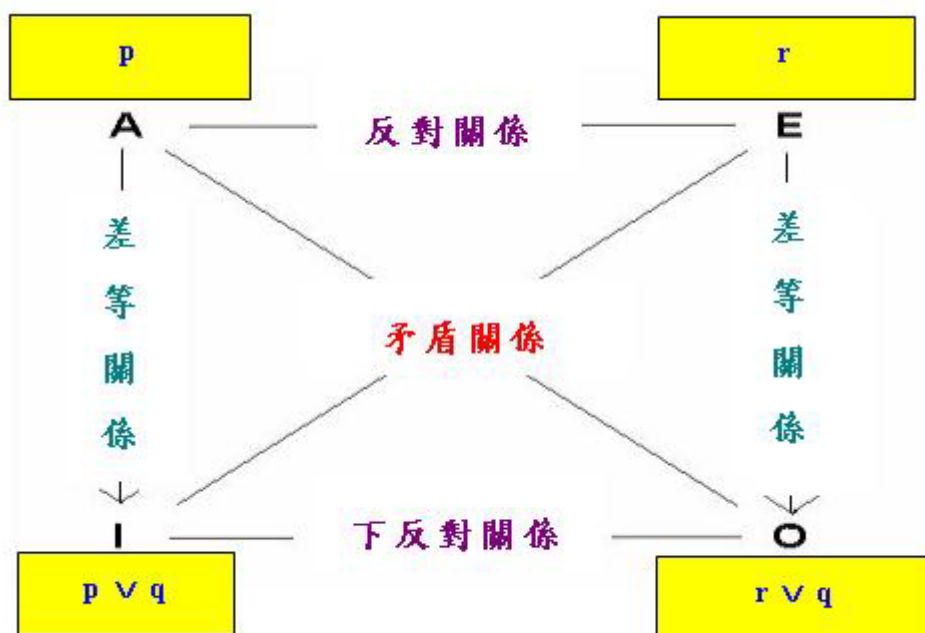
在以上的討論中，筆者把自然語言中的多種推理歸結為兩種不同的對當方陣的特例：「所有對當方陣」和「多於對當方陣」。現在的問題是，能否找到這兩種形式上不相同的對當方陣的共同點，從而把以上討論的推理全部統一為一種形式？答案是肯定的。其實，只要細心觀察「多於對當方陣」中「多於(A)(B)」與

「至少(A)(B)」之間的差等關係，便能發現前者之所以蘊涵後者，是因為後者的意思包含前者的意思。前文說過，「至少」等同於「多於或等於」，這就是「多於」蘊涵「至少」的根本原因。那麼，在「所有對當方陣」的「所有(A)(B)」與「有(A)(B)」之間是否也存在這種關係？表面上看似沒有，但只要細心想，「有 A 是 B」的意思其實就是「所有 A 是 B 或者部分 A 是 B」。由此我們可以把「有」拆解為「所有或部分」²³。如果考察「所有對當方陣」的數字表達形式，可以得到相同的結論。前文說過，「所有(A)(B)」和「有(A)(B)」可分別表達為 $X = 1$ 和 $X > 0$ ，而後者可拆解為 $(X = 1) \vee (0 < X < 1)$ ，這就清楚顯示了「所有」蘊涵「有」的根本原因。

以上我們分析了對當方陣中左邊兩個語句之間的關係。接著讓我們再看看右邊兩個語句之間的關係。位於「多於對當方陣」右邊的語句分別是「少於(A)(B)」和「最多(A)(B)」。同樣，「最多」也可以拆解為「少於或等於」，這正是「少於」蘊涵「最多」的根本原因。接著，讓我們看看方陣中左右兩組語句之間有沒有關係。從數學上，我們知道任何兩個實數 x 、 y 之間有且只有下列三種關係之一成立： $x > y$ 、 $x = y$ 和 $x < y$ ，是為「實數三分律」(trichotomy law for real numbers)。若用 p 、 q 、 r 代表這三種關係，那麼「多於對當方陣」上的四個語句 A、E、I、O 便可以分別表述為 p 、 r 、 $p \vee q$ 、 $r \vee q$ 。現在讓我們再看看「所有對當方陣」。同樣，就集合 A 而言，它的成員屬於集合 B 的情況有且只有下列三種可能性之一：「所有 A 都是 B」、「部分(而非全部)A 是 B」和「沒有 A 是 B」。這裡同樣存在一個「三分關係」。若以 p 、 q 、 r 代表這三種可能性，同樣可以把「所有對當方陣」上的 A、E、I、O 分別表述為 p 、 r 、 $p \vee q$ 、 $r \vee q$ 。

至此我們可以把以上的討論總結為「對當方陣一般模式(第一形式)」：如果存在一個「三分關係」(trichotomy) p 、 q 、 r ，其中 p 、 q 、 r 是命題，它們合起來窮盡一切可能性(collectively exhaustive)並滿足互斥性(mutually exclusive)(可符號化為 $p \vee q \vee r$ 並且 $\sim(p \wedge q) \wedge \sim(q \wedge r) \wedge \sim(r \wedge p)$)，那麼我們可以把它們構成以下對當方陣：

²³ 這樣看來，除了「全稱量詞」、「存在量詞」和「否定量詞」外，應該還有一個「部分量詞」(partial quantifier)，用來表達英語 some but not all 的意思。不過在自然語言中，似乎沒有很多專用的「部分量詞」，筆者所能找到的只有用於個體論域的「部分」、用於表達程度的「有點」和用於比較結構的「相對」。筆者認為，這可能是由於在日常語言使用中，「存在量詞」經常起著「部分量詞」的作用，這種情況就是前文提過的「梯級隱涵」。

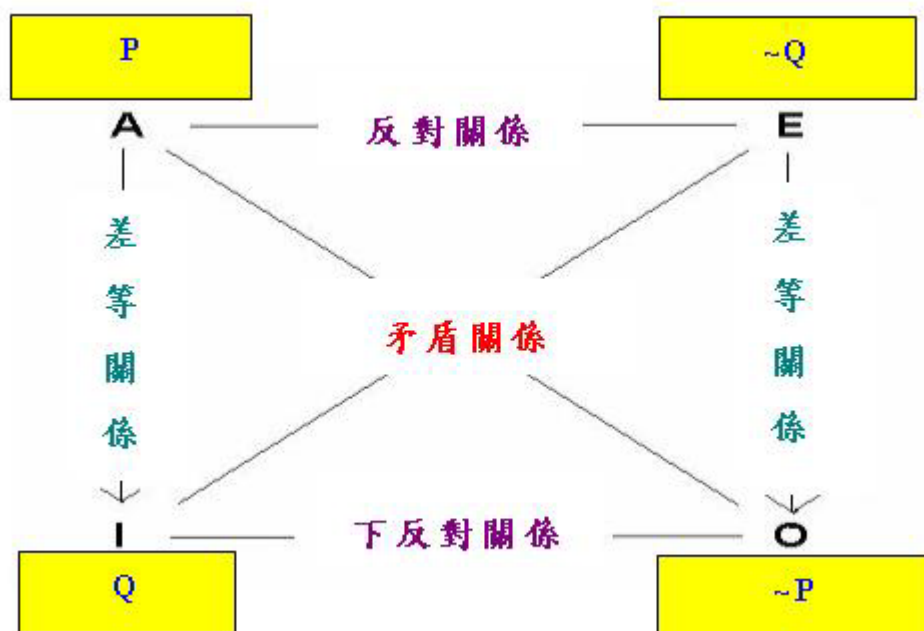


只需簡單的命題邏輯知識，便可證明以上對當方陣的正確性。兩個差等關係在前面已討論了很多，這裡不再贅述。假設 $\sim p$ ，由於 $p \vee q \vee r$ ，根據「析取消去律」($(P \vee Q) \wedge \sim P \Rightarrow Q$)和「析取交換律」($P \vee Q \Rightarrow Q \vee P$)，便得到 $r \vee q$ 。反之亦然， p 與 $r \vee q$ 的矛盾關係得證。同理易證 r 與 $p \vee q$ 的矛盾關係。根據 p 、 q 、 r 的互斥性，我們知道 p 和 r 不可同真，但可同假(當 q 真時)， p 與 r 的反對關係得證。類似地，由於 $p \vee q$ 和 $r \vee q$ 不可同假(因兩者的否定分別蘊涵 r 和 p ，而 r 和 p 不可同真)，但可同真(當 q 真時)， $p \vee q$ 與 $r \vee q$ 的下反對關係得證²⁴。

4.8.2 第二形式

在上述「對當方陣一般模式」中，如果我們設定 $p = P$ 和 $p \vee q = Q$ ，那麼根據 p 、 q 、 r 之間的關係，我們有 $r = \sim Q$ 和 $r \vee q = \sim P$ 。這樣我們便得到「對當方陣一般模式(第二形式)」：

²⁴ 從傳統對當方陣的兩個矛盾關係「所有(A)(B) $\Leftrightarrow$ $\sim$ 有(A)($\sim B$)和「有(A)(B) $\Leftrightarrow$ $\sim$ 所有(A)($\sim B$)」本可抽象出以下等同關係：「所有」=「 $\sim$ 有 $\sim$ 」以及「有」=「 $\sim$ 所有 $\sim$ 」。但由於在「對當方陣一般模式」中， p 、 q 、 r 是一般的命題，並不一定表現為 $Q(A)(B)$ 的形式，所以上述兩個「抽象等同關係」不能推廣到一般的對當方陣。不過，筆者認為以上的「抽象等同關係」並非對當方陣的本質屬性，它只是全體對當方陣的某個子集的屬性。



「對當方陣一般模式」兩種形式的差異在於，第一形式乃基於「三分關係」，而第二形式則是基於「單向蘊涵關係」： $P \Rightarrow Q$ 而 $Q \not\Rightarrow P$ 。不過這兩種形式其實是可以相互轉化的。前段已證明了從第一形式可推導出第二形式，以下證明從第二形式也可推導出第一形式。

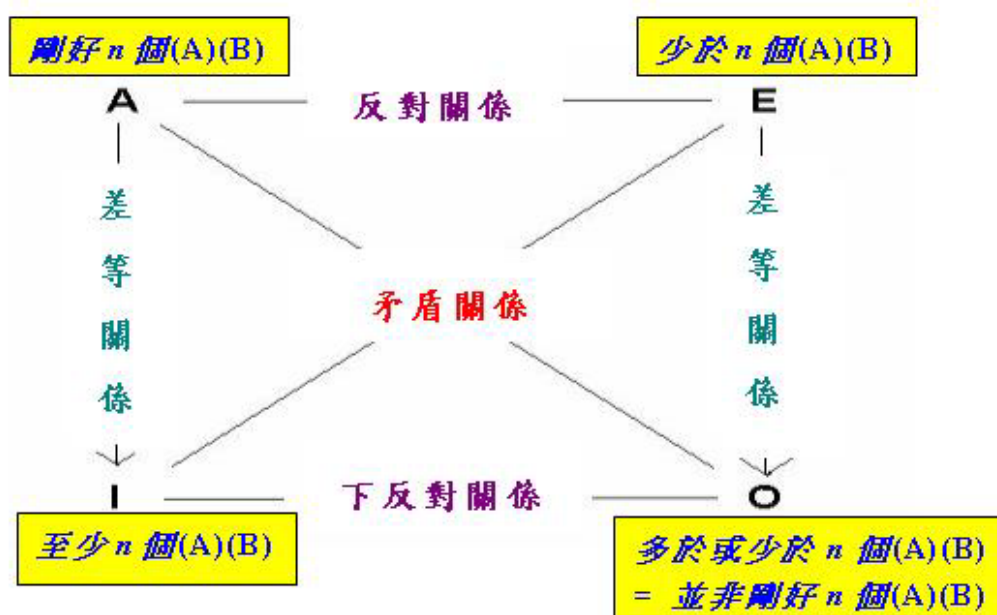
設有一個「單向蘊涵關係」： $P \Rightarrow Q$ 而 $Q \not\Rightarrow P$ ，那麼必有以下「三分關係」： $Q \wedge P$ 、 $Q \wedge \sim P$ 和 $\sim Q$ 。容易證明(例如用「真值表法」)上述三個命題滿足「三分關係」的定義，因此如果設定 $Q \wedge P = p$ 、 $Q \wedge \sim P = q$ 和 $\sim Q = r$ ，我們便可得到「對當方陣一般模式(第一形式)」。由此可見，只要存在一個「三分關係」或「單向蘊涵關係」，我們便能構造相應的「對當方陣一般模式」的第一或第二形式，而且這兩種形式是可以相互轉化的。

4.9 「對當方陣一般模式」的應用

4.9.1 「剛好 n 個對當方陣」

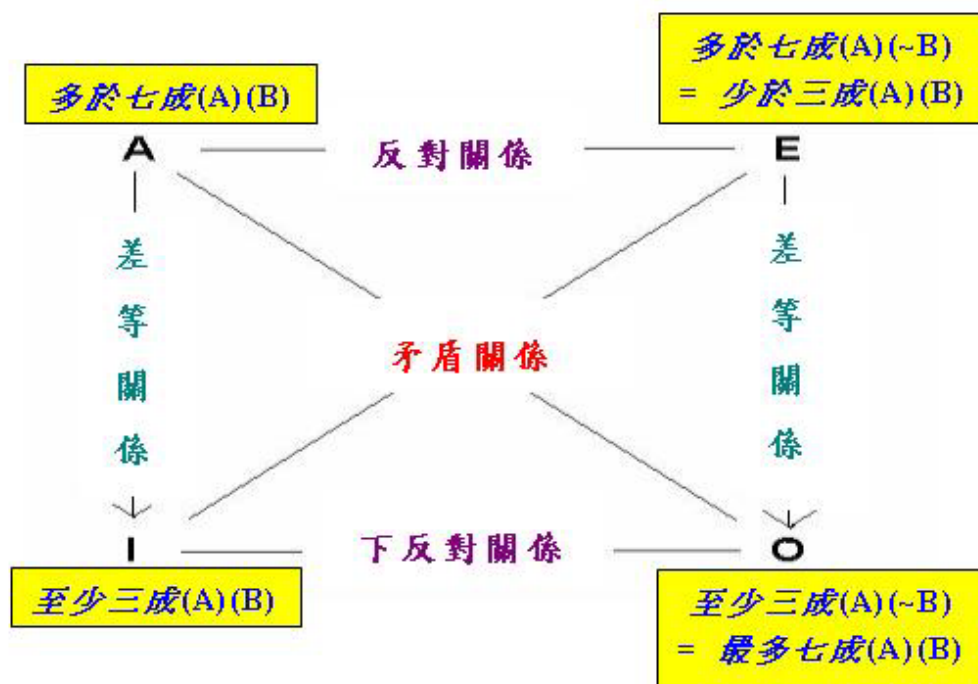
至此我們不但找到了本文討論過的各種推理的統一解釋，而且還可利用「對當方陣一般模式」發掘並解釋其他推理模式，以下將主要利用「對當方陣一般模式(第一形式)」的特性。在上述推導中， p 、 q 、 r 無需依循任何既定的排列順序。這一點非常重要，因為這樣我們便能按需要調整對當方陣中各語句的位置，從而發現一些以前沒有提出的推理。舉例說，上文指出「多於對當方陣」的基礎其實是以下的「實數三分律」： $x > y$ ； $x = y$ 和 $x < y$ ，它們分別對應於 p 、 q 和 r 。在構成「多於對當方陣」時， q 被「融入」了 $p \vee q$ 和 $r \vee q$ 中，因此「多於對當方陣」沒有「等於(A)(B)」這樣的語句。假設現在我們想研究 GQ「剛好 n 個」(相

當於英語的 exactly n)的推理關係。我們只需把前面的 p 、 q 和 r 重新調整位置，並把上面的 x 和 y 分別設定為 $|A \cap B|$ 和數字 n ，便可得到以下的「剛好 n 個對當方陣」：



4.9.2 「多於 n 成、多於 m 個對當方陣」

由此可見，發掘新的對當方陣的關鍵在於尋找合適的「三分關係」。由於現實世界很多事物往往具備多於三種可能性，我們便可按需要把某些可能性歸併。反之，我們亦可把某些本來渾然一體的事物人為地切分為三份，這樣就為發掘新的對當方陣提供廣闊的可能性。舉例說，百分數(相當於區間 $[0, 1]$)所能取的值本是無限的，但我們可以人為地把這個區間切分為下列三份： $(0.7, 1)$ 、 $[0.3, 0.7]$ 和 $[0, 0.3]$ ，表達為自然語言就是「多於七成」、「三至七成之間」和「少於三成」。容易證明「少於三成」等同於「多於七成...不」。如果我們把這三個區間分別定為 p 、 q 和 r ，那麼 $p \vee q$ 就是 $[0.3, 1]$ ，即「至少三成」； $r \vee q$ 則是 $[0, 0.7]$ ，即「最多七成」，亦即「至少三成...不」。這樣我們便得到如下的「多於七成對當方陣」：



雖然我們可以用簡單的數學知識證明「多於七成對當方陣」的正確性，但我們無需這樣做，因為以上的對當方陣只是「對當方陣一般模式」的特例。以上的「多於七成對當方陣」還可以進一步推廣為「多於 n 成對當方陣」或「多於 m 個對當方陣」（假設主語集合 A 的基數是語境中的已知信息或話語中的給定信息），其中 $n \geq 5$ ，而 $m \geq |A|/2$ （若 $|A|$ 是偶數）或 $m \geq (|A|+1)/2$ （若 $|A|$ 是奇數）。只需把上面的「多於七成」改為「多於 n 成」或「多於 m 個」，「至少三成」改為「至少 $(10-n)$ 成」或「至少 $(|A|-m)$ 個」便行了。這樣，套用以上的方陣，我們便可以作出更多推理。例如，假設 $|A| = 30$ 。根據以上方陣，我們得到

(S13) 並非在那 30 個學生中有超過 16 個穿校服 $\Leftrightarrow$
 在那 30 個學生中至少有 14 個不穿校服²⁵

4.9.3 模糊算子

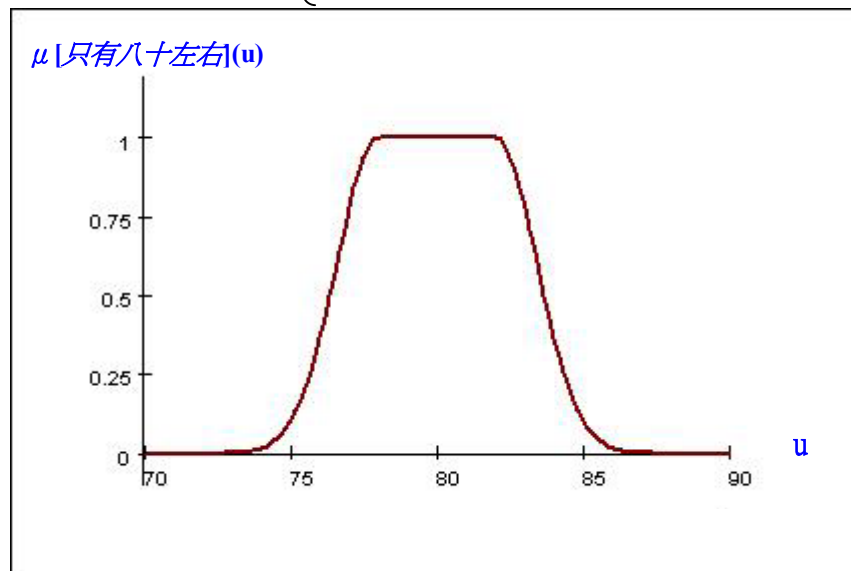
日常語言涉及很多模糊概念，其中有一些是量詞，如「很多」、「大約 n 個」等²⁶。根據模糊數學，模糊概念可用「隸屬度函數」刻劃。舉例說，張喬(1998)

²⁵ 這兩句在漢語中顯得頗為累贅，而且「在那 30 個...中有超過 16 個」被分割成兩部分，似乎不是單純的限定詞，但其英語對等形式“more than 16 of the 30”卻是連續的整體，在句法學上稱為「部分格結構」(partitive construction)。

²⁶ 張喬(1998)把「多於 n 個」也歸入「模糊量詞」的範疇。但筆者認為這樣做是不正確的，因為從概念邊界的確定性看，「多於 n 個」的邊界是完全明確的：給定一個數字，我們能夠明確指出它是否多於 n ，完全沒有模糊性。張喬應把「多於 n 個」改為「略多於 n 個」(相當於英語的 slightly more than n)或「遠多於 n 個」(相當於英語的 much more than n)才對。另外，包含數字的量詞常常有歧義，例如「近 n 個」既可解釋為「至少近 n 個」，亦可解釋為「只有近 n 個」。本文一般把含有「至少」的義項視為「無標記」義項，但為了清晰起見，有時會加上「(至少)」。

便使用分段定義函數(piecewise-defined function)作為「只有八十左右」的「隸屬
度函數」。以下列出該函數及其圖像：

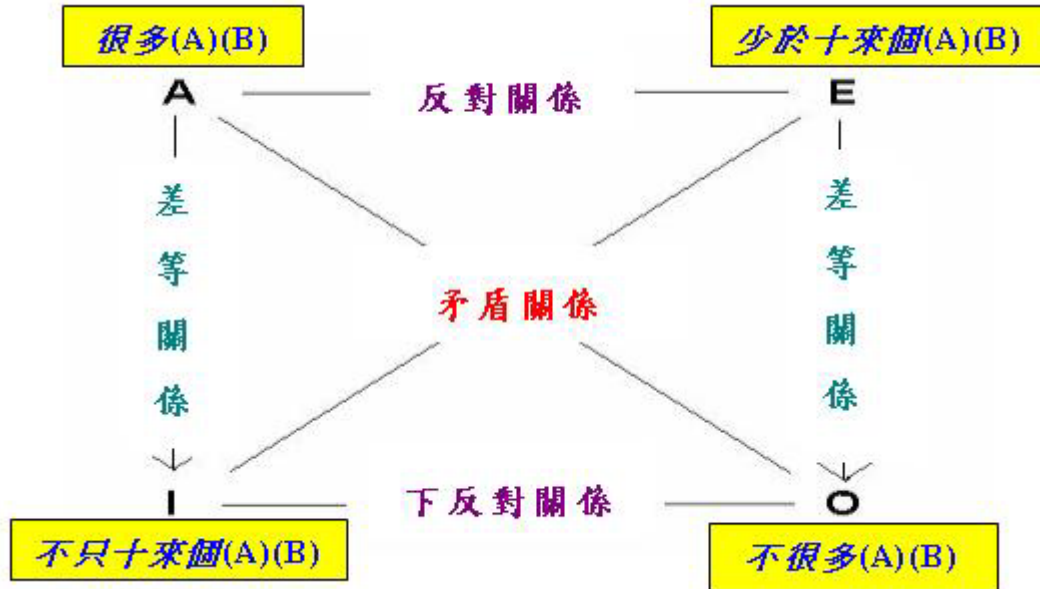
$$(F4) \quad \mu_{\text{只有八十左右}}(u) = \begin{cases} \exp(-((u - 78)/2)^2), & \text{if } u < 78 \\ 1, & \text{if } 78 \leq u \leq 82 \\ \exp(-((u - 82)/2)^2), & \text{if } u > 82 \end{cases}$$



這裡 $\exp$ 是「指數函數」(exponential function)。當 $u = 77$ 時，這個函數的值為 0.78，即數字 77 符合「只有八十左右」的程度為 0.78。

本文提出的「對當方陣一般模式」也能用來處理「模糊算子」。前面說過，「對當方陣一般模式」的關鍵在於把渾然一體的事物切分為三部分。這裡最重要的一點是事物的「可切分性」，至於切分點在哪裡、切分點是否固定不變、是否對稱等等，這些都是無關重要的。只要我們能找到一個模糊算子的三分關係，便能構造相應的對當方陣。現在就以模糊算子「很多」和「十來個」²⁷為例說明這一點。儘管不同人在不同語境下對「很多」和「十來個」的理解各有不同，但一個確定的事實是，當論域很大時，「很多」所指稱的數量應大於「十來個」所指稱的數量，而且我們可以把區間 $[0, |E|]$ 切分為三部分，分別代表「很多」、「不很多但又不只十來個」和「少於十來個」這三個概念，而且這三個概念符合「三分關係」的條件，因而可以應用「對當方陣一般模式」，得到以下這個「不對稱模糊數量對當方陣」：

²⁷ 這裡故意採用不對稱的概念只是為了說明「對當方陣一般模式」的高度適用性。當然在日常語言推理中，一般都傾向於採用對稱的概念，例如採用「很少」與「很多」相對。



如果我們採取其他的切分方法，或者把上段的區間 $[0, |E|]$ 改為 $[0, 1]$ ，便可得到相應於「頗多」、「極多」、「多數」、「絕大多數」、「幾乎全部」等算子的對當方陣。特別地，當兩個切分點同時接近某一實數 n 時，我們便可得到相應於「大約 n 個(成)」、「接近 n 個(成)」等的對當方陣。由此可見，很多模糊算子都可納入本文的理論框架內。

其實，我們還可以把眼光再放遠一點。前文提過，我們可以把「所有對當方陣」化為數字形式，這樣便可以把模糊算子的概念引入「所有對當方陣」的一切應用中，從而得到一系列「模糊量化結構」及相應的推理關係。例如，把模糊算子引入「可能世界論域」中，便得到「極可能」、「很可能」²⁸、「十分應該」等「模糊模態算子」；把模糊算子引入「時間論域」中，便得到「幾乎次次」、「常常」、「昨天大部分時間」、「幾乎一直」等「模糊時態算子」；把模糊算子與程度詞結合，便得到「極之」、「非常」、「頗為」等「模糊程度詞」。

有些人可能不贊同上述推導結果，因為他們認為模糊概念存在某些「灰色地帶」，不能作一刀切式的切分。他們甚至認為傳統邏輯的「排中律」和「不矛盾律」不適用於模糊概念。按照他們的看法，以上對當方陣中的很多關係都是無效的。

²⁸ 表達必然性的詞項在某些語言中體現為兩個序列，例如在英語中便體現為「形容詞」序列(necessary, very likely, possible, very unlikely, impossible 等)和「情態助動詞」序列(must, will, can, may 等)。筆者認為這兩者是平行的序列，不過後者除了表達必然性外，還能表達其他情態意義，因此本文只集中討論前者。另外，對於刻劃必然性，除了本文介紹的「可能世界」模型外，還有一個「概率」模型，即把英語的「情態助動詞」看成表達某種概率(參見蔣巖(2004))。筆者認為，上述兩個模型是相通的，因為概率的經典定義乃建基於「基本事件」—某一事態可能出現的結果，而每一個可能出現的結果正可用一個「可能世界」來代表。

對於以上的詰難，筆者有以下看法。首先，筆者認為以上這種觀點並非模糊數學的唯一選擇。事實上，根據楊綸標、高英儀(2001)，模糊邏輯可以有多種模型。在某些模型下，傳統邏輯的「排中律」和「不矛盾律」仍然成立。張海澎(2004)也指出，多值邏輯對「排中律」的否定只是基於對符號命題 $p \vee \sim p$ 的新的真值表定義，而傳統邏輯的「排中律」並不同於 $p \vee \sim p$ ，而是具有更高概括性的邏輯定律，因此多值邏輯所攻擊的不是真正的「排中律」。

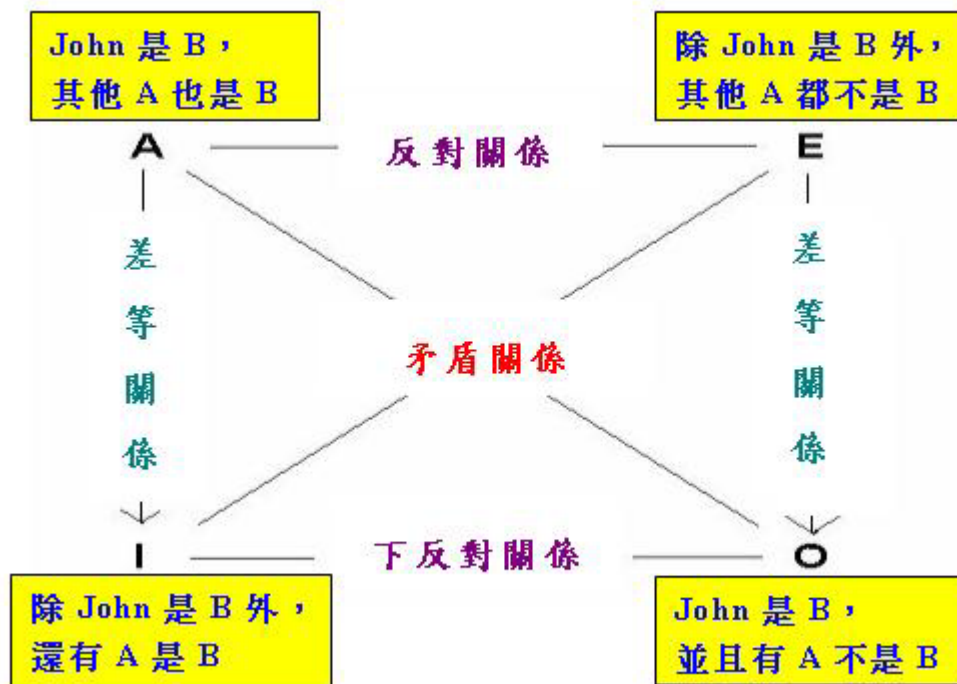
其次，一般人所攻擊的「排中律」只是「非多即少」這種沒有考慮「灰色地帶」問題的簡單二分法思維方式。可是本文提出的「三分關係」已考慮了「灰色地帶」問題，例如前文曾提出三個概念：「很多」、「不很多但又不只十來個」和「少於十來個」，其中的「不很多但又不只十來個」便是介於「很多」與「少於十來個」之間的「灰色地帶」。而以上的「不對稱模糊數量對當方陣」顯示「很多」的否定是「不很多」，而這實際只是一種「重言式」(tautology)。由此可見，本文的處理方法既照顧了日常語言的模糊性，亦體現了邏輯思維的無矛盾性。難以想像，如果連「非很多即不很多」這種重言式也不予承認，我們還能進行甚麼推理？

4.9.4 「除...外」對當方陣

「對當方陣一般模式」的另一個用途是，幫助我們判斷哪些對當方陣能成立，哪些不能成立。舉例說，在自然語言中，我們發現存在以下推理關係：

- (S14) 並非除了 John 外，還有學生穿 T 恤 $\Leftrightarrow$
 除了 John 外，其他學生都不穿 T 恤

上述推理的有趣之處在於，若把這兩句譯成英語，那麼前句的「除...外」應譯成 *besides*，而後句卻應譯成 *except*。由此我們想，是否能構造一個關於 *besides* 和 *except* 的對當方陣？但若細心一想，我們會發現情況很複雜。*besides* 和 *except* 與其後賓語的關係剛好相反：當我們說“*Besides j, p*”時，個體 *j* 具有命題 *p* 所述的性質；而當我們說“*Except j, p*”時，*j* 沒有 *p* 所述的性質。這樣，從 *j* 是否具有某性質以及 *j* 以外的其他人是否具有該性質，我們將得到一個「四分關係」而非「三分關係」，所得對當方陣將頗為複雜。為此，我們必須把情況簡化，以 *j* 具有某性質作為附加命題加入「所有對當方陣」中(這裡還須假設 *j* 屬於主語集合 *A*)，這樣我們便得到以下的「除...外」對當方陣：

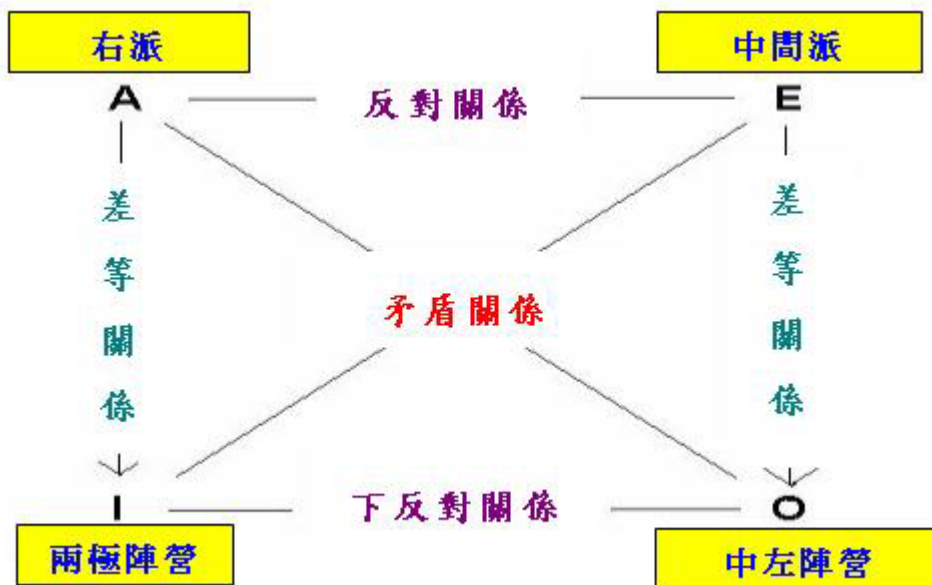


這樣，(S14)的推理關係便能在這個對當方陣中得到解釋。當然，我們還可以 j 不具有某性質作為附加命題加到「所有對當方陣」中，從而得到另一個「除...外」對當方陣。在這個對當方陣中，我們將找到類似以下的推理：

(S15) 並非除了 John 外，其他學生都穿 T 恤 $\Leftrightarrow$
 除了 John 外，還有學生不穿 T 恤

4.9.5 「對當方陣一般模式」的其他應用

「對當方陣一般模式」的應用還可越出 GQ 的範圍，用來解釋某些動詞、形容詞、副詞乃至名詞的推理。現在舉一個涉及政治術語的例子。假設我們可以按政治取向把某地的政治人物分為「右」、「左」和「中間」三派，而且符合「三分關係」的要求。如果我們把這三派分別定為 p、q 和 r，並把 $p \vee q$ 稱為「兩極陣營」， $r \vee q$ 則稱為「中左陣營」(這裡「陣營」一詞只是類別標籤，不代表政治聯盟)。這樣我們便可以構造以下的「政治取向對當方陣」：

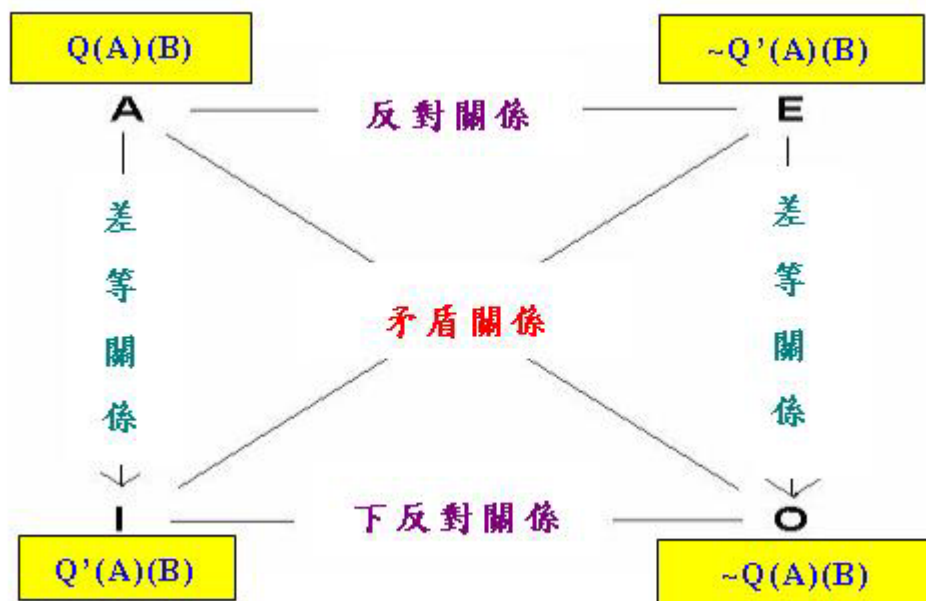


從這個對當方陣，我們可以得到以下推理：如果某人不屬於「中間派」，那麼他屬於「兩極陣營」；某人既可屬於「兩極陣營」又屬於「中左陣營」（他是「左派」），但不可能兩者都不屬於，等等。由此可見，「對當方陣一般模式」不僅可應用於三分結構中的算子，亦可應用於主語和謂語，它有著極其廣闊的應用空間。

4.10 對當方陣與單調性的關係

4.10.1 差等關係的單調性

前文提過，給定「單向蘊涵關係」： $Q(A)(B) \Rightarrow Q'(A)(B) \wedge Q'(A)(B) \leadsto Q(A)(B)$ ，便可構造以下對當方陣：



現在讓我們從另一個角度看上圖的差等關係。根據集合論，兩類事物之間的關係可理解為由有序對(ordered pair)組成的集合。由於 $\langle 1,1 \rangle$ 類 GQ 代表兩個集合之間的關係，它們可以被看成有序對的集合，例如「所有」便可以定義為

$$(F5) \quad \text{所有} = \{(X, Y): X \subseteq Y\}$$

這樣，語句「 $Q(A)(B)$ 」便可以重新表達為 $(A, B) \in Q$ 。而根據定理 4， $Q(A)(B) \Rightarrow Q'(A)(B) \wedge Q'(A)(B) \sim \Rightarrow Q(A)(B)$ 便可以改寫成 $Q \subseteq Q' \wedge Q' \sim \subseteq Q$ ，即 Q' 是 Q 的真母集。因此差等關係可以表述為：對所有 A, B 而言， $Q(A)(B) \Rightarrow Q'(A)(B)$ ，其中 Q' 是 Q 的真母集。這樣，差等關係的定義便跟 3.3 節的「遞增性」定義具有完全相同的形式。由此可見，利用「三分結構」的概念，我們可以把傳統邏輯研究的「差等關係」與 GQT 研究的「單調性」統一起來。

4.10.2 差等關係與否定詞的結合

對當方陣中的其他關係都是由差等關係與否定詞結合以後派生出來的。結合的方式不同，便得到不同的關係，其對「單調性」的影響亦各有不同。兩個矛盾關係反映了如下事實：若把 Q 和 Q' 同時否定，便顛倒了原來的單調推理方向，即從 $Q(A)(B) \Rightarrow Q'(A)(B)$ 變成 $\sim Q'(A)(B) \Rightarrow \sim Q(A)(B)$ 。反對關係和下反對關係則反映了如下事實：若只把 Q 和 Q' 其中一個否定，原來的單調推理關係便不復存在，即在 $Q(A)(B)$ 與 $\sim Q'(A)(B)$ 以及 $Q'(A)(B)$ 與 $\sim Q(A)(B)$ 之間，不能從其中一個真推出另一個真，但可從前者其中一個真推出另一個假，並從後者其中一個假推出另一個真。本段內容在以下有關「左、右單調性」的討論中還會提到。

5. 傳統邏輯其他課題的數學解釋

5.1 結構變換的數學解釋

傳統邏輯除了研究對當關係外，還研究「結構變換」和「三段論」推理。利用集合論語言和三分結構，容易把上述兩種推理形式化並加以推廣。傳統邏輯有三種「結構變換」：「換質法」(obversion)、「換位法」(conversion)和「換質位法」(contraposition)。由於「換質位法」只是前兩種變換的結合，這裡只著重討論前兩種變換。用三分結構來表達，「換質法」就是把 $Q(A)(B)$ 變成 $Q(A)(\sim(\sim B))$ 。由於這種變換的實質是應用邏輯上的「雙重否定律」，這種變換適用於 Q 為任何算子的情況，並且換質前後的語句在邏輯上等價。具體例子如：

(S16) 少於一成納稅人是自僱人士 $\Leftrightarrow$ 少於一成納稅人不是非自僱人士

至於「換位法」，則是把 $Q(A)(B)$ 變成 $Q(B)(A)$ (如果集合 A 或 B 被包含在雙層括號內，則只對內層括號進行換位)。在傳統邏輯中，只有當 Q 是「有」和「沒有」時，換位前後的語句才會互相等值，集合論可幫助我們解釋箇中原因。由於「有」和「沒有」的集合論定義都包含 $\cap$ ，而 $\cap$ 運算是對稱的，因此把集合 A 和 B 對調並不影響語句的真值。明白了這個原理，我們便可以把傳統邏輯的「換位法」推理加以推廣：只要 Q 具有對稱性，有關語句在換位前後等值。根據 GQT，很多 GQ 的集合論定義都含有 $\cap$ ，因而是對稱的，例如「多於 n 個」、「剛好 n 個」、「 m 至 n 個」等。由此可知，包含這些 GQ 的語句在換位前後等值。具體例子如：

(S17) 多於十個學生是穿 T 恤的 $\Leftrightarrow$ 多於十個穿 T 恤的是學生

5.2 三段論的數學解釋

傳統邏輯只研究「全稱命題」、「存在命題」和「單稱命題」(即以個體作為主詞的命題)的三段論推理。不過只要細心分析「直言三段論」各有效格式的背後原理，也能把三段論推理推廣至包含其他算子的語句。舉例說，「直言三段論」的第四格有一個名為 Dimaris 的有效式，用「三分結構」寫出來就是：

$$\begin{array}{lcl} \text{(F6)} & \text{大前提：} & \text{有(B)(M)} \\ & \text{小前提：} & \text{所有(M)(A)} \\ \hline & \text{結論：} & \text{有(A)(B)} \end{array}$$

這裡 A 、 B 和 M 分別是「直言三段論」中的「小項」、「大項」和「中項」。現在把這個有效式化為集合論語言並探討其原理。為方便以下討論，本文把這個大前

提表達為 $|B \cap M| > 0$ ，小前提則可表達為 $M \subseteq A$ 。現在只要應用定理 6(2)和 $\cap$ 的交換性，便容易得到 $|A \cap B| > 0$ ，而這正是結論所要表達的意思。由於在上述分析中，數目 0 沒有任何特殊性，它可以為任何實數取代，因此我們可以把上述 Dimaris 式中的「有」改為「多於(至少) n 個」，從而得到以下「數量比較三段論」：

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(F7)} & \text{大前提：} & \text{多於(至少) } n \text{ 個}(B)(M) \\
 & \text{小前提：} & \text{所有}(M)(A) \\
 \hline
 & \text{結論：} & \text{多於(至少) } n \text{ 個}(A)(B)
 \end{array}$$

(F7)的一個實際應用例子如下：

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(S18)} & & \text{多於十位得獎人戴襟花，並且所有戴襟花的都坐在台上} \\
 & \Rightarrow & \text{多於十位坐在台上的是得獎人}
 \end{array}$$

我們還可以把有效的三段論格式推廣應用於其他論域，從而得到「模態三段論」、「時間三段論」等。舉例說，「直言三段論」的第一格有一個名為 Barbara 的有效式：

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(F8)} & \text{大前提：} & \text{所有}(M)(B) \\
 & \text{小前提：} & \text{所有}(A)(M) \\
 \hline
 & \text{結論：} & \text{所有}(A)(B)
 \end{array}$$

我們可以把這個有效式應用於「可能世界論域」，並把 A 解釋成 $\{w: AT(w, a)\}$ (這裡 a 是一個命題)，B 和 M 亦仿此。前文說過， $\{w: AT(w, c)\} \subseteq \{w: AT(w, p)\}$ 相當於日常語言的充分條件句「如果 c ，則 p 」，因此上述 Barbara 式可以重新表述為

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(F9)} & \text{大前提：} & \text{如果 } m, \text{ 則 } b \\
 & \text{小前提：} & \text{如果 } a, \text{ 則 } m \\
 \hline
 & \text{結論：} & \text{如果 } a, \text{ 則 } b
 \end{array}$$

以上三段論其實就是傳統邏輯的「假言三段論」，這樣我們便把「假言三段論」歸結為「直言三段論」的特例。

6. 左、右單調性的數學解釋

6.1 引言

現在讓我們把研究方向轉向當代 GQT 所研究的「左、右單調性」。為研究各種 GQ 的「左、右單調性」，我們要把 $Q(A)(B)$ 中的 A 或 B 換成它們的真母集或真子集 A' 或 B' ，然後看看新語句是否成立。為了建立完整的理論，我們還要把否定詞引入 Q、A 或 B，看看否定對推理的影響，然後嘗試總結出一些推理規律。在本節我們要廣泛採用定理 4 來確立各種母集-子集關係，例如從「某人是右派」與「某人屬兩極陣營」的差等關係，我們可得到 $\{x: x \text{ 是右派}\} \subset \{x: x \text{ 屬兩極陣營}\}$ 。以下為簡化討論，把上式簡記為 $\text{RIGHTIST} \subset \text{POLARIZED}$ ，餘類推。

6.2 存在量詞

6.2.1 存在量詞的左、右單調性

現在筆者運用集合論的定理以及上文的「政治取向對當方陣」來說明存在量詞的左、右單調性。語句「有上議員是右派」可表達為 $\text{UPPER} \cap \text{RIGHTIST} \neq \emptyset$ 。根據 $\text{RIGHTIST} \subset \text{POLARIZED}$ 以及定理 5(1)，可得 $\text{UPPER} \cap \text{POLARIZED} \neq \emptyset$ ，即

(S19) 有上議員是右派 $\Rightarrow$ 有上議員屬兩極陣營

接著我們考慮包含關係 $\text{UPPER} \subset \text{MP}$ ，其中 MP 代表「議員」。根據 $\cap$ 運算的交換性 ($A \cap B = B \cap A$)，我們同樣可以應用定理 5(1)，從 $\text{UPPER} \cap \text{RIGHTIST} \neq \emptyset$ 推得 $\text{MP} \cap \text{RIGHTIST} \neq \emptyset$ ，即

(S20) 有上議員是右派 $\Rightarrow$ 有議員是右派

由此我們確定「存在量詞」是「右遞增」和「左遞增」的。

6.2.2 各種否定對單調性的影響

接著我們看看否定對上述推理的影響。根據三分結構的框架，我們可以在三個層面進行否定。首先對全句(即算子 Q)進行否定(以下稱為「算子否定」)。根據前文的「所有對當方陣」，我們知道「有(A)(B)」的否定就是「所有(A)($\sim B$)」，亦即「沒有(A)(B)」。根據定理 5(2)，容易看到「算子否定」把原來的推理方向顛倒了，即

(S21) 沒有上議員屬兩極陣營 $\Rightarrow$ 沒有上議員是右派
 沒有議員是右派 $\Rightarrow$ 沒有上議員是右派

其次我們對謂語 B 進行否定(以下稱為「右論元否定」)，這相當於形式為「有(A)($\sim$ B)」的句子。根據定理 3， $\sim$ POLARIZED $\subset$ $\sim$ RIGHTIST。由於「右論元否定」只是把謂語的包含關係顛倒了，它把「存在量詞」原來的「右遞增性」變為「右遞減性」，對「左遞增性」卻沒有影響：

(S22) 有上議員不屬兩極陣營 $\Rightarrow$ 有上議員不是右派
 有上議員不是右派 $\Rightarrow$ 有議員不是右派

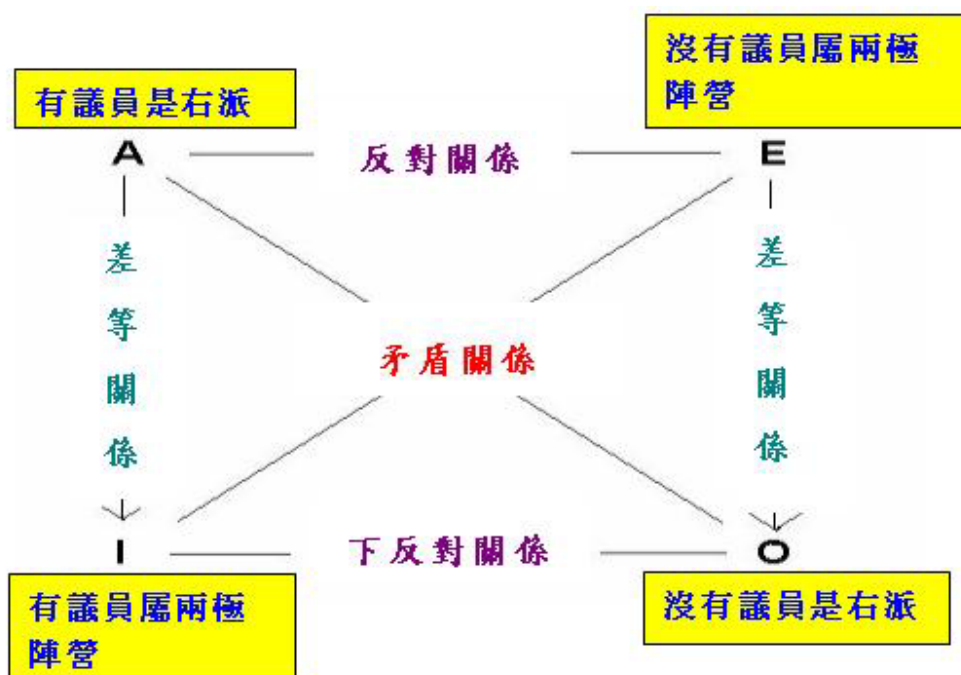
最後我們對主語 A 進行否定(以下稱為「左論元否定」)，這相當於形式為「有($\sim$ A)(B)」(在邏輯上等同於「有(B)($\sim$ A)」)的句子。這種情況跟「右論元否定」剛好相反。根據定理 3， $\sim$ MP $\subset$ $\sim$ UPPER。由於「左論元否定」只是把主語的包含關係顛倒了，它把「存在量詞」原來的「左遞增性」變為「左遞減性」，對「右遞增性」卻沒有影響：

(S23) 有右派不是議員 $\Rightarrow$ 有右派不是上議員
 有右派不是上議員 $\Rightarrow$ 有兩極陣營的人不是上議員

現在讓我們總結一下上文所得的結果：「存在量詞」在沒有否定詞的「干擾」下是左遞增和右遞增的，由此我們可以把「遞增性」視為一種「無標記」(unmarked)的性質。否定會改變這種「遞增性」，其影響範圍視乎否定是在哪一層面進行。「左論元否定」只會改變「存在量詞」的「左遞增性」，對「右遞增性」卻沒有影響；「右論元否定」則只會改變「右遞增性」，對「左遞增性」卻沒有影響。因此我們可以把「左／右論元否定」視為「局部否定」，它們只影響所在「否定域」的「遞增性」。「算子否定」則是一種「全盤否定」，它同時影響「存在量詞」的「左遞增性」和「右遞增性」。

6.2.3 單調推理的對當方陣

前面提及的三種否定有一個共同點，就是如要推理成立，必須同時對原來的兩個肯定句進行同一種類的否定。假如只對其中一句進行否定，所得一對新句子便不再存在任何單調推理關係。例如在語句「有議員屬兩極陣營」與「沒有議員是右派」之間，不能從其中一句真推出另一句真；但這兩句卻滿足「下反對關係」：可以從其中一句假推出另一句真。事實上，由於 S(19)表達了一種「單向蘊涵關係」，根據「對當方陣一般模式(第二形式)」，我們可以構造 S(19)的對當方陣：



這裡再一次顯示，對當方陣與左、右單調性的研究可以互相滲透，其中一方的概念、定義可以應用於另一方。以下介紹的其他 GQ 的左、右單調性都有相應的對當方陣，不再一一列舉。

6.3 全稱量詞

接著我們研究全稱量詞的左、右單調性。先從語句「所有議員都是右派」 $MP \subseteq RIGHTIST$ 開始。根據 $RIGHTIST \subset POLARIZED$ 和 $\subseteq / \subset$ 的傳遞性，容易得到 $MP \subseteq POLARIZED$ ，即

(S24) 所有議員都是右派 $\Rightarrow$ 所有議員都屬兩極陣營

由此可見，「全稱量詞」是右遞增的。其次，從 $UPPER \subset MP$ ，我們亦容易得到 $UPPER \subseteq RIGHTIST$ ，即

(S25) 所有議員都是右派 $\Rightarrow$ 所有上議員都是右派

由此可見，「全稱量詞」是左遞減的。

歷來介紹 GQ 單調性的文獻大多只說明「存在量詞」在左、右單調性方面是對稱的(左遞增和右遞增)，而「全稱量詞」則是不對稱的(左遞減和右遞增)，但卻沒有交代其背後原因。現在經過以上討論，我們終於可以把「存在量詞」的對稱性歸結為 $\cap$ 運算的對稱性，並把「全稱量詞」的不對稱性則歸結為 $\subseteq / \subset$ 關係的

不對稱性。

我們還可以從另一個角度解釋「全稱量詞」的單調性。我們知道「所有(A)(B)」等同於「沒有(A)(~B)」。前面說過，「算子否定」同時影響主、謂語的單調性；而「右論元否定」則只影響謂語的單調性。根據「雙重否定律」，上句的謂語 B 受到兩次否定影響(即「沒有」和~)，結果它仍然是遞增的；而主語 A 則只受到一次否定影響(即「沒有」)，因此變成遞減。由此我們可以把「全稱量詞」看成某種「左論元否定詞」，它的「否定域」只及於主語，這就可解釋為何「全稱量詞」是左遞減、右遞增的。

把「全稱量詞」看成「左論元否定詞」，更容易推斷和解釋否定對「全稱量詞句」的影響了。由於以下將要進行「多重否定」，我們首先把「雙重否定律」推廣為類似正負數乘法那樣的「多重否定律」：偶數次否定相當於取消否定，奇數次否定相當於一次否定。由於「算子否定」同時影響主語和謂語，它作用於「左論元否定詞」的結果是使原來的左遞減、右遞增變成左遞增、右遞減，例如

(S26) 並非所有上議員都屬兩極陣營 $\Rightarrow$ 並非所有議員都是右派²⁹

由於「右論元否定」只影響謂語，它作用於「左論元否定詞」的結果是使左、右論元都呈遞減性，例如

(S27) 所有議員都不屬兩極陣營 $\Rightarrow$ 所有上議員都不是右派

最後，由於「左論元否定」只影響主語，它作用於「左論元否定詞」的結果是使左、右論元都呈遞增性，例如

(S28) 所有不是上議員的都是右派 $\Rightarrow$ 所有不是議員的都屬兩極陣營³⁰

6.4 只有

前面說過，「只有」是「所有」的逆向對等算子。由於集合 A 和 B 在 $\subseteq$ 關係下的角色與在 $\supseteq$ 關係下的角色剛好相反，我們可以推斷，「只有」及其三種否定形式的單調性應該跟「所有」剛好相反。具體地說就是，「只有」是左遞增、右遞減的，例如

²⁹ 這裡用一個(而不是兩個)例句同時顯示「算子否定」對左、右單調性的影響。為節省篇幅，以下的大多數例句都是這樣。這樣亦顯示本文研究的現象具有「疊加性」(superposition)。

³⁰ 這例句似乎難以在現實生活中找到合理的語境。但如果我們把論域限定為英國保守黨的黨員，這例句便好理解了。以下凡有類似的情況，均假定有一個適當的論域，不逐一說明。

(S29) 只有上議員才屬兩極陣營 $\Rightarrow$ 只有議員才是右派³¹

在「算子否定」下，左、右論元變成左遞減、右遞增；在「右論元否定」下，左、右論元都呈遞增性；在「左論元否定」下，左、右論元都呈遞減性。以下列出上述三種情況的例句：

(S30) 並非只有議員才是右派 $\Rightarrow$ 並非只有上議員才屬兩極陣營
只有上議員不是右派 $\Rightarrow$ 只有議員不屬兩極陣營
只有不是議員的才屬兩極陣營 $\Rightarrow$ 只有不是上議員的才是右派

總上所述，「只有」跟「所有」很相似，可以看成一種「右論元否定詞」。

6.5 數量比較算子

6.5.1 絕對數量比較

接著我們研究數量比較算子的單調性。首先從語句「多於三名上議員是右派」開始，這句可表達為 $|\text{UPPER} \cap \text{RIGHTIST}| > 3$ 。根據定理 6(2)，我們得 $|\text{UPPER} \cap \text{RIGHTIST}| > 3 \Rightarrow |\text{UPPER} \cap \text{POLARIZED}| > 3$ ，即

(S31) 多於三名上議員是右派 $\Rightarrow$ 多於三名議員屬兩極陣營

此即「多於 n 個」的「右遞增性」。同理亦易證「多於 n 個」的「左遞增性」。把以上語句中的「 $>$ 」改為「 $\geq$ 」，我們便可證明「至少 n 個」的「左遞增性」和「右遞增性」。

上段結果顯示，「多於 n 個」和「至少 n 個」的單調性與「存在量詞」完全相同。由此可以推斷，三種否定形式對這兩個算子的影響與對「存在量詞」的影響也應完全相同，這裡不再詳細證明及舉例。根據前文的「多於對當方陣」，「多於」和「至少」的否定分別為「最多 n 個」和「少於」。由此我們可以推斷「最多 n 個」和「少於 n 個」這兩個算子具有「左遞減性」和「右遞減性」，我們可以把這兩個算子看成「左、右論元否定詞」。根據附錄 2，我們容易推斷其他絕對數量比較算子(例如「有些」、「除了最多 n 個外，所有」、「有限個」、「無限個」等)的左、右單調性。

³¹ 這例句似乎不易理解，但只要把它換成邏輯上等價的條件句：「若不是上議員，就不屬兩極陣營」 $\Rightarrow$ 「若不是議員，就不是右派」，便容易理解了。

6.5.2 相對數量比較

有一點要注意的是，上述的數量比較都是絕對數量的比較，當涉及相對數量(指比率、百分比等)的比較時，情況便有所不同。在以下兩個推理中，前一推理是有效的，而後一推理卻無效。

- (S32) 多於一半議員是右派 $\Rightarrow$ 多於一半議員屬兩極陣營
 多於一半上議員是右派 $\sim\Rightarrow$ 多於一半議員是右派

容易構想一個反例以證明上述後一推理無效。假設議員數目為 100，其中上議員數目為 30；而右派議員人數為 20，全部都是上議員。那麼右派議員在上議院中所佔的比例超過一半，但在整個國會中卻不及一半。以上例句顯示，「多於一半」(以至於「多於 n 成」)是右遞增、左非單調的。

如何解釋上述這種不對稱現象？答案仍需從上述算子的數學表達式中尋。
「多於 n 成(A)(B)」可表達為

$$(F10) \quad |A \cap B| / |A| > n/10$$

上式可改寫為 $|A \cap B| > n|A|/10$ 。當我們把 B 換成其真母集 B' 時， $|A|$ 不受影響。另一方面，根據定理 6(2)，得 $|A \cap B'| > n|A|/10$ ，即 $|A \cap B'| / |A| > n/10$ 。由此證得「多於 n 成」的右遞增性。但是當我們把 A 換成其真母集 A' 時， $|A|$ 變成 $|A'|$ ，這時就不能從 $|A \cap B| / |A| > n/10$ 推得 $|A' \cap B| / |A'| > n/10$ ，結果造成「多於 n 成」的左非單調性。由此我們亦可推斷，所有涉及相對數量比較的算子都是不對稱的，這些算子又可分為兩類，其中「多於 n 成」、「多數」(=「多於一半」)、「至少 n 成」是右遞增、左非單調的，而「少於 n 成」、「少數」(=「少於一半」)和「最多 n 成」則是右遞減、左非單調的。

照此類推，形如

$$(F11) \quad |A - B| / |A| \leq n/10$$

的語句也應是右遞減、左非單調的。這個 GQ 所代表的意思為「除了最多 n 成外，所有(A)(B)」。

以上分析可有效解釋以下推理的合理性：

- (S33) 除了最多一成外，所有議員都是右派 $\Rightarrow$
 除了最多一成外，所有議員都屬兩極陣營

除了最多一成外，所有議員都是右派 $\sim \Rightarrow$
除了最多一成外，所有上議員都是右派

6.5.3 「所有」、「只有」和「沒有」的特殊性

不過以上推理模式必須小心應用，否則會導出錯誤的結果。上文提過，「所有(A)(B)」和「沒有(A)(B)」可分別表達為 $|A \cap B| / |A| = 1$ 和 $|A \cap B| / |A| = 0$ 。而「只有(A)(B)」也可表達為 $|A \cap B| / |B| = 1$ 。這即是說，「所有」、「只有」和「沒有」其實是表達相對數量比較的算子，可是它們卻沒有非單調性，這如何解釋？這是由於這三個算子表達了某種「極端情況」，並非單純表達相對數量比較。上文提過，「所有(A)(B)」可表達為 $A \subseteq B$ 。據此和定理 1，我們得 $A \cap B = A$ ，由此保證 $|A \cap B| / |A| = |A| / |A| = 1$ 。當我們把 A 換成其真子集 A'時，得 $A' \subseteq B$ 和 $A' \cap B = A'$ 。這同樣保證了 $|A' \cap B| / |A'| = |A'| / |A'| = 1$ ，因此「所有」並不因表達相對數量比較而成為左非單調算子。同理亦可證明為何「只有」和「沒有」不具備非單調性。

十分有趣的是，當我們在這三個算子前加上「幾乎」後，它們便不再表達「極端情況」，從而像其他表達相對數量比較的算子那樣，呈現非單調性。例如「幾乎所有」便是左非單調的。根據前文，「所有」是左遞減的，因此「幾乎所有」不可能是左遞增的，以下例子顯示「幾乎所有」也不是左遞減的。設論域中共有 100 名學生，其中 98 名是女生，全部都穿 T 恤，其餘兩名男生則沒有一個穿 T 恤。在這情況下，「幾乎所有學生都穿 T 恤」是真的，但「幾乎所有男生都穿 T 恤」卻是假的，因為事實上沒有一個男生穿 T 恤。由此可見，我們不能從「幾乎所有學生都穿 T 恤」推出「幾乎所有男生都穿 T 恤」，因此「幾乎所有」不是左遞減的，而是左非單調的。同理亦容易設想一些情況來證明「幾乎只有」是右非單調，而「幾乎沒有」是左非單調的。

6.5.4 含有相等語義的算子

非單調性還有另一個成因，就是算子含有「相等於...」的語義。上文提過，「剛好 n 個(成)(A)(B)」可表達為

$$(F12) \quad |A \cap B| = x$$

這裡 x 是整數($= n$)或分數($= n/10$)。由於把 A 或 B 換成其真母集或真子集 A'或 B'後，無法從 $|A \cap B| = x$ 推得 $|A' \cap B| = x$ 或 $|A \cap B'| = x$ ，由此可知「剛好 n 個(成)」是左、右非單調的。如果把(F12)中的 $|A \cap B|$ 改為 $|A - B|$ ，情況也是如此，由此亦可知「除了 n 個(成)外，所有」也是左、右非單調的。以上結果還可以推廣到涉

及集合比較的算子。舉例說，「除了 John 外，所有學生都上學」和「除了 John 外，沒有學生上學」可以分別表達為 $\text{STUDENT} - G = \{j\}$ 和 $\text{STUDENT} \cap G = \{j\}$ 。這些表達式都包含相等語義。仿照前面的推理，容易證明「除了 John 外，所有...」和「除了 John 外，沒有...」也是左、右非單調的。

6.5.5 模糊算子

我們可以把以上的推理模式推廣到各種模糊算子。雖然模糊算子不表達固定的數值，但這無礙於本文的研究，因為這些算子的單調性往往取決於它們究竟是含有「至少」、「最多」還是「只有」等意義，而跟具體的數值無關，就像「多於兩個」和「多於一億個」同屬左、右遞增算子一樣。不過由於包含模糊算子的語句是在區間 $[0, 1]$ 中取真值而非只 0、1 這兩個真值，模糊算子的「單調性」定義必須作如下修改：模糊算子 Q 是「左遞增(減)」的當且僅當對任何 A 、 B 、 A' 而言， $\mu[\text{TRUE PROPOSITION}](Q(A)(B)) \leq \mu[\text{TRUE PROPOSITION}](Q(A')(B))$ ，其中 A' 是 A 的真母(子)集， $\mu[\text{TRUE PROPOSITION}](p)$ 則是命題 p 真值的「隸屬度函數」。「右遞增(減)性」和「左、右非單調性」的定義亦類此。

接著看看在新定義下，如何推導模糊算子的「單調性」？以下以「(至少)幾個」(如前所述，本文假定「幾個」在無標記情況下含有「至少」的意思)為例探討這個問題。由於語句「(至少)幾個 $A(B)$ 」的真值取決於 $|A \cap B|$ 符合「(至少)幾個」的程度，所以 $\mu[\text{TRUE PROPOSITION}](Q(A)(B)) = \mu[(\text{至少})\text{幾個}](|A \cap B|)$ 。為方便以下討論，暫把函數「 $\mu[(\text{至少})\text{幾個}](u)$ 」寫成「 $f(u)$ 」。 $f(u)$ 顯然是一個遞增函數，理由是若數目 x 在某一程度上符合「(至少)幾個」的意思，那麼不小於 x 的數 y 符合「(至少)幾個」的程度必不低於 x ，即 $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ ，這正是數學上「遞增函數」的定義。現在，根據定理 6(1)，若 $A \subset A'$ ，那麼 $|A \cap B| \leq |A' \cap B|$ ，於是必有 $f(|A \cap B|) \leq f(|A' \cap B|)$ ，亦即 $\mu[\text{TRUE PROPOSITION}](Q(A)(B)) \leq \mu[\text{TRUE PROPOSITION}](Q(A')(B))$ ，至此證明了「(至少)幾個」的左遞增性。同理易證「(至少)幾個」的右遞增性。

上段討論給予我們一個重要啓示，模糊算子 Q 的單調性與其「隸屬度函數」的單調性有密切關係。由此可以推斷，假如 Q 的「隸屬度函數」是非單調函數，那麼 Q 必然是非單調算子，反之則不必然(因為尚有其他原因導致非單調性)。例如前面定義的模糊算子「只有八十左右」(見 F4)便是一個非單調函數(其圖像呈鈴形 bell-shaped)，由此可知「只有八十左右」是左、右非單調算子。

6.5.6 「極多」等的歧義問題

這裡必須指出的是，自然語言中很多量詞都有歧義，這些量詞的不同義項往

往有不同的推理特性。其中「極多」、「很多」、「多」、「頗多」、「頗少」、「少」、「很少」、「甚少」等最具爭議性，這是因為這些量詞既可以指稱絕對數量，亦可以指稱相對數量，或甚至兼有兩種意思。例如 Van Benthem (1983) 便為 many 提出兩個定義：第一個定義是 $|A \cap B| > n(E)$ ，其中 $n(E)$ 是一個隨著論域 E 而變化的標準數目；第二個定義則是 $|A \cap B| / |A| > |B| / |E|$ ，這個定義乃建基於兩個比率。由於這些量詞在指稱絕對數量和相對數量時，會有不同的左、右單調性，因此本文列出這些算子在不同義項下的兩種單調性(詳見表 2)，並用「／」隔開，其中「／」前是這些算子在指稱絕對數量時的單調性，「／」後則是指稱相對數量時的單調性。

6.6 非單調算子總表

總括以上討論，現把各種含有非單調性的算子整理成下表：

表 2

左、右單調性	算子
左非單調、右遞增	幾乎所有、大約 n 成、接近 n 成、絕大多數、一小部分、至少 n 成、多於 n 成、多數
左非單調、右遞減	幾乎沒有、極少數、最多 n 成、少於 n 成、少數、除了最多 n 成外，所有
左遞增、右非單調	幾乎只有
左非單調、右非單調	只有幾個、只有大約 n 個(成)、剛好 n 個(成)、 m 至 n 個、多於 m 個但少於 n 個、偶數個、奇數個、除了 n 個(成)外，所有、除了 John 外，所有、除了 John 外，沒有
左遞增、右遞增／ 左非單調、右非單調	極多、很多、頗多
左遞減、右遞減／ 左非單調、右非單調	極少、很少、頗少

6.7 其他算子

除了以上討論過的算子外，自然語言中還有其他多種意義複雜的算子，難以把它們的單調性一一列出。各種算子的單調性必須根據其集合論定義作出判斷，這裡只舉「定冠詞」(即英語的 *the*) 為例。綜合 Westerstahl (1984) 以及歷來學者的研究，「*the*」在與不同種類的名詞連用時，其集合論定義為：

$$(F13) \quad \text{「the (A)(B)」 (A 爲單數)} \Leftrightarrow X \cap A \subseteq B, \quad \text{if } |X \cap A| = 1$$

$$\text{「the } n(A)(B)\text{」 (A 爲複數)} \Leftrightarrow X \cap A \subseteq B, \quad \text{if } |X \cap A| = n^{32}$$

在以上定義中，X 是「語境集」(context set)，其作用爲與 A 構成交集，從而把主語限定爲「在當前語境中凸顯(salient)的那(n)個 A」；if 以後的語句是「預設」，表示只有當 $|X \cap A|$ 滿足某些條件時，有關語句才有定義。

上述定義顯示，除了帶有「語境集」和「預設」外，上述兩個「the」的定義基本與「所有」的定義相同，因此它們應像「所有」那樣，具有「右遞增性」。可是由於「the」的預設規定了 $|X \cap A| = 1$ ， $X \cap A$ 不可能有非空真子集，因此無左單調性可言；而「the n」的「預設」中含有涉及左論元 A 的相等語義，因此應具有「左非單調性」。以上分析預示了下列推理的有效性：

(S34) The man / 6 men wore red T-shirt(s). $\Rightarrow$
 The man / 6 men wore T-shirt(s).
 The man wore T-shirt. $\Rightarrow$ The ??? wore T-shirt.
 The 6 men and women wore T-shirts. $\sim \Rightarrow$ The 6 men wore T-shirts.

6.8 其他論域上的應用

6.8.1 連續時間論域

以上討論的算子只集中於「個體論域」的算子。接下來我們把上述結果應用於前面第 4 節介紹過的其他論域(但不包括模糊程度，因爲模糊程度難以表達爲集合，例如我們難以定義何謂「xx 程度的真子集」)，從而解釋大量推理現象。以下筆者舉四個例子以作說明。

在眾多論域中，「時間論域」T 與「個體論域」最相似，因此上文提到的各種單調推理模式，在「時間論域」中都有所體現。例如，設 T 爲「過去兩天的時間」，並設集合 A 爲「昨天」，B 爲「John 穿著紅色 T 恤的時間」。那麼 $\sim A$ 就是「(T 中)昨天以外的時間」，即前天；而語句「少數($\sim A$)($\sim B$)」則代表「John 在昨天以外的小部分時間不穿紅色的 T 恤」。現在研究這語句的單調推理模式。根據表 2，「少數」是左非單調、右遞減算子，因此在「少數($\sim A$)($\sim B$)」中，主語 A 具有非單調性，而謂語 B 則相當於受到雙重否定，應該呈遞增性。現在我們把 B 換成其真母集 B' = 「John 穿著 T 恤的時間」，那麼我們應有「少數($\sim A$)($\sim B$)」 $\Rightarrow$ 「少數($\sim A$)($\sim B'$)」，即

³² 其實還有第三種「the」—與複數 A 連用的「the」，即句子“The men wore T-shirts.”中的「the」。由於這個「the」的邏輯語義頗爲複雜，本文不予討論。

(S35) John 在昨天以外的小部分時間不穿紅色的 T 恤 $\Rightarrow$
 John 在昨天以外的小部分時間不穿 T 恤

這一推理是合理的，因為既然 John 在昨天以外的小部分時間不穿紅色的 T 恤，那麼他在前天的大部分時間穿紅色的 T 恤，因而自然也在前天的大部分時間穿 T 恤，亦即「John 在昨天以外的小部分時間不穿 T 恤」。

6.8.2 離散時間論域

自然語言中某些複句表面上看似乎不包含任何量詞，但只要細心考究，便能發現這些語句其實也包含某種 GQ。例如英語某些以時間連詞開首表示某種「習慣」的從句在邏輯推理中跟「全稱量詞」一樣呈左遞減性。試看以下推理：

(S36) Before she touches him, she washes her hands $\Rightarrow$
 Before she hugs him, she washes her hands

以上兩句可以理解為在 before 之前隱含著 each time。根據 De Swart (1996)，這兩句可以表達為

(F14) $\text{TOUCH} / \text{HUG} \subseteq \{e: \text{WASH} \cap \text{BEFORE}_e \neq \emptyset\}$

上式的 e 是離散時間(即事件)變量；TOUCH、HUG 和 WASH 分別為由「她接觸他」、「她擁抱他」和「她洗手」的事件組成的集合(因為這些事件不只發生一次)，其中 $\text{HUG} \subset \text{TOUCH}$ ； BEFORE_e 則是由發生於 e 之前的所有事件組成的集合。上式表示每一個她接觸／擁抱他的事件，都有一個她洗手的事件發生在之前，這正是(S36)中兩句的意思。由此我們建立了這兩句與「全稱量化式」的聯繫，從而得以解釋(S36)的有效性。

6.8.3 比較結構

前面說過，在比較結構中，「最高級」相當於「全稱量詞」。現在讓我們看看如何運用「全稱量詞」的單調性解釋某些涉及「最高級」的推理。設論域為某校的全體學生， A 為「John 的同班同學組成的集合」， B 為「較 John 矮的同學組成的集合」，那麼「 $\sim$ 所有(A)(B)」代表「John 不是全班最高的學生」。根據前文的討論，我們知道「 $\sim$ 所有」具有左遞增、右遞減特性。現在讓我們把 A 換成其真母集 $A' =$ 「John 的同級同學組成的集合」，把 B 換成其真子集 $B' =$ 「較 John 矮且瘦的學生組成的集合」，那麼我們應有「 $\sim$ 所有(A)(B)」 $\Rightarrow$ 「 $\sim$ 所有(A')(B')」，即

(S37) John 不是全班最高的學生 $\Rightarrow$ John 不是全級最高且最肥的學生

6.8.4 命題論域

前面說過，借助「命題論域」，可以把「 p 真和 q 真」以及「 p 真或 q 真」分別表達為 $\{p, q\} \subseteq \text{TRUE}$ 和 $\{p, q\} \cap \text{TRUE} \neq \emptyset$ 。由於我們難以定義命題集合 TRUE 的母集或子集，因此這兩個「命題量化句」沒有右單調性可言。但我們卻可以利用包含關係 $\{p\} \subseteq \{p, q\}$ 研究它們的左單調性。由於這兩個「命題量化句」正好分別與「全稱命題」和「存在命題」對應，因此應分別具有左遞減性和左遞增性，由此推知應有以下推理：

(S38) p 真和 q 真 $\Rightarrow p$ 真
 p 真 $\Rightarrow p$ 真或 q 真

上述兩個推理分別正是「命題邏輯」中的「合取消去律」和「析取引入律」。這再一次證明，「命題邏輯」的很多定理可被歸結為本文理論框架下的特例。

6.9 單調推理原理

現把前述結果總結為「**單調推理原理**」：

1. 「遞增性」是一種「無標記」性質。不含任何否定詞或各種「非單調算子」的語句的各個論元都具有遞增性。
2. 「左／右非單調算子」(詳見表 2)使左／右論元具有非單調性。
3. 否定詞會改變其否定域內各部分的單調性。各部分最終的單調性按「多重否定律」決定。
4. 「算子否定」相當於「全盤否定」，否定域包括該算子右面的所有論元。「論元否定」則是「局部否定」，否定域只包括被否定的論元。
5. 「左／右遞減算子」可視為特殊的否定詞，其否定域就是左／右論元。下表列出部分「遞減算子」(其餘見表 2)：

表 3

算子	遞減性
所有	左
只有	右
沒有、少於 n 個、最多 n 個、 除了最多 n 個外，所有、有限個	左、右

7. 「單調推理原理」的擴展

7.1 引言

在前面的論述中，所有量化結構都由 Q、A、B 這三部分組成，這裡的 Q 就是前述的<1,1>類 GQ。可是在自然語言中，還有其他類型的量化結構。在本節筆者將探討這些量化結構的表達法，並證明「單調推理原理」同樣適用於這些結構。

7.2 無算子結構

首先討論「無算子結構」。這類結構在表面上不含任何算子／量詞，不過只要經過細心分析，我們總能把它們重新表述為量化結構，從而應用前面有關量化結構的結果。這類結構又可分為兩個次類：「光桿」名詞短語結構和無主句，以下逐一介紹。

7.2.1 「光桿」名詞短語結構

所謂「光桿」(bare)名詞短語，是指不含任何限定詞的名詞短語，包括專有名詞、代名詞、光桿類名詞(generic noun)和光桿抽象名詞(abstract noun)等，GQT 把這類名詞短語稱為<1>類 GQ。從某個角度看，上述各類光桿名詞短語都可以歸結為專名。例如某些學者使用變項 x 、 y 等代表代名詞³³，這跟用 j 代表專名 John 沒有實質分別。另外，根據 Carlson (1977)，可以把「類」看成個體，而光桿類名詞則是這些個體的專名³⁴。最後，光桿抽象名詞在用作主語時也可被看成個體。總上所述，光桿名詞短語一般都可當作專名處理。

以「單純專名」³⁵為主語的句子在表面上不含任何 GQ，這類句子的集合論表達式一般採取 $j \in R$ 的形式，但正如前文 3.2 節所說的，上式可改寫為 $\{j\} \subseteq R$ ，亦即「所有($\{j\}, R$)」³⁶，與「全稱量詞句」具有相同的形式。由此可以推斷，「單純專名句」在某些方面應與「全稱量詞句」具有相似的推理特性。由於「單純專名句」的主語是單元集，沒有非空真子集，因此這類句子無左單調性可言，我們只需考慮其右單調性。基於與全稱量詞的相似性，可以推知「單純專名」也應具有右遞增性，由此可知以下推理是有效的：

³³ Keenan (1989)則把代名詞處理成因應語境變化的函項，以反映代名詞的「直指」(deixis)及「回指」(anaphora)功能。

³⁴ 也有一些學者把光桿類名詞分析成含有「類算子」(generic operator)(這種算子作用於「情境」situation 變項)的結構。由於這種分析牽涉頗多技術細節，本文不予討論。

³⁵ 「單純專名」是相對於用「和」、「或」等連詞構成的「複合專名」而言的。本部分只討論「單純專名」的情況，有關「複合專名」的集合論表達法，請參閱上文第 4.1.3 小節的討論。

³⁶ Keenan & Westerstahl (1993)則把「單純專名」表達為<1>類 GQ，例如把 $j \in R$ 表達為 $I_j(R)$ 。本文為突出「單純專名句」與「全稱量詞句」的相似性，所以採取「所有($\{j\}, R$)」的表達形式。

(S39) John 是右派 $\Rightarrow$ John 屬兩極陣營

7.2.2 無主句

「無主句」就是既無算子，又無主語，只包含一個謂語的句子，例句如「It rained」³⁷。根據 Cann (1993)，這類句子的真值必須在模型中直接賦值(而非透過運算得到)，即我們在模型中直接「規定」這些語句是真還是假。因此當我們說出一個「無主句」 p 時，就等同於說「 p (在現實世界)是真的」。這類句式應如何表達呢？一種方法是使用上文有關「命題論域」的方法，表達成 $\{p\} \subseteq \text{TRUE}$ 。但這種表達法不方便進行以下的推理，所以筆者在這裡採用「可能世界理論」把這語句表達為另一種形式： $W_r \in \{w: \text{AT}(w, p)\}$ ，直譯出來就是「現實世界是令 p 真的可能世界之一」。這樣，我們便把「無主句」改寫成與「單純專名句」相同的形式， W_r 就是「可能世界論域」中的一個專名，因此這種句式也應具有與「單純專名句」相同的推理模式，即右遞增性。舉例說，「It tained heavily」可表達為 $W_r \in \{w: \text{AT}(w, \text{RAIN-HEAVILY})\}$ 。由於在任一可能世界 w ，若下大雨真，則下雨在 w 真，我們得 $\{w: \text{AT}(w, \text{RAIN-HEAVILY})\} \subset \{w: \text{AT}(w, \text{RAIN})\}$ 。根據右遞增性，我們得 $W_r \in \{w: \text{AT}(w, \text{RAIN})\}$ ，即

(S40) It rained heavily $\Rightarrow$ It rained

7.3 泛化量化結構

在 $Q(A)(B)$ 中，論元 A 和 B 都代表集合，當其中一個的取值為論域 E 時，該論元的意義便變得很空泛，筆者把這種句子稱為「泛化(universalized)量化結構」，以下主要討論英語中的兩種「泛化量化結構」。

第一種是以 everything、everybody、something、somebody、nothing、nobody 或「everything / everybody / nothing / nobody + but / except + 名詞短語」作主語的句子。這類句子的特點是其結構中的 body、thing 等名詞的指稱非常空泛，實際等於整個論域 E 。對於這類句子，我們可以把其左論元等同於論域，把其三分結構表達為 $Q(E)(B)$ 。例如「everything (B)」的集合論定義便可以表述為 $E \subseteq B$ 。但是由於 E 是「全集」，根據全集的性質， $E \subseteq B$ 變為 $E = B$ 。類似地，「something (B)」、「nothing (B)」、「everybody but John (B)」和「nobody but John (B)」的集合論定義應分別為 $B \neq \emptyset$ 、 $B = \emptyset$ 、 $\sim B = \{j\}$ 和 $B = \{j\}$ 。

至於上述算子的「右單調性」，只需參考相關的 $\langle 1, 1 \rangle$ 類 GQ 的「右單調性」

³⁷ 這裡按照 Cann (1993) 的處理方法，把 it 視為無意義的詞項。此外，這裡也不考慮時態的問題。

便行了，例如 *everything* 和 *something* 是右遞增的、*nothing* 是右遞減的，而 *everybody but John* 和 *nobody but John* 則是右非單調的。

第二種「泛化量化結構」則是「存在句」，其形式為“*There + be + NP*(名詞短語)”。Barwise & Cooper (1981)曾探討過這種句子的集合論表達法，用三分結構表達出來就是 $Q(A)(E)$ ，其中 A 是把 NP 中的限定詞去掉後剩下的部分。例如在語句“*There is a unicorn*”中，“*a unicorn*”就是上述定義中的 NP 。若把這句與 $Q(A)(E)$ 相對照，那麼 Q 就是“*a*”(即存在量詞「有」)， A 就是“*unicorn*”。由於「 $有(A)(E)$ 」可表述為 $A \cap E \neq \emptyset$ ，把此式套用於“*There is a unicorn*”，便得 $UNICORN \cap E \neq \emptyset$ 。根據全集的性質，此式等同於 $UNICORN \neq \emptyset$ 。其他類型的「存在句」也可按相同的方式處理，例如“*There is no unicorn*”和“*There are seven continents*”可以分別表達為 $UNICORN = \emptyset$ 和 $|CONTINENT| = 7$ 。

至於「存在句」的單調推理特性，可以根據這些句子的集合論表達式推得。例如根據 $UNICORN \subset MONSTER$ ，我們推知 $UNICORN \neq \emptyset \Rightarrow MONSTER \neq \emptyset$ ，即

(S41) $There\ is\ a\ unicorn \Rightarrow There\ is\ a\ monster$

7.4 多式算子結構

7.4.1 迭代量詞

到目前為止，我們所研究的句子都只含有一個算子，這些算子都緊貼主語。但在日常語言中，還有很多句子包含超過一個算子，其中某些算子緊貼主語以外的成分，最常見的是賓語。為此，我們必須擴充現有的集合論語言，此即 Keenan & Westerstahl (1993)所研究的「多式量詞」(polyadic quantifier)³⁸，其中一大部分就是前文提過的 $\langle 1,1,2 \rangle$ 類 GQ。他們把「每個學生讀一本小說」這類句子分析成「(每...一)(學生, 小說, 讀)」的形式，這裡(每...一)是一個「多式量詞」，它含有三個論元，前兩個論元是一元謂詞(即名詞短語)，第三個論元則是二元謂詞(即及物動詞)。由於這個量詞有一個高於一元的謂詞，所以是一個「多式量詞」。為使 GQT 的集合論定義也能適用於「多式量詞」，他們又提出「迭代」(iteration)³⁹這一技術手段，把 $\langle 1,1,2 \rangle$ 類 GQ 表達為「迭代集合」的形式，從而得到「迭代量詞」(iterated quantifier)。

³⁸ 鄒崇理(2002)把 polyadic 譯作「多樣模式」，本文將之簡化為「多式」。

³⁹ 鄒崇理(2002)把 iteration 譯作「疊置複合」，本文則沿用我國數學界的習慣譯法將之譯成「迭代」。

所謂「迭代集合」，就是在集合定義中包含另一個集合定義。從三分結構的角度看，就是把 $Q(A)(B)$ 中的 B 代之以另一個三分結構 $Q'(A')(B')$ ，成為 $Q(A)(Q'(A')(B'))$ 。這樣透過反覆代入，即使句中包含多個量詞，也能表達為三分結構的形式。例如「每個學生讀一本小說」就可以表達為「*所有(學生)(有(小說)(讀))*」。把上式翻譯為集合論語言就是

$$(F15) \quad \text{STUDENT} \subseteq \{x: \{y: \text{READ}(x, y)\} \cap \text{FICTION} \neq \emptyset\}^{40}$$

以上定義包含兩層集合關係。外層是一個「 $\subseteq$ 」關係，表達「每個學生」。 $\{x: \dots\}$ 是由人組成的集合，這個集合的定義包含著內層的集合關係，即一個「 $\cap$ 」關係，表達「一本小說」，其中 $\{y: \dots\}$ 是由讀物組成的集合。變項 x 和 y 用函項 $\text{READ}(x, y)$ 連繫。把以上語句直譯為日常語言就是：所有學生都是人，這(些)人中每一個都讀了讀物，而在讀物中至少有一本小說。這正是「每個學生讀一本小說」的邏輯意義。

「迭代」不僅可以應用於個體論域，亦可應用於其他論域。「迭代」的層數也可不只兩層。以下便是一個具有三層結構並混合了多種論域的例句：「至少三名學生必須讀一本小說」，用「迭代集合」表示就是

$$(F16) \quad W = \{w: \text{AT}(w, |\text{STUDENT} \cap \{x: \{y: \text{READ}(x, y)\} \cap \text{FICTION} \neq \emptyset| \geq 3)\})\}$$

這裡 W 代表「道義可能世界論域」。上式假設模態算子「必須」取最寬域。上式也可用三分結構表達為：

$$(F17) \quad \text{所有}(W)(\text{至少} 3 \text{ 個}(學生)(有(小說)(讀)))$$

7.4.2 轄域歧義

「迭代集合」作為集合論語言的擴充，能夠表達多種涉及「多式算子」的現象，其中一種最重要的現象是「轄域歧義」。在謂詞邏輯中，「轄域歧義」是透過 $\forall$ 和 $\exists$ 符號的先後次序來表達的，位於較後位置的符號處於較前位置符號的轄域內。這一處理方式在「迭代集合」中則表現為取窄域的集合被包含於取寬域的集合定義內。例如「每個學生讀一本小說」便是一個歧義句，其中一個意思是「每個學生讀一本可能各有不同的小說」，這正是上文(F15)所表達的意思。該句還有另一個意思，就是「有一本小說每個學生都讀」，用三分結構表達就是「*有(小說)(所有(學生)(讀))*」，翻譯成集合論語言就是

⁴⁰ Keenan & Westerstahl (1993) 使用一套形式化的概念逐步推導出「迭代集合」，本文為免引入過多技術細節，只寫出上述推導的結果。

$$(F18) \quad \text{FICTION} \cap \{y: \text{STUDENT} \subseteq \{x: \text{READ}(x, y)\}\} \neq \emptyset$$

比較(F15)和(F18)，我們看到 $\{x: \dots\}$ 和 $\{y: \dots\}$ 的「 $\subseteq$ 」關係顛倒了。由此可見，「迭代集合」表達「轄域歧義」的方法與謂詞邏輯的方法其實是相同的。

7.4.3 「逐指解」與「統指解」

在作進一步討論前，有必要討論一下全稱量詞「逐指解」(distributive reading)與「統指解」(collective reading)差異的問題。根據蔣嚴、潘海華(2005)，「全稱量詞」在單用時，其「逐指統指差異」並不明顯，因此在上文筆者一直把「所有」當作「無標記」的「全稱量詞」。可是，當「全稱量詞」與「存在量詞」共用，並且前者取寬域，後者取窄域時，爲了突出「存在量詞」對「全稱量詞」的「邏輯依存」(logical dependency)，較適宜用「每」作爲「全稱量詞」。例如在上文的(F15)，「小說」的所指隨著「學生」的所指而變化，因此這句較適宜表達爲「**每個**學生讀一本小說」。反之，在(F18)，「學生」與「小說」之間並無依存關係，因此在這句中使用「每個」還是「所有」，似乎分別不大。以下在包含「全稱量詞」與「存在量詞」的例句中，筆者會視乎情況選擇用「每個」或「所有」作爲「全稱量詞」。

一般來說，「逐指」與「統指」的集合論表達形式沒有分別。但是當「全稱量詞+主語」是作爲一個整體與謂語發生關係(即蔣嚴、潘海華(2005)所稱的「整體統指」)時，便有明顯的分別。歷來學者對表達「整體統指」的方法各有不同，可謂各師各法。筆者認爲可倣效 Scha (1981)和 McCawley (1993)的處理方法，直接把集合符號當作個體符號使用，這樣就無需更動我們的集合論語言。例如語句「John 和 Mary 一起唱歌」可以表達爲 $\{j, m\} \in \text{SING}$ 。請注意這裡使用符號 ϵ ，這樣就把 $\{j, m\}$ 看做一個個體，從而達到我們的目的。如果把 ϵ 換成 $\subseteq$ ，這句的意義便成了「John 和 Mary 都唱歌」，並不一定含有「一起」的意思。

使用上述表達法，我們亦可作出某些單調推理。例如根據 $\text{SING} \subset \text{ENTERTAINMENT}$ ，我們可推出 $\{j, m\} \in \text{ENTERTAINMENT}$ ，即

$$(S42) \quad \text{John 和 Mary 一起唱歌} \Rightarrow \text{John 和 Mary 一起娛樂}$$

反之，我們卻不能從 $\{j, m\} \in B$ 推出 $\{j\} \in B$ 或 $j \in B$ ，因爲集合論沒有相應的定理。因此以下推理是不正確的：

$$(S43) \quad \text{John 和 Mary 合作} \sim\Rightarrow * \text{John 合作}$$

7.4.4 「單調推理原理」在多式算子上的應用

由於前述「多式算子」的三分結構只是一般三分結構的特例，可以預期「單調推理原理」亦能應用於「多式算子」，所不同者只是在「多式算子」的三分結構中，右論元不是集合，而是一個內層三分結構。因此當外層否定詞的否定域包括右論元時，整個內層三分結構都在否定域之內，這相當於對內層三分結構進行「算子否定」。而內層三分結構又可能包含自己的否定詞，這樣內層三分結構的兩個論元便可能受到多重否定。可以想見，「多式算子」的結構愈複雜，可能出現的否定組合便愈多。但萬變不離其宗，只要靈活運用「單調推理原理」和「多重否定律」，總能推斷出「多式算子」各部分的單調性。以下筆者以兩個應用例子說明上述要點。

首先從句子「每個男生都細心讀一本小說」開始。以下為簡明起見，只用這些語句的三分結構式和「單調推理原理」進行推導，不再寫出這些語句的「迭代集合」表達式。這句是歧義句，但當我們確定了該句各算子的轄域後，便可消解歧義並進行推理。現假設把上句解歧後，該句的三分結構為

(F19) *所有(男生)(有(小說)(細心讀))*

根據「單調推理原理」，「*所有*」相當於一個「左論元否定詞」，所以上式的左論元「男生」應呈遞減性，而右論元(內層三分結構)不受影響。由於內層三分結構沒有否定詞，所以其兩個論元均呈遞增性。由此可以推斷，假如把(F19)中的「男生」換成其真子集「中一男生」，「小說」和「細心讀」各換成其真母集「書」和「讀」，應得到一個受(F19)蘊涵的語句：

(F20) *所有(中一男生)(有(書)(讀))*

事實上，以下推理的有效性不難驗證：

(S44) 每個男生都細心讀一本小說 $\Rightarrow$ 每個中一男生都讀一本書

現在讓我們看看否定對(F19)的影響。由於(F19)實際含有五個部分，相應地可以在五個層面進行否定。我們不一定每次只對一個層面進行否定，而是可以同時對多個層面進行否定。現在假設我們對算子「*所有*」和內層右論元「細心讀」進行否定，使(F19)變為

(F21) *~所有(男生)(有(小說)(~細心讀))*

由於「算子否定」的否定域包括兩個論元而「所有」的否定域為左論元，上式的外層左論元受到雙重否定，因而呈遞增性。對外層右論元的否定相當於對內層三分結構的「算子否定」，結果使內層的兩個論元都受到否定。其中內層左論元受到一重否定，呈遞減性；右論元則受到雙重否定，呈遞增性。假如我們把(F21)的三個名詞、動詞分別換成「學生」、「偵探小說」和「讀」，應得到以下推理：

(S45) 並非所有男生都有一本小說是他不細心讀的 $\Rightarrow$
 並非所有學生都有一本偵探小說是他不讀的

這個推理似乎很費解，但只要細心推敲，仍然可以證明其有效性。根據邏輯定理，「並非所有...」等於「有...並非」，所以原句等於「有男生沒有一本小說是他不細心讀的」，這又等於「有男生細心讀所有小說」。至此我們容易推得「有學生讀所有偵探小說」，最後這句可「還原」為「並非所有學生都有一本偵探小說是他不讀的」。

接著讓我們看一個含有「最多 n 個」和「多於 m 成」的例句：「最多三名學生細心讀多於一半的小說」。這句的三分結構式是

(F22) 最多3個(學生)(多於5成(小說)(細心讀))

假設對上句的「細心讀」進行否定，使(F22)變為

(F23) 最多3個(學生)(多於5成(小說)(~細心讀))

現在來看看我們能作出甚麼推理。根據「單調推理原理」，「最多 n 個」相當於一個「左、右論元否定詞」，因此外層左論元受到一重否定，呈遞減性；而內層三分結構則相當於受到「算子否定」，它的兩個論元同時受到否定。但由於內層算子「多於5成」是「左非單調算子」，根據「單調推理原理」第2點，它使內層左論元呈非單調性。內層右論元則受到雙重否定，所以呈遞增性。現在假如把(F23)的「學生」和「細心讀」分別換成「男生」和「讀」，應得到以下推理：

(S46) 最多三名學生不細心讀多於一半的小說 $\Rightarrow$
 最多三名男生不讀多於一半的小說

只要細心推敲，以上推理也是可以理解的。

請注意在理解(S46)時，不能把「最多三名學生...」化為它的等值形式「至少

七名學生不...」(假設共有十名學生)，原因是雖然「最多三名 A...」與「至少七名 A 不...」在 A=「學生」時成立，但當 A=「男生」時此一等值關係卻不成立。這是因為如果「男生」是「學生」的真子集，男生的數目就少於十個。

7.4.5 否定域的確定

根據「單調推理原理」，否定域的確定對推理的有效性有直接影響。可是在日常語言使用中，否定域卻不是時時清晰可辨的，影響的因素主要有二：其一為自然語言否定詞用法的多樣性，其二是多重量化句的轄域歧義問題。以下對這兩個問題作簡短的討論。

漢語有多種否定詞，它們的否定對象各有不同，否定域因而也各異。一般而言，名詞否定詞(包括前置的「非」和後置的「以外」)的否定域只包括該名詞所在的論元，而不包括其他論元。換句話說，名詞否定詞是「局部否定詞」。現以句子「每個會員都喜愛一樣運動」為例，下表顯示處於不同位置的否定詞的否定域：

表 4

每個 <u>非</u> 會員都喜愛一樣運動	所有(<u>~會員</u>)(有(運動)(喜愛))
每個會員都喜愛一樣運動 <u>以外</u> 的活動	所有(會員)(有(<u>~運動</u>)(喜愛))

上表右欄是三分結構式，下劃線部分就是~的否定域。在以上兩句中，雖然在否定詞右面尚有其他論元，但由於這類否定是局部否定，這些論元都不在其否定域內。

謂詞／句子否定詞(如「並非」、「沒有」(=並非有)、「不」等)的情況則較為複雜。這類否定往往不是局部否定，而是「算子否定」。但由於否定詞可以處於不同位置，而且日常語句的表層語序往往與其邏輯結構有異，再加上日常語句常有轄域歧義，這為否定域的確定增添困難。不過，筆者認為通過變更語序(例如「話題化」、「焦點化」、「分裂句」)等操作方法，把處於某算子轄域內的詞項挪到該算子後面，並把否定詞放在要否定的詞項前，便能使日常語句的語序與所要表達的邏輯結構一致，從而達致解歧的效果。經過解歧後，否定域便容易確定了，它包括謂詞／句子否定詞後面的所有論元。下表仍以「每個會員都喜愛一樣運動」為例，列出該句兩種「解歧後(disambiguated)句式」與否定詞的各種組合及其三分結構式：

表 5

並非每個會員都有一樣運動是他喜愛的	~所有(會員)(有(運動))(喜愛))
每個會員都 <u>沒有</u> 一樣運動是他喜愛的	所有(會員)(~有(運動))(喜愛))
每個會員都有一樣運動是他不喜愛的	所有(會員)(有(運動))(~喜愛))
<u>沒有</u> 一樣運動是每個會員都喜愛的	~有(運動)(所有(會員))(喜愛))
有一樣運動 <u>並非</u> 每個會員都喜愛	有(運動)(~所有(會員))(喜愛))
有一樣運動每個會員都不喜愛	有(運動)(所有(會員))(~喜愛))

除此以外，在日常語言中還有一些否定詞具有與前述不一樣的特性。例如在粵語中有一個可作及物動詞用的「唔見」（相當於漢語的「不見」或「失去」），其中的「唔」字是一個否定詞。因此在這裡「唔」似乎是一個謂詞否定詞，其否定域應包含其後的論元（一般為賓語）。可是實際情況卻不是這樣。試看以下推理：

(S47) 我唔見左一本書 ~⇒ 我唔見左一本小說
 我唔見左一本小說 ⇒ 我唔見左一本書

由此可見，「唔」並沒有影響其賓語的單調性（其賓語仍然呈遞增性），它的否定域只及於謂詞「見」。筆者認為，這是由於「唔見」已緊密結合為一個詞，「唔」在這裡已失去一般謂詞否定詞的特性，或者換句話說，「唔見」並非普通的「唔+謂詞」結構。

8. 並列結構

8.1 「和-或錯位現象」

根據前文的討論，三分結構 $Q(A)(B)$ 中的 A 和 B 在「無標記」的情況下都是遞增的，即 $Q(A)(B) \Rightarrow Q(A')(B')$ ，其中 A' 和 B' 是 A 和 B 的真母集。構造真母集的方法之一是利用連詞「和」把兩個名詞連繫起來，新的名詞短語應是原來兩個名詞的母集，例如「高個子和胖子」是由「高個子」和「胖子」兩者組成的集合，所以應是這兩個集合的母集。可是當我們嘗試把「高個子和胖子」翻譯成集合論語言時，問題便出來了。一般認為，邏輯聯結詞「和」對應於集合的「交」運算。但是根據集合論的定理， $A \cap B$ 卻是 A 和 B 的子集而非母集。而對應於集合「并」運算的邏輯聯結詞應是「或」。這樣看來，「高個子」和「胖子」的母集似乎應是「高個子或胖子」而非「高個子和胖子」。「和」與「或」在這裡出現了錯綜複雜的關係。以下筆者將從集合論和命題邏輯的角度探討這個問題。

其實，「和」與「或」是可以互相轉化的。在命題邏輯中有這麼一條定理(即定理 7)： $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ 。按照命題邏輯與集合論的對應原理(即 $\vee$ 對應 $\cup$ ， $\wedge$ 對應 $\cap$ ， $\Rightarrow$ 對應 $\subseteq$ ， F 對應 $\emptyset$)，可以把這定理轉化為集合論的定理(即定理 9)： $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow (A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)$ ⁴¹。事實上，這兩條定理的證明也非常相似。現在如果我們把 A 、 B 和 C 分別解釋為「高個子」、「胖子」和「唱歌者」的集合，定理 9 便代表

(S48) 所有或高或胖的人唱歌 $\Leftrightarrow$ 所有高個子唱歌和所有胖子唱歌

這裡清楚顯示了「和」與「或」的微妙關係，也為以上提出的問題提供了解答。

我們可以說，漢語(以及很多自然語言)的「和」起著邏輯上「或」的部分作用。雖然按照集合論的標準定義，「高個子 $\cup$ 胖子」是 $\{x: x \in \text{高個子或 } x \in \text{胖子}\}$ ，但在表達成日常語言時，「高個子 $\cup$ 胖子」卻常常說成「由所有高個子和胖子組成的集合」。為了透徹了解這種「和-或錯位現象」，筆者研究了各種並列主語句(「和／或」與「所有／只有／有」的各種組合)的表達法和某些等值關係，整理成下表：

⁴¹ 有學者把滿足 $Q(A \cup B, C) \Leftrightarrow Q(A, C) \wedge Q(B, C)$ 的算子 Q 稱為「左反加性」算子。除了「反加性」(anti-additivity)外，還有「可加性」(additivity)、「反乘性」(anti-multiplicativity)、「可乘性」(multiplicativity)等概念。本文為免引入太多術語，不使用這些名稱。

表 6

$A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow (A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)$	所有高個子 和 胖子唱歌(若純粹從邏輯出發，應是「所有 或 高 或 胖的人唱歌」) $\Leftrightarrow$ 所有高個子唱歌 和 所有胖子唱歌
$A \cup B \supseteq C$ (沒有相應的等值式)	只有高個子 或 胖子唱歌
$(A \cup B) \cap C \neq \emptyset \Leftrightarrow (A \cap C) \neq \emptyset \vee (B \cap C) \neq \emptyset$ (證明從略)	有高個子 或 胖子唱歌 $\Leftrightarrow$ 有高個子唱歌 或有 胖子唱歌
$A \cap B \subseteq C$ (沒有相應的等值式)	所有高個子 兼 胖子唱歌
$A \cap B \supseteq C \Leftrightarrow (A \supseteq C) \wedge (B \supseteq C)$ (證明從略)	只有高個子 兼 胖子唱歌 $\Leftrightarrow$ 所有唱歌的都是高個子 和 所有唱歌的都是胖子 ⁴²
$(A \cap B) \cap C \neq \emptyset$ (沒有相應的等值式)	有高個子 兼 胖子唱歌

為方便討論，這裡借用 Carpenter (1997)有關「並列連詞轄域」的概念，把被並列連詞連接的兩部分視為該連詞的轄域，這樣並列連詞在並列分句和並列名詞短語中便分別取「寬域」和「窄域」。現在筆者根據上表總結出「和-或錯位現象」的兩個特點。第一， $\cup$ 在與「所有」連用時常常體現為「和」。筆者認為，這種現象的成因是人們傾向於把「和」作「寬域」解，即當人們說「所有高個子和胖子唱歌」時，他們是把這句當作「所有高個子唱歌和所有胖子唱歌」的同義句。請注意，不能因此認為說漢語的人犯了邏輯錯誤，而只能說漢語連詞「和」，即使僅從真值條件看，也不完全等同於集合論／邏輯學中的 $\cap/\wedge$ 。其次，十分有趣的是，由於在漢語中「和」被用來表達 $\cup$ 的部分意義，漢語需要另一個詞來表達 $\cap$ ，這個詞就是「兼」(或「又...又...」)。這樣，集合論／邏輯學中的「 $\cap/\wedge-\cup/\vee$ 二分關係」在漢語中便變成了「兼-和-或三分關係」。

根據對稱性，定理 9 應有其逆向對等式： $A \supseteq C \cup D \Leftrightarrow (A \supseteq C) \wedge (A \supseteq D)$ ，表達為日常語言就是

(S49) 只有高個子唱歌**或**跳舞 $\Leftrightarrow$ 只有高個子唱歌**和**只有高個子跳舞

因此這裡似乎也應存在「和-或錯位現象」。不過這裡的問題不像前述的那樣簡單，理由是「只有」的定義與否定句密切相關，例如(S49)便等同於

(S50) 所有不高的都不唱歌**或**跳舞 $\Leftrightarrow$
所有不高的都不唱歌**和**所有不高的都不跳舞

⁴² 雖然 $(A \supseteq C) \wedge (B \supseteq C)$ 是可以成立的，但若把它直譯成「只有高個子唱歌**和**只有胖子唱歌」，在語義上不通，所以只好把這句表達成它的逆向對等式。

因此(S49)是否存在錯位現象視乎人們認為(S50)是否存在錯位現象。筆者發現，不同人在不同語境中對「並列謂語句」中否定詞的轄域似乎有不同的語感，例如對於「他既不吸煙也不喝酒」究竟是等同於「他不吸煙和喝酒」還是「他不吸煙或喝酒」，便是人言人殊，莫衷一是。由於這裡涉及到否定詞與並列連詞的相互轄域問題，本文不再深入討論。

8.2 「邏輯-集合論不對應現象」

在命題邏輯中還有另一條涉及「和」與「或」的定理(即定理 10)： $p \wedge q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ 。按照前述的對應原理，應有以下集合論「定理」： $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow (A \subseteq C) \vee (B \subseteq C)$ 。若仍對 A、B 和 C 作前述解釋，將得到以下「推理」：

(S51) 所有高個子兼胖子唱歌 ??? $\Leftrightarrow$ 所有高個子唱歌或所有胖子唱歌

(S51)顯然是無效的推理。至此我們發現了一個「邏輯-集合論不對應現象」，傳統認為的命題邏輯與集合論的對應在此失效了。這是一個令人困惑的問題，究竟如何解釋？

現在讓我們仿照定理 10 的證明，嘗試「證明」上述無效的集合論「定理」，看看問題出在哪裡。

$$\begin{aligned} A \cap B \subseteq C &\Leftrightarrow (A \cap B) \cap \sim C = \emptyset \quad (\text{定理 2(1)}) \\ &\Leftrightarrow (A \cap B) \cap (\sim C \cap \sim C) = \emptyset \quad (\text{冪等律}) \\ &\Leftrightarrow (A \cap \sim C) \cap (B \cap \sim C) = \emptyset \quad (\text{交換律和結合律}) \\ ??? &\Leftrightarrow (A \cap \sim C) = \emptyset \vee (B \cap \sim C) = \emptyset \end{aligned}$$

問題出在最後一行。事實上，該等值關係是無效的，反例如下：設 $E = \{x, y\}$ ， $A = \{x\}$ ， $B = \{y\}$ ， $C = \emptyset$ ；則 $\sim C = \{x, y\}$ ， $A \cap \sim C = \{x\}$ ， $B \cap \sim C = \{y\}$ ，這樣 $(A \cap \sim C) \cap (B \cap \sim C) = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ，而 $A \cap \sim C$ 和 $B \cap \sim C$ 卻都不等於 $\emptyset$ 。

如果把上述「證明」與定理 10 的證明逐行比較，我們會發現以上標有??? 的一行正對應定理 10 證明的倒數第二行。該行應用了 $\wedge$ 的定義把 $((p \wedge \sim r) \wedge (q \wedge \sim r)) = F$ 變換為 $(p \wedge \sim r) = F \vee (q \wedge \sim r) = F$ 。現在我們清楚看到為何定理 10 的證明有效，而上述「證明」卻無效，關鍵在於在命題邏輯中， $p \wedge q = F \Leftrightarrow p = F \vee q = F$ 是有效的等值式，但在集合論中， $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$ 卻是無效的。為何會這樣？原因是在命題邏輯中，命題的真值只有 T 和 F 這兩種可能性，當 $p \wedge q$ 假時，必有 p 假或 q 假；但在集合論中，論域中的個體數目可以不只一個，只要有至少兩個個體，這些個體就可以各自歸於集合 A 或 B 中，使得 A 和 B 皆不

空，但卻沒有個體同時屬於 A 和 B，從而使以上後一等值式無效。

由此我們得到一個啓示：假如論域中只有一個個體(設爲 x)，那麼 $A \cap B = \emptyset$ 意味著 x 不可能既屬於 A，又屬於 B。由於只有 x 這個個體，必有 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$ 。反之，若 $A = \emptyset \vee B = \emptyset$ ，則自然有 $A \cap B = \emptyset$ 。由此得到在論域只有一個個體的情況下， $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$ 是成立的，因而上述帶???的一行也是成立的，並可從該行推出 $A \subseteq C \vee B \subseteq C$ 。至此我們證明了，在論域只有一個個體的情況下，(S51)是成立的。

以上討論告訴我們，在論域只有一個個體的情況下， $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$ 與 $p \wedge q = F \Leftrightarrow p = F \vee q = F$ 兩者同時成立。這裡我們重新看到集合論與命題邏輯的對應關係：集合 A、B 對應著命題 p、q，語句 $x \in A$ 、 $x \in B$ 則對應著命題 p 真、q 真(其中 p =「A 不空」、q =「B 不空」)等等。由此筆者得出一個結論：從某一角度看，命題邏輯可以歸結爲單個體論域的集合論。

其實，如果我們降低對上述等值式的要求，把它改爲蘊涵式，那麼我們會得到另一個結果。雖然 $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$ 並不總是成立，但 $A = \emptyset \vee B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ 卻必然成立，由此我們可以得到定理 11： $(A \subseteq C) \vee (B \subseteq C) \Rightarrow A \cap B \subseteq C$ 。若仍對 A、B 和 C 作前述解釋，將得到以下推理：

(S52) 所有高個子唱歌或所有胖子唱歌 $\Rightarrow$ 所有高個子兼胖子唱歌

這個推理是完全合理的。

按照對稱性，定理 11 應有六個變體。現將這六個變體總結成下表(證明從略)：

表 7

$(A \subseteq C) \vee (B \subseteq C) \Rightarrow A \cap B \subseteq C$	所有高個子唱歌或所有胖子唱歌 $\Rightarrow$ 所有高個子兼胖子唱歌
$(A \supseteq C) \vee (B \supseteq C) \Rightarrow A \cup B \supseteq C$	只有高個子唱歌或只有胖子唱歌 $\Rightarrow$ 只有高個子或胖子唱歌
$(A \cap B) \cap C \neq \emptyset \Rightarrow (A \cap C \neq \emptyset) \wedge (B \cap C \neq \emptyset)$	有高個子兼胖子唱歌 $\Rightarrow$ 有高個子唱歌和有胖子唱歌
$(A \subseteq C) \vee (A \subseteq D) \Rightarrow A \subseteq C \cup D$	所有高個子唱歌或所有高個子跳舞 $\Rightarrow$ 所有高個子唱歌或跳舞
$(A \supseteq C) \vee (A \supseteq D) \Rightarrow A \supseteq C \cap D$	只有高個子唱歌或只有高個子跳舞 $\Rightarrow$ 只有高個子又唱歌又跳舞

$A \cap (C \cap D) \neq \emptyset \Rightarrow (A \cap C) \neq \emptyset \wedge (A \cap D) \neq \emptyset$	有高個子又唱歌又跳舞 $\Rightarrow$ 有高個子唱歌和有高個子跳舞
---	--

請注意若論域只包含一個個體，上表中的蘊涵式將全部變成等值式。

9. 焦點結構

9.1 引言

三分結構的框架亦可用於對焦點結構的分析。根據李寶倫、潘海華、徐烈炯(2003)，自然語言中有多種「焦點敏感算子」(focus sensitive operator)，本文限於篇幅，只打算簡略討論兩種「焦點敏感算子」：否定詞和「只」以及它們與 GQ 的複合。在以下討論中，筆者將採用蔡維天(2003)的處理方法，把焦點結構的三分結構式定為「算子(焦點)(背景)」⁴³。為清晰顯示例句的焦點，筆者用[]_F 把焦點括出。

9.2 焦點否定

否定是一種常見的焦點結構。根據否定詞所處的不同位置以及個別否定詞的語義，否定域可以各有不同。前文曾介紹各種否定詞的否定域，那是就一般情況而言的。除此以外，否定域還可以有多種變化，本小節將探討這個問題。

前文提過，「並非」、「不」等謂詞／句子否定詞通常用來進行「算子否定」，但在某些特殊語境中，它們也會用於「焦點否定」。在這種情況下，否定域只包含被否定的焦點。例如在語句「不是每個會員喜愛一樣[運動]_F(而是每個會員喜愛一樣文娛活動)」中，「不是」雖然位於句首，但由於這句以「運動」作為焦點(在口語上表現為重音，在書面語上表現為上述的對比結構)，所以否定域只包含這個名詞。「不是」在這裡相當於一個名詞否定詞。

除了名詞外，否定焦點還可以有多種語義成分，包括時間、空間、原因、方式、數量、謂詞等等。例如在語句「John 不是因為[生病或年老]_F而離職」中，否定焦點是原因「生病或年老」。接下來的問題是如何用三分結構表達這句。為了使本文表達三分結構的方式能夠前後一致，這裡把焦點否定詞表達為「~有」(相當於蔣嚴、潘海華(2005)第 336 頁的算子 NO)，並把上述語句的背景和焦點表達為集合。由於本句的焦點是原因，本句涉及「原因論域」的概念，其三分結構為

$$(F24) \quad \sim \text{有}(\{r_{\text{sick}}, r_{\text{old}}\})(\{r \in R: \text{FOR}(r, \text{QUIT}(j))\})$$

這裡 r_{sick} 、 r_{old} 是「原因論域」中的兩個元素， R 代表「原因論域」， $\text{FOR}(r, \text{QUIT}(j))$ 代表 John 為了原因 r 而離職。由於 $\sim \text{有}(A)(B)$ 的定義是 $A \cap B = \emptyset$ ，上式的意思

⁴³ 當今語義學界習慣把焦點結構的三分結構式定為「算子(背景)(焦點)」，跟本文不同。但由於在量化結構 $Q(A)(B)$ 中，量化的焦點是 A 而非 B ，筆者認為上述形式將使焦點結構與量化結構的三分結構式不一致，因此筆者寧可放棄語義學界習用的形式，而採用蔡維天(2003)的形式。

就是「John 離職的原因與生病、年老不相干」，這正是原句的意思。

另外，根據「單調推理原理」，由於「 $\sim$ 有」是算子否定，其後兩個論元都呈遞減性。因此應有以下推理：

(S53) John 不是因為[生病或年老]_F而離職 $\Rightarrow$ John 不是因為[生病]_F而離職

這是完全正確的推理，由此可見三分結構的確能有效運用於焦點否定。

9.3 含有「只」的焦點結構

用於焦點結構的「只」與 GQ「只有」具有非常相似的形式。筆者認為，「只」與「只有」應具有相同的邏輯意義，即體現為集合論上的「 $\supseteq$ 」關係。不過，除了邏輯意義外，用於焦點結構的「只」還有語用意義。根據蔡維天(2003)，「只」的邏輯意義和語用意義分別體現為其「斷言」和「預設」，因此這類結構的集合論表達式也應包含兩部分。舉例說，語句「John 只是[借]_F了《西遊記》」的「預設」和「斷言」分別為「John 借了《西遊記》」和「John 沒有對《西遊記》做「借」以外的事」。請注意這句的「斷言」的實質意思是「John 對《西遊記》所做的事最多只包括借了它」，單憑這個「斷言」並不保證 John 確實借了《西遊記》。只有把上述「預設」和「斷言」加在一起，才得到上句的完整意義。由於本句的焦點是謂詞「借」，本句涉及「謂詞論域」的概念，其集合論表達式為

$$(F25) \quad \{P_{\text{borrow}}\} \cap \{P \in \text{PRED}: P(j, x)\} \neq \emptyset \wedge \\ \{P_{\text{borrow}}\} \supseteq \{P \in \text{PRED}: P(j, x)\}$$

在上式中， P_{borrow} 是「謂詞論域」中的元素，PRED 代表「謂詞論域」， $P(j, x)$ 中的 P 則是二元謂詞變項，代表 John (j) 與《西遊記》(x) 之間的任何一種關係。上式其實等同於 $\{P \in \text{PRED}: P(j, x)\} = \{P_{\text{borrow}}\}$ ，其意思就是「John 與《西遊記》之間的唯一關係就是前者借了後者」，這正是原句的意思。

9.4 「只有 n 個」與「不只 n 個」

最後，讓我們研究「只有 n 個」和「不只 n 個」的語義問題。這裡的問題是「只有 n 個」含有「 $= n$ 」的意思，但作為其否定形式的「不只 n 個」的意思卻是「 $> n$ 」，而非「 $\neq n$ 」。以下筆者運用對「只」的分析來解釋上述這種語義不對稱現象。

在日常語言中，當人們說「 n 個 A 是 B」時，他們只著眼於那「 n 個 A」的

情況，對 A 中的其他成員是否也具有性質 B 並無說明，並不排除其他成員也是 B 的可能性，因此「n 個」在「無標記」的情況下具有「至少 n 個」的意思，即代表一個無窮集 $\{n, n+1, \dots\}$ 。但在「有標記」情況下，例如在「n 個」前加上「全部」、「只有」或「剛好」時，所表達的數量便成了單一的數 n。以下筆者僅就「只有 $[n]_F$ 個」作出討論⁴⁴。

現在我們分析「只有 $[n]_F$ 個 A 是 B」的「預設」和「斷言」。這句的「預設」是「有 n 個 A 是 B」，根據上段的討論，這裡的「n 個」實質應為「至少 n 個」。至於這句的「斷言」，根據 9.3 節的討論，這類焦點結構的「斷言」都含有某種否定或「最多」的意思，因此這句的「斷言」應為「最多只有 n 個 A 是 B」。把上述「預設」和「斷言」加起來，便得到上句的完整意義。由於本句的焦點是數目 n，本句涉及「數量論域」的概念，其集合論表達式為：

$$(F26) \quad \{n, n+1, \dots\} \cap \{|A \cap B|\} \neq \emptyset \wedge \{0, 1, \dots, n\} \supseteq \{|A \cap B|\}$$

上式前半部分實質上等同於 $|A \cap B| \geq n$ ，後半部則等同於 $|A \cap B| \leq n$ ，兩部分結合就是 $|A \cap B| = n$ ，因此「只有 $[n]_F$ 個 A 是 B」就等同於「剛好 n 個 A 是 B」，這符合我們對這一語句的理解⁴⁵。

接著讓我們討論「不只 n 個」的意思。筆者認為，這正是 Krifka (1991) 研究的「多重焦點結構」(multiple focus construction) 的第五類型，其中「只」既以「n」作為其焦點，本身又是「不」的焦點。因此「不只 n 個 A 是 B」的焦點結構應為「不 $_1$ [只 $_2$] $[n]_{F1}$ 個 A 是 B」，這裡用下標表示算子與其焦點的關係。根據以上焦點結構，「不」的否定域僅包括「只」，因此其作用只是把「只」的定義 $\supseteq$ 變成其否定 $\sim \supseteq$ ，而這句的「預設」跟其肯定式完全相同。這樣只要對 (F26) 的後半部略作修改，便可表達「不只 n 個 A 是 B」的意思：

$$(F27) \quad \{n, n+1, \dots\} \cap \{|A \cap B|\} \neq \emptyset \wedge \{0, 1, \dots, n\} \sim \supseteq \{|A \cap B|\}$$

把上式前後兩部分化簡，使得 $|A \cap B| \geq n \wedge |A \cap B| \sim \leq n$ ，合起來就是 $|A \cap B| > n$ ，由此得「不只 n 個 A 是 B」的意思就是「多於 n 個 A 是 B」。總上所述，由於「不只」作用於「只有 n 個」的「斷言」而沒有作用於其「預設」，因而造成「只有 n 個」與「不只 n 個」在語義上的不對稱。

⁴⁴ 其實「只有」在與數詞連用時會出現焦點歧義的問題，即「只有 n 個 A 是 B」可能含有「只有 $[n]_F$ 個 A 是 B」和「只有 $[n]_F$ 個 A 是 B」這兩種意思。限於篇幅，本文只討論上述第二種情況。

⁴⁵ 至此我們可以把含有「只」的焦點結構的語義概括為「有且只有」，而「只有 n 個」則可進一步概括為「至少並且最多 n 個」，即「剛好 n 個」。

10. 結論

本文用數學語言和「三分結構」統一表述多種論域下的「量化結構」，除了涵蓋邏輯學已有研究的「個體論域」、「時間論域」、「可能世界論域」外，還發掘了一些新的領域，如「相關詞論域」、「模糊程度」、「比較結構」等。

本文對傳統邏輯和當代 GQT 的兩大課題「對當關係」和「單調性」作了深入研究，並以數學方法推導出兩大成果：「對當方陣一般模式」和「單調推理原理」。「對當方陣一般模式」揭示了「對當方陣」背後的原理，不僅能統一解釋歷來各種「對當方陣」的同一性，而且還開拓了廣闊的空間。利用「對當方陣一般模式」，我們可以發掘自然語言中很多前人未曾發現的「對當關係」。此外，「對當方陣一般模式」亦揭示了「對當關係推理」與「單調推理」之間的關係，達致了兩者的統一。

「單調推理原理」總結了各種算子的左、右單調性，並揭示了否定對單調性的影響。與「多式量詞」結合起來後，「單調推理原理」更能發揮巨大的威力。對於一般人來說，如要解決包含多個量詞和多重否定的句子的單調推理問題，常常需要經過一番苦思或甚至半途而廢，但利用「單調推理原理」，這些問題卻能迎刃而解。由此可見，「單調推理原理」具有像數學定理那樣的「可操作性」(operability)和「可預測性」(predictability)。

本文亦討論了某些語言疑難和理論問題，揭示了鮮有人提及的「和-或錯位現象」和「邏輯-集合論不對應現象」。一般人都認為邏輯學上的「 $\vee$ 」與「 $\wedge$ 」、集合論上的「 $\cup$ 」與「 $\cap$ 」以及自然語言(就漢語而言)中的「或」與「和」具有以下兩組對應關係：「 $\cup$ - $\vee$ -或」以及「 $\cap$ - $\wedge$ -和」。本文對此作了分析，並討論了上述三者之間的微妙關係。

最後，本文揭示了集合論語言和「三分結構」亦可應用於對某些「焦點結構」的解釋。由於「焦點」是一個語用層面的概念(根據徐傑(2001))，本文揭示了把形式化方法應用於某些語用概念的可行性。

不過，限於篇幅和研究範圍，本文並未觸及某些問題。筆者認為，未來的研究方向至少可包括以下七個方面：

- (1) 除了 GQT 外，當今語言學界還有其他與量化問題有關的理論框架，例如 Kay (1997)的「構式語法」(construction grammar)下的「梯級模型」(scalar model)、Carpenter (1997)的「類型-邏輯語義學」(type-logical semantics)中的眾多量化算子和「動態語義學」(dynamic semantics)中有關廣義量詞的理論。而 Brown (1984)和 Keenan (2003)所提出的「新型」對當關係則是對古典對當關係的重

要發展。限於篇幅，本文無法對這些理論框架作出評述。但筆者認為，應可從它們借鑑很多有用的東西。

- (2) 本文對傳統邏輯的對當關係、結構變換和三段論都作了不同程度的推廣。但如前所述，Peterson (2000)和高東平(2006)在這方面都作了有益的工作，本文無法詳細評述他們的成果，但筆者認為，應可借鑑他們的成果，並可嘗試把他們的某些成果與本文的理論框架加以結合。
- (3) 本文其實一直迴避表示「任指」的 GQ「任何」，因為「任何」既是一個「自由選項詞」(free choice item)，也是一個「極性敏感詞」polarity sensitive item)，其邏輯語義頗為複雜。但筆者認為，一套關於量化結構的完整理論應包括有關「任何」(乃至其他涉及量化的「自由選項詞」和「極性敏感詞」)的理論。
- (4) 當句子中出現多個算子，尤其是來自不同論域的算子(例如「必然」算子與全稱量詞共現)時，便會出現如何界定「轄域」和「轄域歧義」的問題。這類問題還有待研究。
- (5) 本文主要研究簡單算子的單調推理，對於結構複雜的算子，只研究了「迭代量詞」一種。但根據當前 GQT 的研究，尚有各種「概括量詞」(resumptive quantifier)、「累指量詞」(cumulative quantifier)、「分枝量詞」(branching quantifier)、「相互量詞」(reciprocal quantifier)、「結構化量詞」等。此外，某些「比較結構」、「部分格結構」、「所有格結構」(possessive construction)、「除...外結構」(exceptive construction)等也包含多個算子。能否把本文的理論推廣到這些複雜算子？
- (6) 前文已指出「和-或錯位現象」是一個頗為複雜和微妙的問題，這種現象在不同句式(例如否定句、疑問句)中是否有不同的表現？在其他語言中是否也有類似情況？本文對此只作了初步探討，還有待深入研究。
- (7) 本文討論的內容僅限於陳述句，但根據新興的「疑問句邏輯」，似乎也能定義疑問句之間的推理關係。可是應如何用集合論定義疑問句？如何定義疑問句之間的「單調推理」？

儘管尚有上述這些問題，但筆者深信，本文的討論已揭示了傳統邏輯與當代 GQT 的深刻聯繫。透過這種聯繫，我們應可把「廣義量詞理論」進一步推廣為「廣義量化理論」。

參考文獻

- 蔡維天(2003),《談「只」與「連」的形式語義》, [www.ling.nthu.edu.tw/faculty/wttsai/papers/Chinese/Tan_zhi_yu_lian_de_xingshi_yuyi_Tsai\(2003\).pdf](http://www.ling.nthu.edu.tw/faculty/wttsai/papers/Chinese/Tan_zhi_yu_lian_de_xingshi_yuyi_Tsai(2003).pdf)
- 陳宗明(1993),《漢語邏輯概論》,北京:人民出版社
- 方立(2000),《邏輯語義學》,北京:北京語言文化大學出版社
- 蔣嚴(2004), *On What is Less Certain: The Probability Scale and Hypothetical Meaning*, http://www.cbs.polyu.edu.hk/ctyjiang/file/notes_new/3479/8.htm
- 蔣嚴、潘海華(2005),《形式語義學引論》,北京:中國社會科學出版社
- 高東平(2006),《帶模糊量詞的性質命題推理》,《邏輯與認知》, Vol. 4, No. 1, 2006
- 李寶倫、潘海華、徐烈炯(2003),《對焦點敏感的結構及焦點的語義解釋》, <http://ctlhpan.cityu.edu.hk/haihuapan/paper/focus-review-chinese.doc>
- 劉偉(2002),《廣義量詞理論中的單調性研究》,《外語學刊》2002年第1期
- 石毓智(2001),《肯定和否定的對稱與不對稱》,北京:北京語言文化大學出版社
- 魏原樞、徐文琪(1986),《世界語語法》,上海:上海外語教育出版社
- 徐傑(2001),《普遍語法原則與漢語語法現象》,北京:北京大學出版社
- 徐頌列(1998),《現代漢語總括表達式研究》,杭州:浙江教育出版社
- 楊綸標、高英儀(2001),《模糊數學—原理及應用》,廣州:華南理工大學出版社
- 張海澎(2004),《分析邏輯—理性思維的基石》,香港:青年書屋
- 張喬(1998),《模糊語義學》,北京:中國社會科學出版社
- 鄭君文、張恩華(1995),《數學邏輯學概論》,合肥:安徽教育出版社
- 周禮全(1994),《邏輯—正確思維和有效交際的理論》,北京:人民出版社
- 朱志凱(1989),《新編邏輯教程》,上海:復旦大學出版社
- 鄒崇理(2000),《自然語言邏輯研究》,北京:北京大學出版社
- 鄒崇理(2002),《邏輯、語言和信息》,北京:人民出版社
- Barwise, J. & Cooper, R. (1981), *Generalized Quantifiers and Natural Language*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. II, London: Routledge
- Beghelli, F. (1994), *Structured Quantifiers*, Dynamics, Polarity and Quantification, Stanford: CSLI Publications
- Brown, M. (1984), *Generalized Quantifiers and the Square of Opposition*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. 25, No. 4 (1984)
- Cann, R. (1993), *Formal Semantics*, Cambridge: Cambridge University Press
- Carlson, G. (1977), *A Unified Analysis of the English Bare Plural*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. III, London: Routledge
- Carpenter, B. (1997), *Type-Logical Semantics*, Cambridge: MIT Press
- Cresswell, M.J. (1976), *The Semantics of Degree*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. V, London: Routledge
- De Mey, S. (1996), *Generalized Quantifier Theory and the Semantics of Focus*,

- Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. VI, London: Routledge
- De Swart, H. (1996), *Quantification over Time*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. IV, London: Routledge
- Heim, I.R. & Kratzer, A. (1998), *Semantics in Generative Grammar*, Malden: Blackwell Publishers Inc
- Hoeksema, J. (1986), *Monotonicity Phenomena in Natural Language*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. V, London: Routledge
- Kay, P. (1997), *Words and the Grammar of Context*, Stanford: CSLI Publications
- Keenan, E.L. (1989), *Semantic Case Theory*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. II, London: Routledge
- Keenan, E.L. (2001), *Some Properties of Natural Language Quantifiers*, <http://www.linguistics.ucla.edu/people/keenán/properties.pdf>
- Keenan, E.L. (2003), *Excursions in Natural Logic*, <http://www.linguistics.ucla.edu/people/keenán/papers/KeenanExcursionsInNaturalLogic.pdf>
- Keenan, E.L. & Westerstahl, D. (1993), *Generalized Quantifiers in Linguistics and Logic*, Handbook of Logic and Language, Elsevier Science
- Krifka, M. (1991), *A Compositional Semantics for Multiple Focus Constructions*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. VI, London: Routledge
- Langacker, R.W. (1991), *Foundations of Cognitive Grammar – Volume II: Descriptive Application*, (Stanford) Stanford University Press
- McCawley, J.D. (1993), *Everything that Linguists have Always Wanted to Know about Logic – but were ashamed to ask*, (Chicago) The University of Chicago Press
- Montague, R. (1970), *The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. I, London: Routledge
- Parsons, T. (1999), *The Traditional Square of Opposition*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, <http://plato.stanford.edu/entries/square/>
- Peterson, P.L. (2000), *Intermediate Quantifiers – Logic, linguistics, and Aristotelian semantics*, Aldershot: Ashgate Publishing Limited
- Scha, R. (1981), *Distributive, Collective and Cumulative Quantification*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. III, London: Routledge
- Van Benthem, J. (1983), *Determiners and Logic*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. II, London: Routledge
- Vendler, Z. (1970), *Each and Every, Any and All*, Linguistics in Philosophy, Corne;; University Press, 陳嘉映譯(2002), 北京：華夏出版社
- Westerstahl D. (1984), *Determiners and Context Sets*, Semantics – Critical Concepts in Linguistics, Vol. II, London: Routledge
- Westerstahl D. (2005), *Generalized Quantifiers*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, <http://plato.stanford.edu/entries/generalized-quantifiers/index.html>

附錄 1：對當方陣總覽

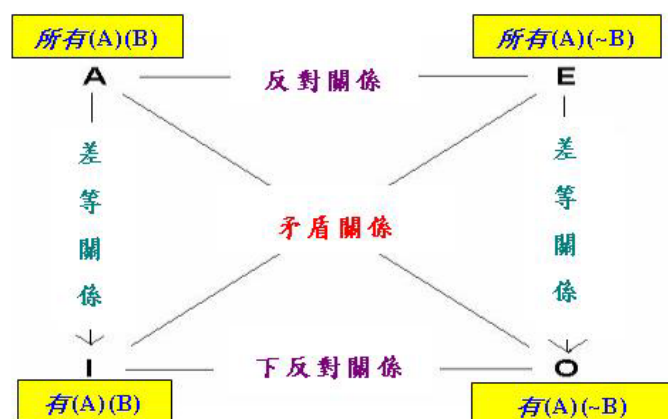


圖 1

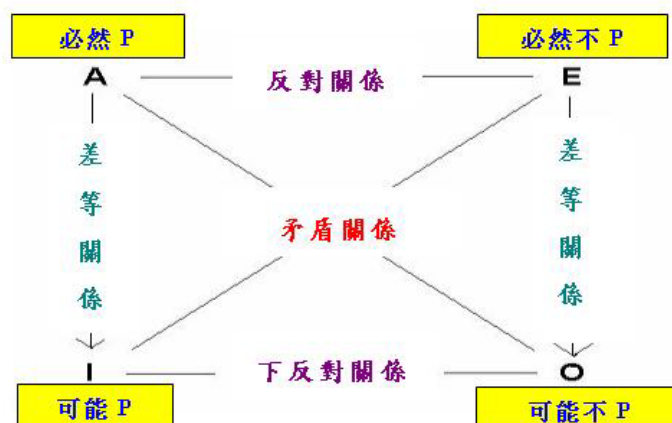


圖 2

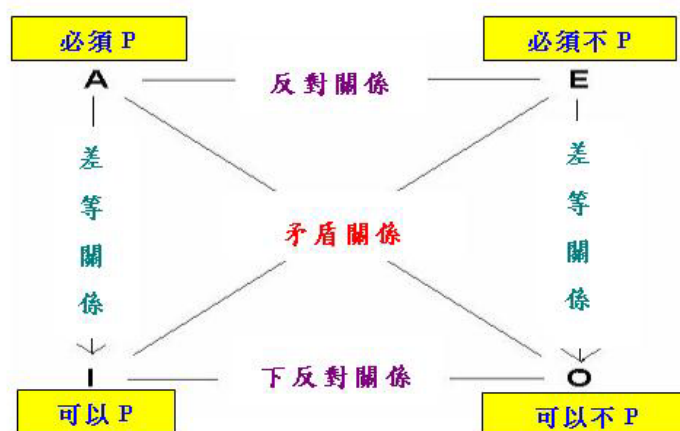


圖 3

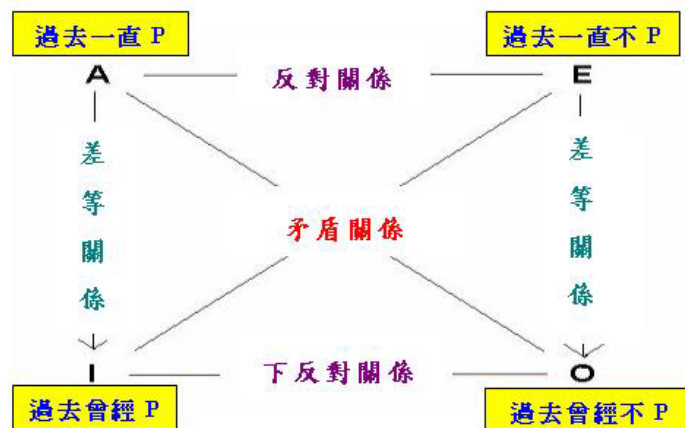


圖 4

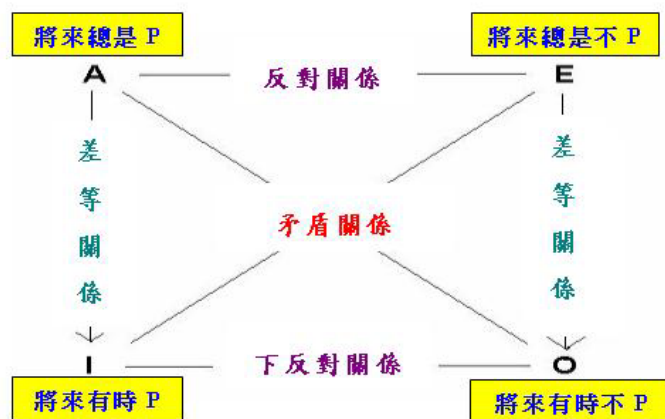


圖 5

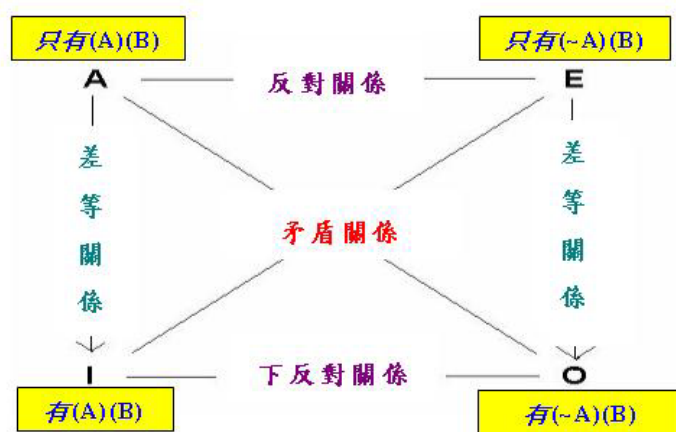


圖 6

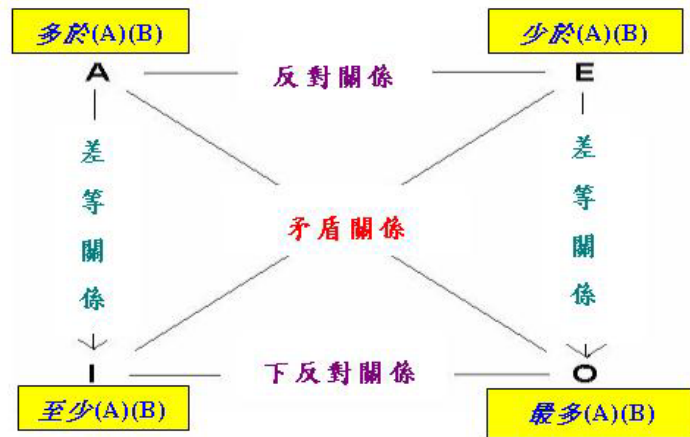


圖 7

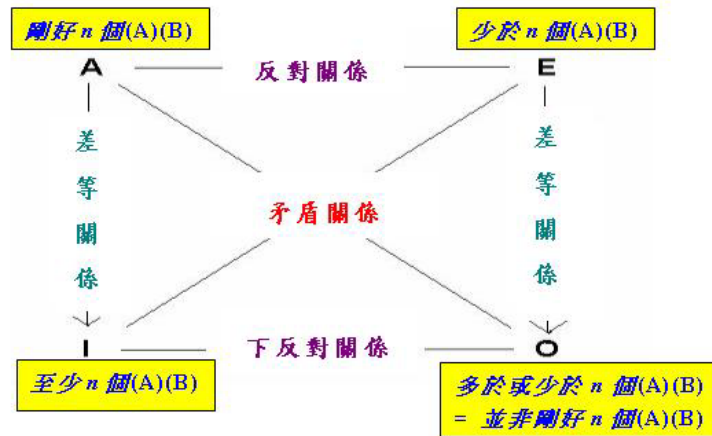


圖 8

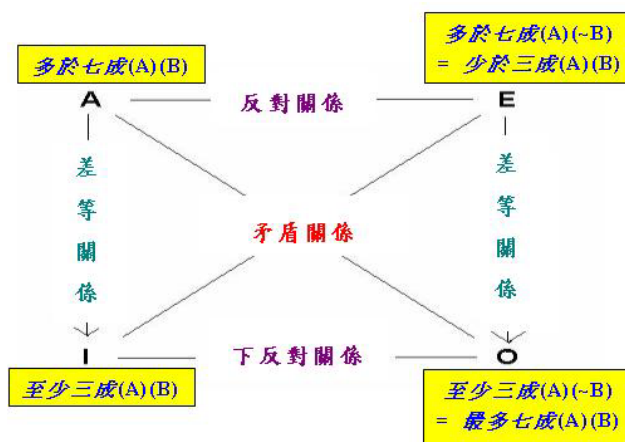


圖 9

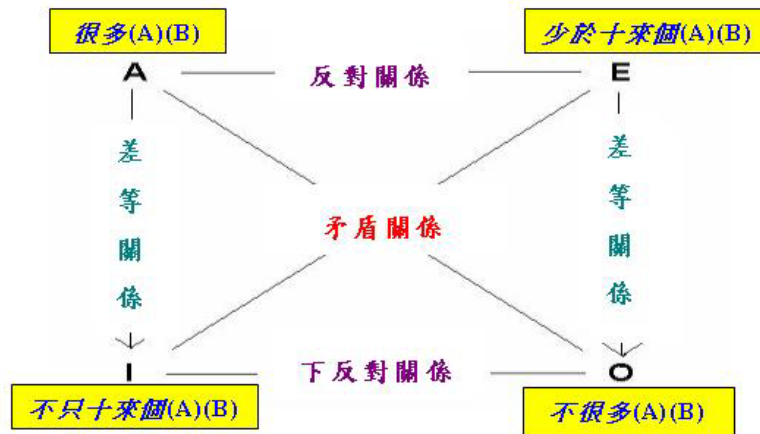


圖 10

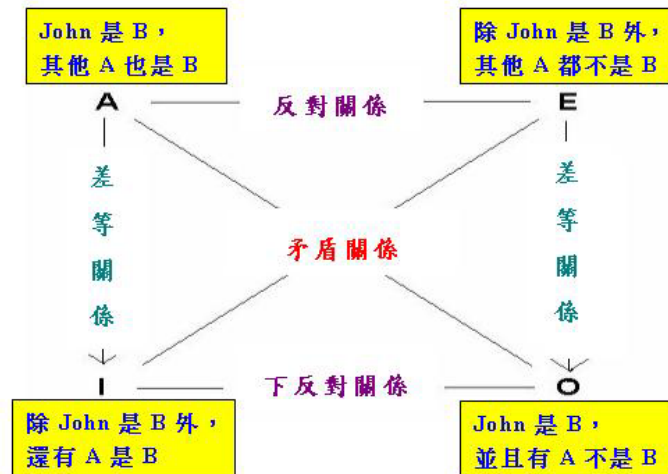


圖 11

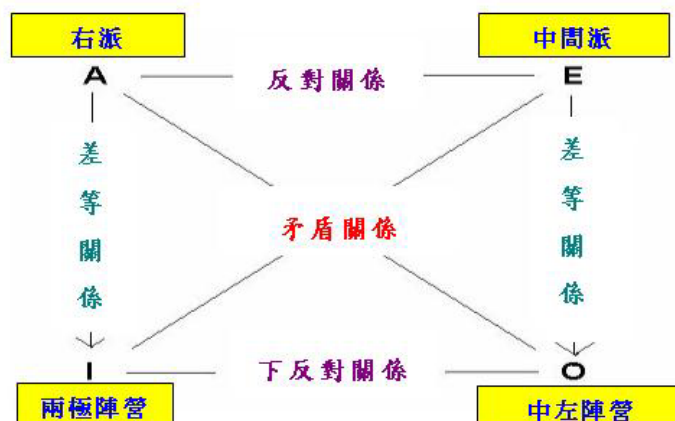


圖 12

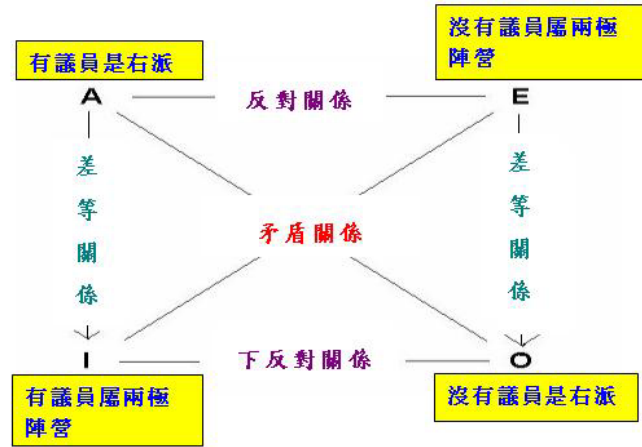


圖 13

附錄 2：某些廣義量詞的集合論定義

三分結構式	集合論定義
所有(A)(B)	$A \subseteq B$
有(A)(B)	$A \cap B \neq \emptyset$
沒有(A)(B)	$A \cap B = \emptyset$
只有(A)(B)	$A \supseteq B$
有些(A)(B)	$ A \cap B > 1$
至少(多於) n 個(A)(B)	$ A \cap B \geq (>) n$
最多(少於) n 個(A)(B)	$ A \cap B \leq (<) n$
除了最多 n 個外，所有(A)(B)	$ A - B \leq n$
有限個(A)(B)	$ A \cap B < \aleph_0^{46}$
無限個(A)(B)	$ A \cap B \geq \aleph_0$
剛好 n 個(A)(B)	$ A \cap B = n$
除了 n 個外，所有(A)(B)	$ A - B = n$
m 至 n 個(A)(B)	$m \leq A \cap B \leq n$
多於 m 個但少於 n 個(A)(B)	$m < A \cap B < n$
偶數個(A)(B)	$ A \cap B = 2N$ (N 為任意正整數)
奇數個(A)(B)	$ A \cap B = 2N - 1$ (N 為任意正整數)
多數(A)(B)	$ A \cap B > A - B $ 或 $ A \cap B / A > 0.5$
少數(A)(B)	$ A \cap B < A - B $ 或 $ A \cap B / A < 0.5$
至少(多於) q (A)(B) (q 為分數)	$ A \cap B / A \geq (>) q$
最多(少於) q (A)(B) (q 為分數)	$ A \cap B / A \leq (<) q$
除了最多 q 外，所有(A)(B) (q 為分數)	$ A - B / A \leq q$
剛好 q (A)(B) (q 為分數)	$ A \cap B / A = q$
除了 q 外，所有(A)(B) (q 為分數)	$ A - B / A = q$
除了 John 外，沒有(A)(B)	$A \cap B = \{j\}$
除了 John 外，所有(A)(B)	$A - B = \{j\}$
the (A)(B) (A 為單數)	$X \cap A \subseteq B$, if $ X \cap A = 1^{47}$
the n (A)(B) (A 為複數)	$X \cap A \subseteq B$, if $ X \cap A = n$

⁴⁶ 在數學上， $\aleph_0$ 代表最小的「超窮基數」(transfinite cardinal number)，即「可數無窮集」(countably infinite set)的基數。另請注意，這裡的「<」以及下一行的「≥」並非實數之間的大小關係，而是集合基數之間的一種「序關係」。

⁴⁷ 這裡 X 為「語境集」(context set)，詳見 6.7 小節的討論。

附錄 3：本文定理的證明

定理 1： $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

證明：爲證明等式 $A \cap B = A$ ，我們須證明兩個包含關係： $A \cap B \subseteq A$ 和 $A \subseteq A \cap B$ 。先證前者。任取論域中某元素 $x \in A \cap B$ ，則 $x \in A \wedge x \in B$ ，因此得 $x \in A$ 。根據集合論中包含關係的定義，得 $A \cap B \subseteq A$ 。接著任取元素 $x \in A$ ，由於 $A \subseteq B$ ，我們得 $x \in B$ ，因此 $x \in A \cap B$ 。由此我們得 $A \subseteq A \cap B$ 。結合上述兩部分證明，定理得證。

定理 2： (1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \sim B = \emptyset$

(2) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap \sim B \neq \emptyset$

(3) $A \subseteq \sim B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

(4) $A \not\subseteq \sim B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

證明：

(1) 先證 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap \sim B = \emptyset$ 。任取 $x \in A$ ，則有 $x \in B$ ，即若 $x \in A$ ，則 $x \notin \sim B$ 。因此 $A \cap \sim B = \emptyset$ 。其次用反證法來證明 $A \cap \sim B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$ 。假設結論不成立，即 $A \not\subseteq B$ ，則存在 $x \in A$ ，但 $x \notin B$ ，即 $x \in A \wedge x \in \sim B$ 。這與 $A \cap \sim B = \emptyset$ 相矛盾。結合上述兩部分證明，定理得證。

(2) 由於(1)是等價關係，否定前件即同時否定後件，反之亦然。故定理得證。

(3)和(4) 把(1)和(2)中的 B 換成 $\sim B$ 並運用「雙重否定律」($\sim \sim B = B$)，定理得證。

定理 3： $A \subseteq (\subset) B \Leftrightarrow \sim B \subseteq (\subset) \sim A$

證明：假設 $A \subseteq B$ ，則對所有 x 而言， $x \in A \Rightarrow x \in B$ 。對以上蘊涵式應用「假言易位律」，得 $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ ，即 $\sim B \subseteq \sim A$ 。現再假設 $A \subset B$ ，即 $A \subseteq B \wedge A \neq B$ ，則從 $A \subseteq B$ 先推得 $\sim B \subseteq \sim A$ ，再從 $A \neq B$ 推得 $\sim B \neq \sim A$ ，結合以上兩個結果，便得 $\sim B \subset \sim A$ 。

定理 4： 設 P 、 Q 爲真值函項。若 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ，則 $\{x: P(x)\} \subseteq \{x: Q(x)\}$

說明：根據函項與集合的對應關係， $P(x)$ 和 $Q(x)$ 亦可寫爲 $x \in P$ 和 $x \in Q$ 。爲行文方便，本文有時會用 P 代表 $\{x: x \in P\}$ 。這樣本定理又可表述爲：若 $x \in P \Rightarrow x \in Q$ ，則 $P \subseteq Q$ 。

證明：任取 $a \in \{x: P(x)\}$ ，則 $P(a)$ 。根據給定條件，得 $Q(a)$ ，因此 $a \in \{x: Q(x)\}$ 。由於 a 是任意的，根據集合包含關係的定義，得 $\{x: P(x)\} \subseteq \{x: Q(x)\}$ 。

定理 5： 假設 $A \subseteq B$ 或 $A \subset B$ ，則對任何集合 C 而言，

$$(1) C \cap A \neq \emptyset \Rightarrow C \cap B \neq \emptyset$$

$$(2) C \cap B = \emptyset \Rightarrow C \cap A = \emptyset$$

證明：

- (1) 根據 $C \cap A \neq \emptyset$ ，有元素 $x \in C \wedge x \in A$ 。由 $A \subseteq B$ 或 $A \subset B$ 均可推得， $x \in C \wedge x \in B$ 。故得 $C \cap B \neq \emptyset$ 。
 (2) 對(1)應用「假言易位律」即可證得。

定理 6： 假設 $A \subseteq B$ 或 $A \subset B$ ，則對任何集合 C 而言，

$$(1) |C \cap A| \leq |C \cap B|$$

$$(2) |C \cap A| \geq (>) n \Rightarrow |C \cap B| \geq (>) n$$

證明：

- (1) 先設 $|C \cap A| = 0$ ，則由於對任何集合 X 而言， $|X| \geq 0$ ，故得 $|C \cap B| \geq |C \cap A|$ 。
 再設 $|C \cap A| = n > 0$ ，則有 n 個元素 $x \in C \wedge x \in A$ 。由 $A \subseteq B$ 或 $A \subset B$ 均可推得，對這 n 個 x 而言， $x \in C \wedge x \in B$ 。故得 $|C \cap B| \geq n$ ，即 $|C \cap B| \geq |C \cap A|$ 。
 (2) 設 $|C \cap A| \geq n$ ，那麼根據(1)， $|C \cap B| \geq n$ 。把前面的 $\geq$ 換成 $>$ ，即可得本定理的另一種形式。

定理 7： $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

證明： $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \vee q) \wedge \sim r = F$ ($\Rightarrow$ 的定義， F 代表假)

$$\equiv (p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r) = F \quad (\text{分配律})$$

$$\equiv (p \wedge \sim r) = F \wedge (q \wedge \sim r) = F \quad (\vee \text{ 的定義})$$

$$\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \quad (\Rightarrow \text{ 的定義})$$

定理 8： $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

證明： 先證 $A = \emptyset \wedge B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = \emptyset$ 。設 $A = \emptyset \wedge B = \emptyset$ ，則 $A \cup B = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ 。其次用反證法來證明 $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$ 。假設結論不成立，即 $A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset$ 。不失一般性，設 $A \neq \emptyset$ ，則有 $x \in A$ 。故亦有 $x \in A \cup B$ ，則 $A \cup B \neq \emptyset$ ，這與 $A \cup B = \emptyset$ 矛盾。結合以上兩部分，定理得證。

定理 9： $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow (A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)$

證明： $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow (A \cup B) \cap \sim C = \emptyset$ (定理 2(1))

$$\Leftrightarrow (A \cap \sim C) \cup (B \cap \sim C) = \emptyset \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow (A \cap \sim C) = \emptyset \wedge (B \cap \sim C) = \emptyset \quad (\text{定理 8})$$

$$\Leftrightarrow (A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C) \quad (\text{定理 2(1)})$$

定理 10 : $p \wedge q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

證明 : $p \wedge q \Rightarrow r \equiv (p \wedge q) \wedge \sim r = F$ ($\Rightarrow$ 的定義)

$$\equiv (p \wedge q) \wedge (\sim r \wedge \sim r) = F \quad (\text{冪等律})$$

$$\equiv (p \wedge \sim r) \wedge (q \wedge \sim r) = F \quad (\text{交換律和結合律})$$

$$\equiv (p \wedge \sim r) = F \vee (q \wedge \sim r) = F \quad (\wedge \text{的定義})$$

$$\equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \quad (\Rightarrow \text{的定義})$$

定理 11 : $(A \subseteq C) \vee (B \subseteq C) \Rightarrow A \cap B \subseteq C$

證明 : $(A \subseteq C) \vee (B \subseteq C) \Leftrightarrow (A \cap \sim C) = \emptyset \vee (B \cap \sim C) = \emptyset$ (定理 2(1))

$$\Rightarrow (A \cap \sim C) \cap (B \cap \sim C) = \emptyset \quad (\text{支配律})$$

$$\Leftrightarrow (A \cap B) \cap (\sim C \cap \sim C) = \emptyset \quad (\text{交換律和結合律})$$

$$\Leftrightarrow (A \cap B) \cap \sim C = \emptyset \quad (\text{冪等律})$$

$$\Leftrightarrow A \cap B \subseteq C \quad (\text{定理 2(1)})$$