Unidad 4

Aplicaciones de la Derivada.

4.1. Función continua creciente y decreciente
4.2. Extremos relativos
4.3. Máximos y Mínimos
4.4. Trazo de gráficas y criterio de la primera derivada.
4.5. Trazo de gráficas y criterio de la segunda derivada.

Realizó: Prof: Enrique González Tapia

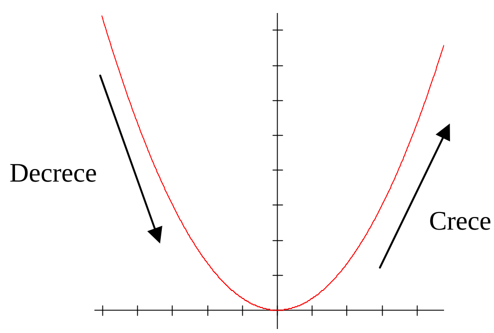
APLICACIONES DE LA DERIVADA.

4.1 función continua creciente y decreciente.

Por definición, una función continua es <u>creciente</u> si en un intervalo y si para todo par de números X_1 y X_2 en el intervalo, $X_1 < X_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.

Análogamente, una función *f(x)* es <u>decreciente</u> en un intervalo si para todo par de números X_1 y X_2 en el intervalo, $X_1 > X_2$

De esta definición vemos que *f(x)* es creciente si su gráfica asciende al desplazar x hacia la derecha; será decreciente si su gráfica desciende al desplazar x hacia la derecha. Ver gráfica 1.



Gráfica 1

> ***Teorema 1. Para funciones crecientes y decrecientes.***
> Sea f una función derivable en el intervalo (a,b).
>
> 1.- Si f´(x) > 0 para todo x dentro de (a,b), entonces f(x) es creciente en el intervalo (a,b).
> 2. Si f´(x) < 0 para todo x dentro de (a,b), entonces f(x) es creciente en el intervalo (a,b).
> 3. Si f´(x) = 0 para todo x dentro de (a,b), entonces f(x) es constante en el intervalo (a,b).

Para poder aplicar el teorema 1, es necesario encontrar los intervalos (a,b) donde *f(x)* crecer o decrecer. Para localizar dichos intervalos, se propone la siguiente estrategia.

1. Localizar los *****valores críticos de *f(x)* en (a,b), los cuales delimitan unos intervalos prueba.
2. Determinar el signo de *f´(x)* en un valor de x de cada uno de estos intervalos prueba.

3. Usé el teorema 1 para decidir si *f* es creciente o decreciente en cada uno de los intervalos encontrados.

valores críticos**: Si *f* está definido en ***c, se dirá que ***c*** es un valor crítico de f; si *f´(c)* = 0, o si *f´* no está definida en ***c*..**

ejemplo: Halle los intervalos abiertos en los que es creciente o decreciente la función

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

1. localizar todos los valores críticos, obtengamos la derivada de *f* e igualémosla a cero.

$$\begin{aligned} f^{´}(x) &= 3x^2 - 3x = 0 \\ &= 3\mathrm{x}(x-1) = 0 \\ x = 0; \quad x &= 1\} \text{ valores críticos} \end{aligned}$$

2. Por lo tanto, de lo anterior se desprende que los intervalos prueba son $(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$.

Ahora determinemos el valor de *f´(x)* para cualquier punto dentro de cada uno de los 3 intervalos.

Intervalo	**- ∞< x < 0**	**0 < x < 1**	**1 < x < ∞**
Valor de prueba	-1	½	2
Signo de f´(x)	f´(-1) = 6 > 0	f´(1/2) = -3/4 < 0	f´(2) = 6 > 0
Conclusión	**Creciente**	**Decreciente**	**Creciente**

Ejercicios:

4.1.1. Encuentre los valores críticos y determine los intervalos en los cuales las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

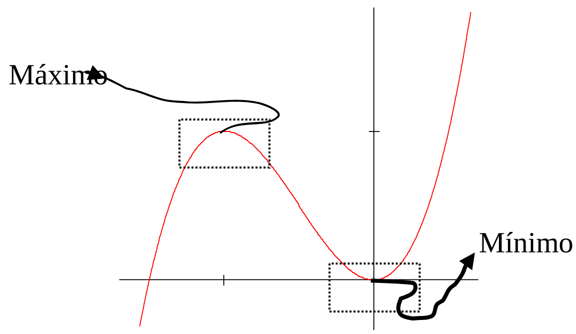
ii) $f(x) = 4z^3 + 5z^2 - 42z + 7$

iii) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$

iv) $f(x) = x^4 - 2x^2$

4.2. Extremos relativos.

Informalmente podemos pensar en un máximo relativo como una <*cima*> de la gráfica y en un mínimo relativo como un <*valle*>. Ver gráfica 2.



Gráfica 2

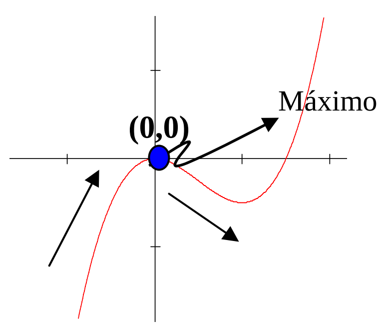
Por definición, los extremos relativos se presentan:

1. Si existe algún intervalo abierto en el que *f(c)* es el valor máximo, se dice que *f(c)* es un máximo relativo de *f*.
2. Si existe algún intervalo abierto en el que *f(c)* es el valor mínimo, se dice que *f(c)* es un mínimo relativo de *f*.

Si el máximo fue mínimo relativo es una curva suave y redondeada dicha curva tendrá una recta tangente con máximo un mínimo por lo tanto, se podrá derivar decidir por el contrario, si el máximo un mínimo es anguloso y complicó, la gráfica en este punto, no es diferenciable ya que no podemos trazar una tangente.

4.3. Máximos y mínimos.

Una vez que ya se determinaron los intervalos abiertos de crecimiento y decrecimiento, podemos determinar los extremos relativos con facilidad. Así por ejemplo en la figura 3, (0,0) es un máximo ya que antes este punto, el signo de la derivada es ***positivo***, esto indica que *f(x)* es creciente. De la misma forma, después del punto (0,0) el signo de la derivada es ***negativo***, por lo tanto la función es decreciente. Ver gráfica 3.



Gráfica 3

4.4. Trazo de gráficas y criterio de primera derivada.

Para localizar todos los máximos y mínimos relativos, utilizaremos el criterio de la primera derivada, el teorema dos.

Teorema 2. Criterio de primera derivada.

Sea c un valor crítico de una función f continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto quizá en c, f(c) puede clasificarse como:

1. Si *f ´* cambia de negativo a positivo en ***c***, *f(c)* es un mínimo relativo de *f*.
2. Si *f ´* cambia de positivo a negativo en ***c***, *f(c)* es un máximo relativo de *f*.
3. Si *f ´* no cambia de signo en ***c***, *f(c)* no es ni mínimo ni máximo relativo de *f*.

Ejemplo: Usando el teorema 2, hallar todos los máximos y mínimos relativos de la función.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 14$$

Solución: Primero derivamos la función y la igualamos a cero para encontrar los valores críticos (**x***).

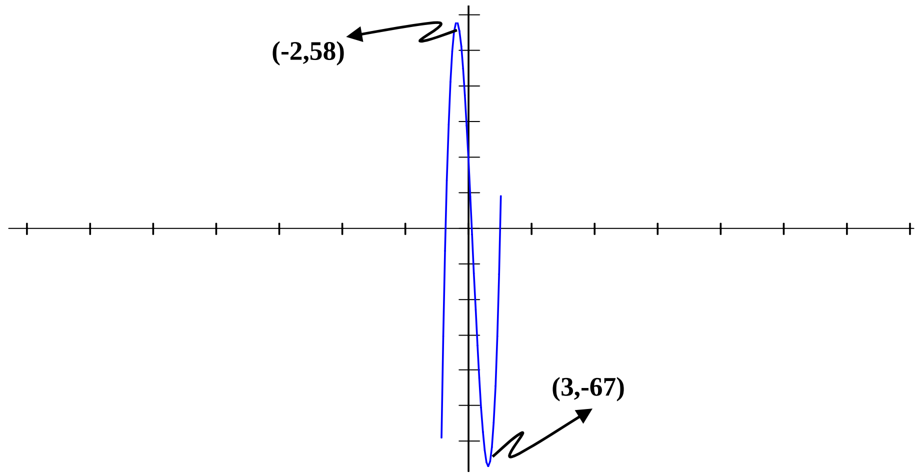
$$f`(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0$$
$$6(x^2 - x - 6) = 0$$
$$6(x-3)(x+2) = 0$$
$$x^* = -2, \quad y \quad 3$$

En la siguiente tabla resumimos los resultados de aplicar el teorema 2 a los valores críticos obtenidos.

Intervalo	**- ∞< x < -2**	**-2 < x < 3**	**3 < x < ∞**
Valor de prueba	X = -3	X = 0	X = 4
Signo de f´(x)	f´(-3) > 0	f´(0) < 0	f´(4) > 0
Comportamiento	**Crece**	**Decrece**	**Crece**

Conclusión: al pasar *f `* por -2, hay un cambio de signo de positivo a negativo, por lo tanto un ***máximo relativo.*** De igual manera observamos que al pasar por 3, *f `* cambia de signo de negativo a positivo, por lo tanto 3, es un ***mínimo relativo***.

Entonces, el máximo está en (-2,58) y el mínimo está en (-3,-67), ver gráfica 4.



Gráfica 4

Ejercicios:

4.3.1. Determine todos los puntos máximos o mínimos de las funciones siguientes.

i) $y = x^3$

ii) $y = x^2 - 4$

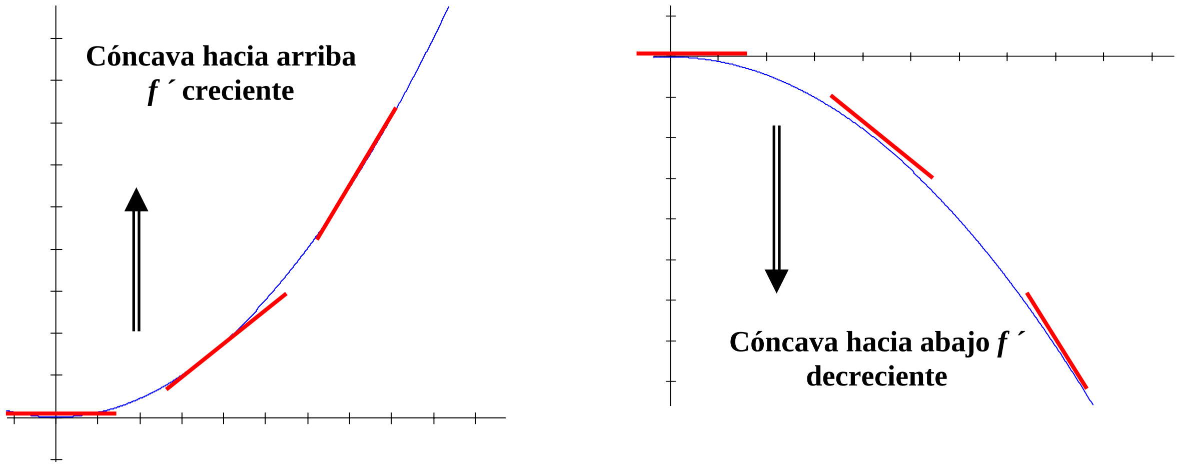
iii) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 50$

iv) $y = 4z^3 + 5z^2 - 42z + 7$

4.5. Concavidad y criterio de segunda derivada.

En esta sección hablaremos del fenómeno que ocurre cuando la función se curva hacia arriba o hacia abajo, este fenómeno lo llamaremos concavidad.

Concavidad: Sea *f* derivable en un intervalo abierto. Diremos que la gráfica de *f* es <u>cóncava hacia arriba</u> si *f ´* es creciente en ese intervalo y <u>cóncava hacia abajo</u> si *f ´* es decreciente en ese intervalo. Ver figura 5.



Gráfica 5

Cuando una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo, es algo que define el teorema 3.

Teorema 3. Criterio de la concavidad.
Sea *f* una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, la gráfica de *f* es cóncava hacia arriba.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo.

Ejemplo: determine los intervalos dónde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

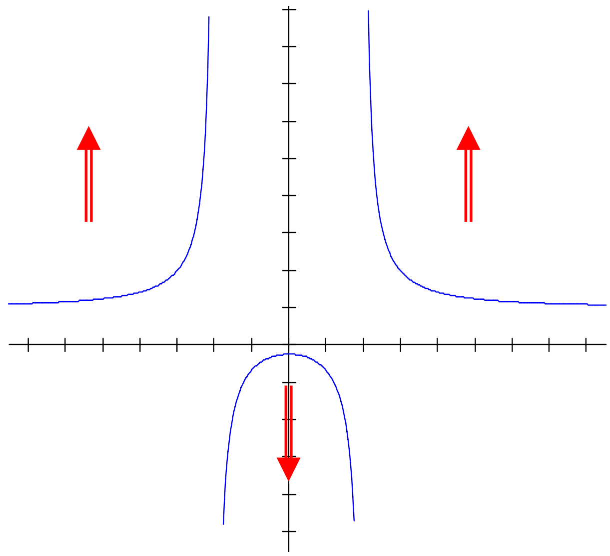
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \qquad f''(x) = \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

Resolviendo, no encontramos valores de **x** para los cuales $f''(x) = 0$, sin embargo en x = -2, la segunda derivada no está definida, por lo tanto x = 2 y -2 son puntos de discontinuidad; así que considerando estos puntos estableceremos nuestros intervalos de prueba. Dichos intervalos son $(-\infty,-2)$; $(-2,2)$; $(2, \infty)$. De la misma manera que lo hicimos en la sección 4.1, analizaremos dichos intervalos con el teorema 3.

Intervalo	**$-\infty < x < -2$**	**$-2 < x < 2$**	**$2 < x < \infty$**
Valor de prueba	X = -3	X = 0	X = 3
Signo de f´´(x)	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión por teorema 3.	**Cóncava hacia arriba**	**Cóncava hacia abajo**	**Cóncava hacia arriba**

El análisis anterior podemos verlo en la gráfica de la función. Ver gráfica 6.



Gráfica 6

4.3.2 Ejercicios: Determine los intervalos de concavidad de las funciones siguientes, así como la naturaleza de los mismos.

i) $y = x^2 - x - 2$

ii) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

iii) $y = -3x^5 + 5x^3$

iv) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Cuando en una gráfica de una función coexisten los dos tipos de concavidad, forzosamente tendrá que existir uno o más puntos de inflexión.

Puntos de inflexión:
Sea una función cuya gráfica tiene una recta tangente en el punto (c,f(c)); (derivable en ese punto). Se dice que el punto (c,f(c)) es un punto de inflexión si la concavidad de *f* cambia de ser hacia arriba a ser hacia abajo (o viceversa) en ese punto.

Como el punto de inflexión se da cuando la concavidad cambia de sentido, entonces, por el teorema 3, *f ´´(x)* debe también, cambiar de signo. De esta manera, podemos encontrar los puntos de inflexión por el teorema 4.

Teorema 4.puntos de inflexión.
Si *(c, f(c))* es un punto de inflexión de la gráfica de *f*, entonces o es **f´´(c) = 0** o **f´´** no está definida en **x = c**.

Ejemplo: encuentre el (los) punto(s) de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 4x^3$.

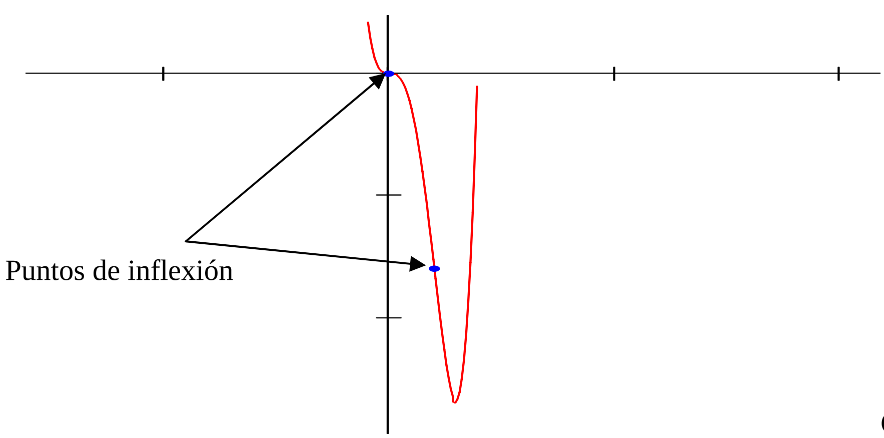
Solución: obtengamos la segunda derivada de f(x)

$$f''(x) = 12x^2 - 24x \qquad \text{hacemos } f''(x) = 0$$
$$= 12x(x-2) = 0$$

Resolviendo la ecuación obtenida, encontramos que los posibles puntos de inflexión son x = 0 y x = 2.
Para probar la naturaleza de estos 2 puntos, haremos un análisis similar al que se hicieron anteriormente.

Punto	**0**	**2**
Signo de f´´ antes de x^*	f´´(-1) > 0	f´´(1) < 0
Signo de f´´ después x^*	f´´(1) < 0	f´´(3) > 0
Conclusión por teorema 4.	**Cambio de signo de positivo a negativo**	**Cambio de signo de negativo a positivo**

Del análisis anterior, concluimos que **x = 0** es un punto de inflexión, ya que al pasar por este punto (antes y después), *f´´* cambia de signo. Análogamente **x = 2** es otro punto de inflexión, ya que al pasar por este punto, *f´´* cambia de signo. **Ver figura 7.**



Gráfica 7

En el desarrollo de estas tres secciones, hemos hablado de muchos conceptos, y manejado muchos teoremas. Resumamos todo esto en uno solo, el teorema de la segunda derivada que nos permitirá encontrar los intervalos de concavidad, los extremos relativos y puntos de inflexión.

Teorema 5. criterio de la segunda derivada.
Sea *f* una función tal que *f´(c) = 0* y tal que la segunda derivada de *f* existe en un intervalo abierto que contiene a *c*.

1. Si *f´´(c) > 0* entonces, f(c) es un mínimo relativo y la gráfica presentará concavidad hacia arriba.
2. Si *f´´(c) < 0* entonces, f(c) es un máximo relativo y la gráfica presentará concavidad hacia abajo.
3. Si *f´´(c) = 0* entonces, f(c) es un posible punto de inflexión (probar su naturaleza con el uso del teorema 4).

Ejemplo: para la función $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ determine los extremos relativos y su naturaleza, los intervalos de concavidad y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución: primero obtengamos *f´(x)* e igualemos a cero para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento (teorema 1).

Como la función es continua en todo su dominio, no hay puntos de discontinuidad.

$f´(x) = -15x^4 + 15x^2 = 0$

$-15x^2(x^2 - 1) = 0$

$x^* = 0$ Resolvemos y encontramos los valores críticos, y los intervalos.

$x^* = 1$

$x^* = -1$

Intervalo	**- ∞< x < -1**	**-1 < x < 0**	**0 < x < 1**	**1 < x < ∞**
Valor de prueba	-2	-1/2	1/2	2
Signo de f´(x)	f´(-2) = 180 > 0	f´(-1/2) = $45/4$ < 0	f´(1/2) = $45/4$ < 0	f´(2) = 180 > 0
Conclusión	**Decreciente**	**Creciente**	**Creciente**	**Decreciente**

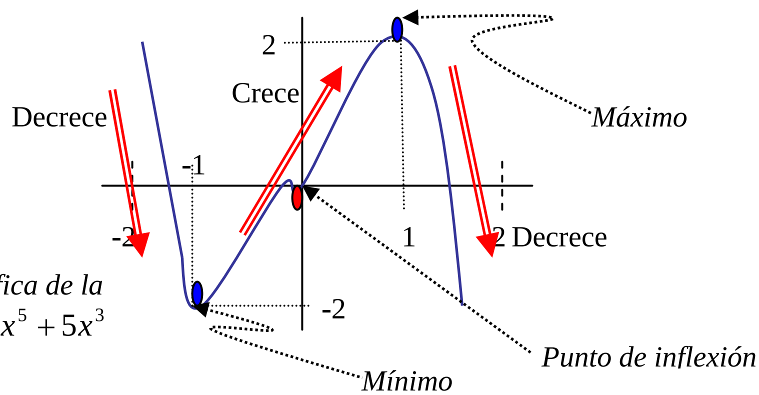
Ahora encontremos lo extremos relativos, de acuerdo al teorema 5 y analicemos los valores críticos encontrados.

Puntos	**Signo de *f´´***	**Conclusión**	**Concavidad**
-1	f´´(-1) = 30 > 0	**Mínimo relativo**	**Hacia arriba**
0	f´´(0) = 0	**Ni máximo ni mínimo**	**No definida**
1	f´´(1) = -30 < 0	**Máximo relativo**	**Hacia abajo.**

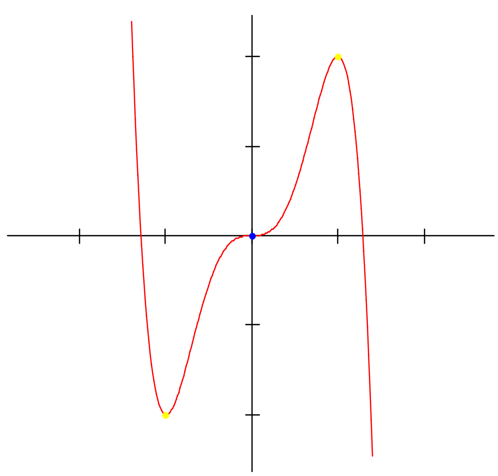
Por lo tanto el punto mínimo es (c,f(c)), es decir, **(-1,-2).** De la misma manera, el punto máximo es **(1,2).**

En el valor x = 0, la segunda derivada es igual a cero, esto según el teorema 5 y el teorema 4, es un punto de inflexión (0,0).

Bosquejemos ahora nuestros resultados y conozcamos la gráfica de la función.



Bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = -3x^5 + 5x^3$



Gráfica de la función $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

Ejercicios

4.5.1. Encuentre todos los intervalos en los cuales la función crece, decrece, es cóncava hacia arriba o hacia abajo, el (los) punto(s) de inflexión, sus extremos relativos y con esa información bosqueje la gráfica de las funciones.

i) $y = x^3 - 12x$

ii) $y = x(x-4)^3$

iii) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

4.5.2. Dibujar una función con estas características.

i) $f(2) = f(4) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 3$
$f'(3)$ no está definido
$f'(x) > 0$ si $x > 3$
$f''(x) < 0$, $x \neq 3$

ii) $f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x > 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x > 1$
$f''(x) < 0$