

▪ **Formiranje matrice krutosti sistema**

Tabelarni prikaz zavisnosti geometrije štapova¹ i čvorova dat je u sljedećoj tabeli. I kao što se iz tabele vidi, sistem smo "rastavili" na pet štapova poprečnog presjeka **A**, i četiri čvora.

Tabela 1

Broj elementa	Presjek	Dužina	Položaj	α	$c = \cos\alpha$	$s = \sin\alpha$
1	A	$l/2$		0	1	0
2	A	$l\sqrt{3}/2$		90°	0	1
3	A	$l/2$		0	1	0
4	A	l		60°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
5	A	l		-60°	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$

Uzimajući u obzir da nam je od ranije poznato da je matrica krutosti za neki štap u jednoj generalizovanoj formi data kao u narednom dijelu teksta, onda možemo da za svaki **KE** napišemo njegovu matricu krutosti. Sve ovo nam je potrebno da bi smo definisali **matricu krutosti sistema** uz pomoću koje ćemo dobiti potrebna pomjeranja u čvorovima, a sve to na kraju će nam pomoći da odredimo deformisani oblik konstrukcije, što je bio i cilj ovog zadatka. Dakle, ovdje nećemo detaljno izvoditi pojedine matrice krutosti, s obzirom da nam je to od ranije poznato iz opšte teorije **MKE**². Stoga matricu krutosti za neki štap u globalnom sistemu možemo napisati kao:

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12B}{l^3}s^2 & \frac{EA}{l}sc - \frac{12B}{l^3}sc & -\frac{6B}{l^2}s & -\frac{EA}{l}c^2 - \frac{12B}{l^3}s^2 & -\frac{EA}{l}sc + \frac{12B}{l^3}sc & -\frac{6B}{l^2}s \\ \frac{EA}{l}sc - \frac{12B}{l^3}sc & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12B}{l^3}c^2 & \frac{6B}{l^2}c & -\frac{EA}{l}sc + \frac{12B}{l^3}sc & -\frac{EA}{l}s^2 - \frac{12B}{l^3}c^2 & \frac{6B}{l^2}c \\ -\frac{6B}{l^2}s & \frac{6B}{l^2}c & \frac{4B}{l} & \frac{6B}{l^2}s & -\frac{6B}{l^2}c & \frac{2B}{l} \\ \frac{EA}{l}c^2 - \frac{12B}{l^3}s^2 & -\frac{EA}{l}sc + \frac{12B}{l^3}sc & \frac{6B}{l^2}s & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12B}{l^3}s^2 & \frac{EA}{l}sc - \frac{12B}{l^3}sc & \frac{6B}{l^2}s \\ \frac{EA}{l}sc + \frac{12B}{l^3}sc & -\frac{EA}{l}s^2 - \frac{12B}{l^3}c^2 & -\frac{6B}{l^2}c & \frac{EA}{l}sc - \frac{12B}{l^3}sc & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12B}{l^3}c^2 & -\frac{6B}{l^2}c \\ -\frac{6B}{l^2}s & \frac{6B}{l^2}c & \frac{2B}{l} & \frac{6B}{l^2}s & -\frac{6B}{l^2}c & \frac{4B}{l} \end{pmatrix}$$

gdje su:

E [KN / cm²] -Young-ov modul elastičnosti

l [cm] - dužina grednih elemenata

B=EI_x [KNcm²] - savojna krutost grednih elemenata

A [cm²] - površina poprečnog presjeka

¹ U daljem tekstu će se koristiti termin **štap**, mada se pod tim pojmom podrazumjeva **gredni element**, koji i pored toga što podnosi i aksijalna naprezanja podnosi i momente savijanja. Termini **štap** u opštem smislu podrazumjeva **KE** koji podnosi aksijalna opterećenja, na pr. rešetkaste konstrukcije

² Vidjeti prilog od Prof. S.Savićevića

Iz tabele 1 su nam poznate vrijednosti $c = \cos\alpha$ i $s = \sin\alpha$. Na osnovu ove generalisane forme za štap, posmatran u globalnom sistemu, možemo definisati matricu krutosti za svaki štap posebno.

• **Pojedinačne matrice krutosti za štapove**

ŠTAP 1

Broj elementa	Presjek	Dužina	Položaj	α	$c = \cos\alpha$	$s = \sin\alpha$
1	A	$l/2$		0	1	0

$$\begin{pmatrix} \frac{2EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{2EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{96B}{l^3} & \frac{24B}{l^2} & 0 & -\frac{96B}{l^3} & \frac{24B}{l^2} \\ 0 & \frac{24B}{l^2} & \frac{8B}{l} & 0 & -\frac{24B}{l^2} & \frac{4B}{l} \\ \frac{2EA}{l} & 0 & 0 & \frac{2EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{96B}{l^3} & -\frac{24B}{l^2} & 0 & \frac{96B}{l^3} & -\frac{24B}{l^2} \\ 0 & \frac{24B}{l^2} & \frac{4B}{l} & 0 & -\frac{24B}{l^2} & \frac{4B}{l} \end{pmatrix}$$

ŠTAP 2

Broj elementa	Presjek	Dužina	Položaj	α	$c = \cos\alpha$	$s = \sin\alpha$
2	A	$l\sqrt{3}/2$		90°	0	1

$$\begin{pmatrix} \frac{96B}{\sqrt{27}l^3} & 0 & -\frac{8B}{l^2} & -\frac{96B}{\sqrt{27}l^3} & 0 & -\frac{8B}{l^2} \\ 0 & \frac{2EA}{\sqrt{3}l} & 0 & 0 & -\frac{2EA}{\sqrt{3}l} & 0 \\ -\frac{8B}{l^2} & 0 & \frac{8B}{\sqrt{3}l} & \frac{8B}{l^2} & 0 & \frac{4B}{\sqrt{3}l} \\ \frac{96B}{\sqrt{27}l^3} & 0 & \frac{8B}{l^2} & -\frac{96B}{\sqrt{27}l^3} & 0 & \frac{8B}{l^2} \\ 0 & -\frac{2EA}{\sqrt{3}l} & 0 & 0 & \frac{2EA}{\sqrt{3}l} & 0 \\ -\frac{8B}{l^2} & 0 & \frac{4B}{\sqrt{3}l} & \frac{8B}{l^2} & 0 & \frac{8B}{\sqrt{3}l} \end{pmatrix}$$

ŠTAP 3

Broj elementa	Presjek	Dužina	Položaj	α	$c = \cos\alpha$	$s = \sin\alpha$
3	A	$l/2$		0	1	0

$$\begin{pmatrix} \frac{2EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{2EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{96B}{l^3} & \frac{24B}{l^2} & 0 & -\frac{96B}{l^3} & \frac{24B}{l^2} \\ 0 & \frac{24B}{l^2} & \frac{8B}{l} & 0 & -\frac{24B}{l^2} & \frac{4B}{l} \\ \frac{2EA}{l} & 0 & 0 & \frac{2EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{96B}{l^3} & -\frac{24B}{l^2} & 0 & \frac{96B}{l^3} & -\frac{24B}{l^2} \\ 0 & \frac{24B}{l^2} & \frac{4B}{l} & 0 & -\frac{24B}{l^2} & \frac{4B}{l} \end{pmatrix}$$

ŠTAP 4

Broj elementa	Presjek	Dužina	Položaj	α	$c = \cos\alpha$	$s = \sin\alpha$
4	A	l		60°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{4l} + \frac{12B}{l^3} & \frac{EA\sqrt{3}}{4l} - \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} & -\frac{6B\sqrt{3}}{l^2} & -\frac{EA}{4l} - \frac{12B}{l^3} & -\frac{EA\sqrt{3}}{4l} + \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} & -\frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \\ \frac{EA\sqrt{3}}{4l} - \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} & \frac{EA}{4l} + \frac{12B}{l^3} & \frac{6B}{l^2} & -\frac{EA\sqrt{3}}{4l} + \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} & \frac{EA}{4l} - \frac{12B}{l^3} & \frac{6B}{l^2} \\ -\frac{6B\sqrt{3}}{l^2} & \frac{6B}{l^2} & \frac{4B}{l} & \frac{6B\sqrt{3}}{l^2} & -\frac{6B}{l^2} & \frac{2B}{l} \\ -\frac{2EA}{l} & -\frac{EA\sqrt{3}}{4l} + \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} & \frac{6B\sqrt{3}}{l^2} & \frac{2EA}{l} & \frac{EA\sqrt{3}}{4l} - \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} & \frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \\ \frac{EA\sqrt{3}}{4l} + \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} & -\frac{EA}{4l} - \frac{12B}{l^3} & -\frac{24B}{l^2} & -\frac{EA\sqrt{3}}{4l} - \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} & \frac{EA}{4l} + \frac{12B}{l^3} & -\frac{6B}{l^2} \\ -\frac{6B\sqrt{3}}{l^2} & \frac{6B}{l^2} & \frac{2B}{l} & \frac{6B\sqrt{3}}{l^2} & -\frac{6B}{l^2} & \frac{4B}{l} \end{pmatrix}$$

ŠTAP 5

Broj elementa	Presjek	Dužina	Položaj	α	$c = \cos\alpha$	$s = \sin\alpha$
5	A	l		-60°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left(\begin{array}{cccccc} \frac{EA}{4l} + \frac{12B}{l^3} \frac{3}{4} & -\frac{EA\sqrt{3}}{l} \frac{1}{4} + \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} \frac{1}{4} & \frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \frac{1}{2} & -\frac{EA}{4l} - \frac{12B}{l^3} \frac{3}{4} & \frac{EA\sqrt{3}}{l} \frac{1}{4} - \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} \frac{1}{4} & \frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \frac{1}{2} \\ \frac{EA\sqrt{3}}{l} \frac{1}{4} + \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} \frac{1}{4} & \frac{EA}{3} \frac{1}{4} + \frac{12B}{l^3} \frac{1}{4} & \frac{6B}{l^2} \frac{1}{2} & \frac{EA\sqrt{3}}{l} \frac{1}{4} - \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} \frac{1}{4} & -\frac{EA}{3} \frac{1}{4} - \frac{12B}{l^3} \frac{1}{4} & \frac{6B}{l^2} \frac{1}{2} \\ \frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \frac{1}{2} & \frac{6B}{l^2} \frac{1}{2} & \frac{4B}{l} & -\frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \frac{1}{2} & -\frac{6B}{l^2} \frac{1}{2} & \frac{2B}{l} \\ -\frac{EA}{4l} - \frac{12B}{l^3} \frac{3}{4} & \frac{EA\sqrt{3}}{l} \frac{1}{4} - \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} \frac{1}{4} & -\frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \frac{1}{2} & \frac{EA}{4l} + \frac{12B}{l^3} \frac{3}{4} & -\frac{EA\sqrt{3}}{l} \frac{1}{4} + \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} \frac{1}{4} & -\frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \frac{1}{2} \\ \frac{EA\sqrt{3}}{l} \frac{1}{4} - \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} \frac{1}{4} & -\frac{EA}{3} \frac{1}{4} - \frac{12B}{l^3} \frac{1}{4} & -\frac{6B}{l^2} \frac{1}{2} & -\frac{EA\sqrt{3}}{l} \frac{1}{4} + \frac{12B\sqrt{3}}{l^3} \frac{1}{4} & \frac{EA}{3} \frac{1}{4} + \frac{12B}{l^3} \frac{1}{4} & -\frac{6B}{l^2} \frac{1}{2} \\ \frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \frac{1}{2} & \frac{6B}{l^2} \frac{1}{2} & \frac{2B}{l} & -\frac{6B\sqrt{3}}{l^2} \frac{1}{2} & -\frac{6B}{l^2} \frac{1}{2} & \frac{4B}{l} \end{array} \right)$$

Iz prethodnog lako zaključujemo da su matrice krutosti štapova **1** i **3** iste tj. $K^{[1]}=K^{[3]}$

Matricu krutosti sistema formiraćemo sabiranjem određenih submatrica, koje su reda 3x3. U narednom dijelu teksta prikazana je tabela u kojoj je prikazano koliko se puta koja submatrica ponavlja u svakoj od prethodnih matrica krutosti(za štapove pojedinačno).Broj ponavljanja submatrica nam govori koliko puta tu submatricu treba sabirati da bi formirali konačnu matricu krutosti.

Tabela 2 - Kontrolna tabela

Konačni elementi					
	1	2	3	4	5
Submatrice	K₁₁	K₂₂	K₂₂	K₁₁	K₃₃
	K₁₂	K₂₃	K₂₄	K₁₃	K₃₄
	K₂₁	K₃₂	K₄₂	K₃₁	K₄₃
	K₂₂	K₃₃	K₄₄	K₃₃	K₄₄

Iz prethodne tabele uočavamo na primjer da se submatrica **K₁₁** ponavlja dva puta, odnosno **K₂₂** tri puta itd..., što znači da ih toliko puta treba sabirati na onim mjestima u

matrici krutosti kojima one odgovaraju. Prethodno rečeno predstavlja postupak formiranja matrice krutosti sistema. Detaljnije vidjeti i literaturi [2].

Formirana matrica krutosti je onog reda submatrica koliko ima čvorova posmatrani sistem(model). Konkretno, za ovaj slučaj matrica krutosti **K** je reda 4x4 (submatrica), odnosno ima 12x12 članova, gdje je svaka submatrica reda 3x3.

- **Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka štapa**

Poprečni presjek:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0.05^2 \cdot \pi}{4} = 0.001963[m^2] = 19.63[cm^2]$$

Savojna krutost štapova:

$$B = E \cdot I_x$$

$$I_x = 3.068 \cdot 10^{-7}[m^4] = 30.68[cm^4]$$

$$B = 2 \cdot 10^8[KN/m^2] \cdot 3.068 \cdot 10^{-7}[m^4] = 61.36[KNm^2]$$

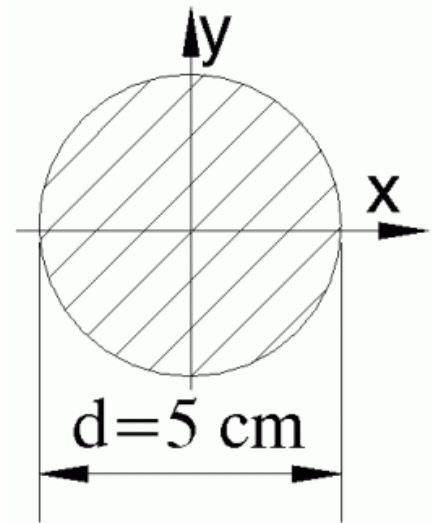
Ostale karakteristične vrijednosti³:

$$W_x = 12.27[cm^3]$$

$$i_x = 1.25[cm]$$

$$m \approx 60[kg]$$

$$V = 7591[cm^3]$$



Shodno već poznatoj zavisnosti **S=K*U**, možemo izračunati matricu krutosti **K** konstrukcije. Zapravo prethodna jednačina predstavlja matričnu jednačinu u kojoj je matrica krutosti **K** reda 12 x 12, a sama matrična jednačina predstavlja sistem od dvanaest jednačina sa dvanaest nepoznatih. Ako napišemo matricu (vektor) pomjeranja i vektor sila kao što je prikazano u narednom dijelu teksta, uočavamo da su nam neka pomjeranja poznata, a neka ne. Isto važi i za sile tj. opterećenje, gdje nam je poznato aktivno opterećenje a nepoznate su reakcije u osloncima.

Uz pomoć računara dati problem najjednostavnije rješavamo, s obzirom na "obim posla" koji bi imali kad bi radili "ručno". Stoga, kompletnu proceduru rješavanja datog problema, uradićemo pisanjem programa (script file-a) u programskom paketu **MATLAB**, čiji je listing i primjer unošenja podataka dat u dodatku **A**.

Uvažavajući gore pomenutu matričnu zavisnost između pomjeranja i sila, možemo napisati sljedeće⁴:

Vektor pomjeranja:

$$U = [0 \quad 0 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \varphi_3 \quad 0 \quad 0 \quad \varphi_4]^T$$

Vektor sila:

$$S = \left[X_1 \quad Y_1 \quad 0 \quad \frac{ql\sqrt{3}}{4} \quad 0 \quad -Fl - \frac{ql^2}{16} \quad \frac{ql\sqrt{3}}{4} \quad 0 \quad \frac{ql^2}{16} \quad -X_4 \quad Y_4 \quad 0 \right]^T$$

gdje su nam u ovom slučaju u_i i v_i , $i=1,2,3,4$ pomjeranja u pravcu x i y ose respektivno, a φ_i , $i=1,2,3,4$ - obrtanje oko ose normalne na ravan konstrukcije.

U sljedećem dijelu teksta dati su rezultati dobijeni pomoću računara.

³ Vrijednosti dobijene pomoću programa **AMESYS Frame 2D v2.0**, gdje su: m - približna masa konstrukcije, V - zapremina, i_x - poluprečnik inercije i W_x - otporni moment

⁴ Ovi vektori će nam biti potrebni kasnije prilikom unošenja podataka, a odnosi se na one vrste gdje pomjeranja nisu poznata, što najjednostavnije uočavamo u vektoru pomjeranja, kao i vrijednosti opterećenja u vektoru sila. Znak sila i momenata je u skladu sa konvencijom, prikazan na slici 1.2

Vektor sila:

S =
 -8.6500
 -17.4911
 -0.0000
 8.6500
 0.0000
 -11.2500
 8.6500
 -0.0000
 1.2500
 -8.6500
 17.4911
 -0.0000

Vrijednosti sila su u [KN], a momenata u [KNm]

Vektor pomjeranja:

U =
 0
 0
 0.0030
 0.0000
 0.0000
 -0.0104
 0.0000
 -0.0000
 0.0025
 0
 0
 0.0030

Vrijednosti pomjeranja su u [m], a uglova rotacije u [rad]

Matrica krutosti sistema:

K =
 1.0e+006 *
 od kolone 1 do 7

0.8841	0.1697	-0.0003	-0.7854	0	0	-0.0987
0.1697	0.3006	0.0017	0	-0.0059	0.0015	-0.1697
-0.0003	0.0017	0.0007	0	-0.0015	0.0002	0.0003
-0.7854	0	0	1.5719	0.0000	-0.0005	-0.0011
0	-0.0059	-0.0015	0.0000	0.4652	0	-0.0000
0	0.0015	0.0002	-0.0005	0	0.0013	0.0005
-0.0987	-0.1697	0.0003	-0.0011	-0.0000	0.0005	0.1986
-0.1697	-0.2947	-0.0002	-0.0000	-0.4535	-0.0000	0.0000
-0.0003	0.0002	0.0001	-0.0005	0.0000	0.0001	0.0011
0	0	0	-0.7854	0	0	-0.0987
0	0	0	0	-0.0059	-0.0015	0.1697
0	0	0	0	0.0015	0.0002	0.0003

od kolone 8 do 12

-0.1697	-0.0003	0	0	0
-0.2947	0.0002	0	0	0
-0.0002	0.0001	0	0	0
-0.0000	-0.0005	-0.7854	0	0
-0.4535	0.0000	0	-0.0059	0.0015
-0.0000	0.0001	0	-0.0015	0.0002
0.0000	0.0011	-0.0987	0.1697	0.0003
1.0429	-0.0000	0.1697	-0.2947	0.0002
-0.0000	0.0008	-0.0003	-0.0002	0.0001
0.1697	-0.0003	0.8841	-0.1697	-0.0003

-0.2947	-0.0002	-0.1697	0.3006	-0.0017
0.0002	0.0001	-0.0003	-0.0017	0.0007

Iz prethodnog uočavamo da su nam reakcije u vezama (osloncima) sljedeće:

$$X_1 = -8.6500[\text{KN}], Y_1 = -17.4911[\text{KN}], X_4 = -8.6500[\text{KN}], Y_4 = 17.4911[\text{KN}]$$

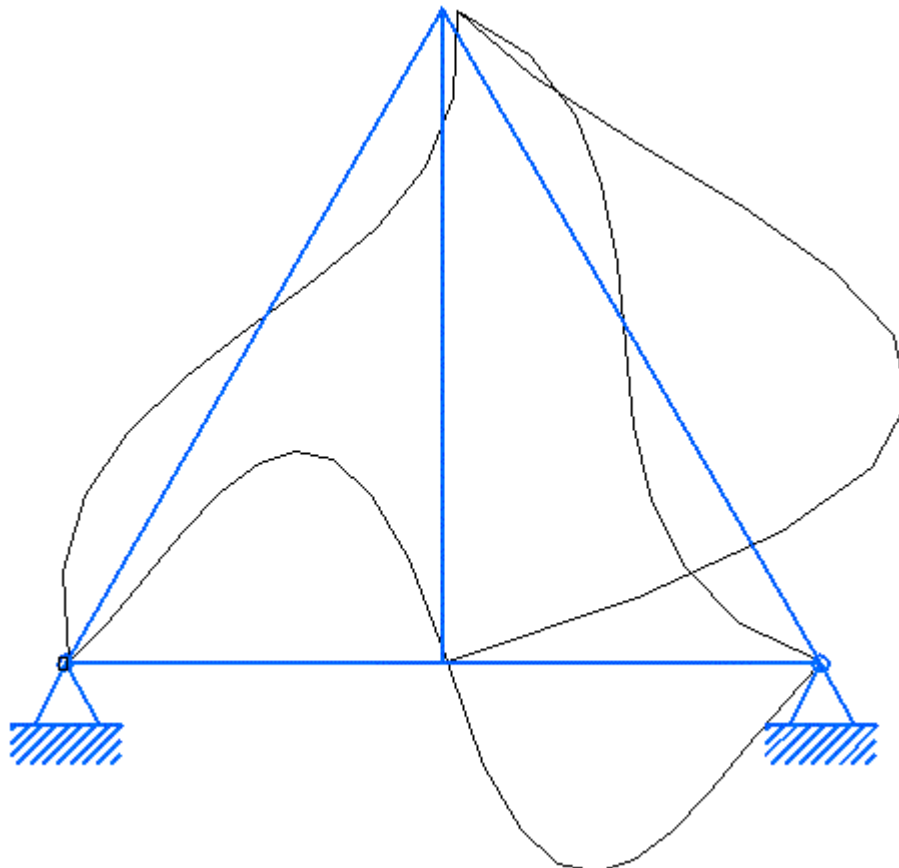
Provjera uslova ravnoteže za dati model nam pokazuje da nam date vrijednosti rezultata reakcija u vezama zadovoljavaju potpuno prihvatljivu tačnost od 0.89%, što je više nego povoljna tačnost.

Provjera:

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0$$

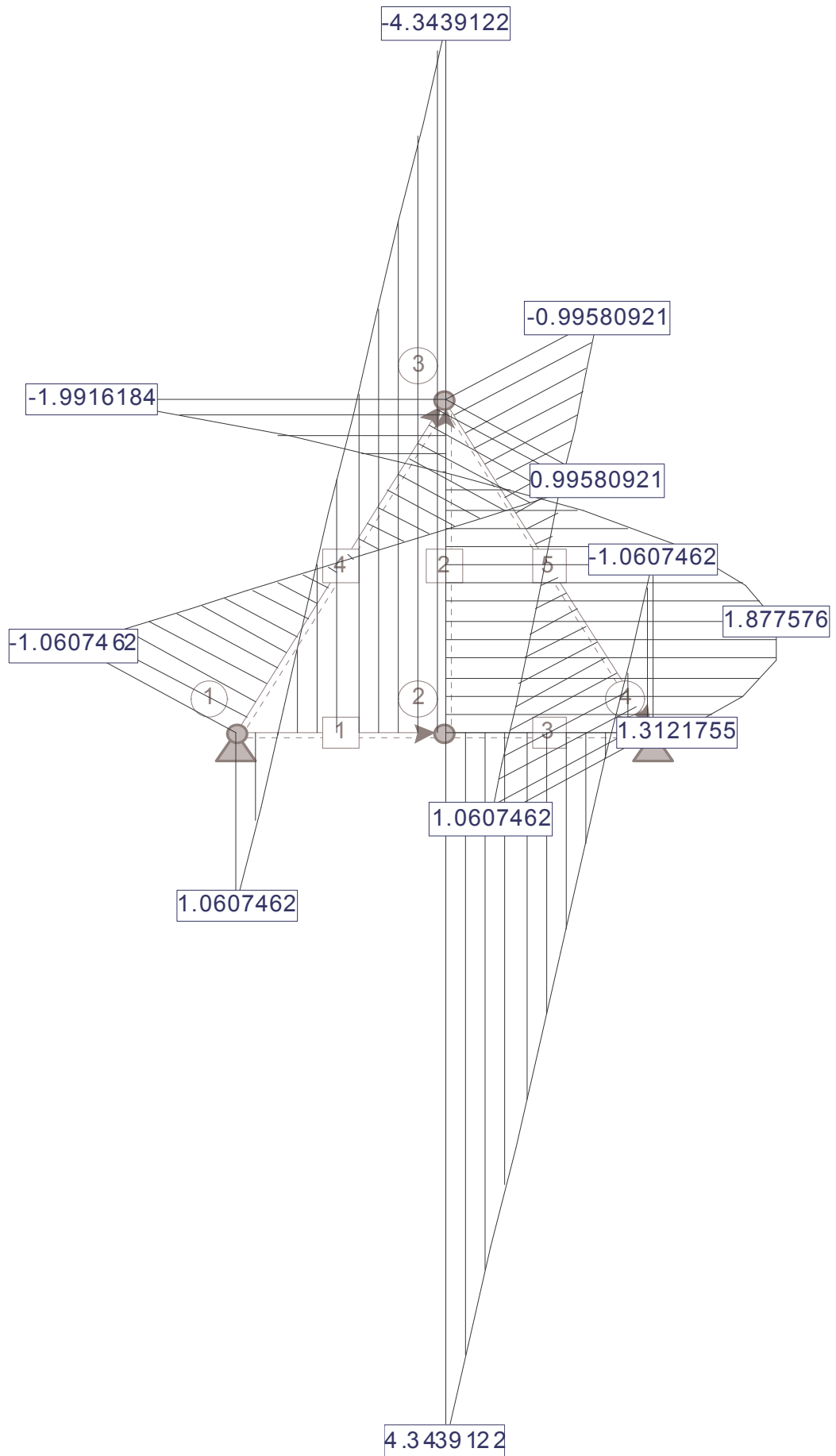
$$ql \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \frac{\sqrt{3}}{4} + F \cdot l - Y_4 \cdot l = 7.5 + 10 - 17.4911 \cdot 1 = 0.0089 \approx 0$$

Na osnovu dobijenih pomjeranja u čvorovima **1, 2, 3 i 4** možemo približno nacrtati kako bi izgledala deformisana struktura. Naravno, prikaz je ovakav iz razloga što se na ovakav način može najbolje uočiti kako bi se posmatrani model deformisao. Pomjeranje vrha konstrukcije u pravcu x ose je zanemarljivo malo ali je zahvaljujući preciznosti rada računara (zaokruživanje rezultata tokom rada-pomjeranje je reda nekoliko [μm]) omogućeno da se i ono vidi.



Slika 1.3 - Karikirani prikaz deformisane strukture

Takođe, koristeći rezultate dobijene pomenutim programom, možemo nacrtati kako izgledaju dijagrami momenata date konstrukcije pod zadatim opterećenjem. Dijagrami su dobijeni uz pomoć programa AMSES Frame 2D v 2.0. Sam postupak dobijanja dijagrama presječnih sila i momenata je dosta složen i zahtjeva poznavanje metode sile, koja nije predmet našeg interesovanja.



Slika 1.4 - Dijagrami momenata

- **Zaključak**

***Izbor tipa KE i komentar rezultata

Konačni elementi kojima je diskretizovan dati sistem su **1D** linijski gredni elementi. Karakteristično za ovu vrstu **KE** je da pored aksijalnih opterećenja mogu da ponesu i unutrašnje momente savijanja i uvijanja. Primjena **KE** tipa grede, uopšte smanjuje aproksimacije. Grednim **KE** se obično diskretizuju noseće strukture različitih tipova dizalica, ramovi postolja, rešetke, stubovi... Za razliku od štapnih **KE**, koji se odlikuju vitkošću, često većom od 50 ($\lambda > 50$), gredni elementi, kao što smo napomenuli mogu da ponesu momente savijanja, što je karakteristično za ovaj slučaj. Napomenućemo da je vitkost **KE** za ovaj slučaj sljedeća: $\lambda = 40$; $\lambda = 69.282$, $\lambda = 40$; $\lambda = 80$; $\lambda = 80$, respektivno za **KE** od 1 do 5. Gdje smo vitkost

računali kao $\lambda = \frac{l}{i_{\min}}$.

Problem dimenzionisanja ove noseće strukture nije obrađen u ovom zadatku i potrebno je posebno izučavati ovaj problem.

Rješavanjem ovog konkretnog primjera dobili smo odgovarajuća pomjeranja u čvorovima.

Čvor 1

$$U_x = 0, U_y = 0, \varphi_1 = 0.0030 [\text{rad}] \approx 0.17^\circ$$

Čvor 2

$$U_x = 0, U_y = 0, \varphi_2 = -0.0104 [\text{rad}] \approx -0.595^\circ$$

Čvor 3

$$U_x = 0, U_y = 0, \varphi_3 = 0.0025 [\text{rad}] \approx 0.143^\circ$$

Čvor 4

$$U_x = 0, U_y = 0, \varphi_4 = 0.0030 [\text{rad}] \approx 0.17^\circ$$

Posmatranjem ovih rezultata možemo uočiti da pod dejstvom ovog opterećenja nema pomjeranja⁵ u pravcu x i y ose u navedenim čvorovima. Dok je najveće zakretanje u čvoru 2 i iznosi oko 0.595° u negativnom matematičkom smjeru.

S obzirom na simetričnu geometriju konstrukcije reakcije u vezama su u oba oslonca iste u oba pravca (vidjeti sliku 1.2 gdje su naznačeni smjerovi reakcija prikazani za pretpostavljeni smjer).

***Broj stepeni slobode i širina pojasa matrice krutosti

Broj stepeni slobode sistema možemo izračunati kao:

$$F = \sum_{i=1}^n q_i \cdot p - S = N - S \text{ - broj stepeni slobode sistema}$$

$$N = \sum_{i=1}^n q_i \cdot p - (\text{broj čvorova}) \times (\text{broj stepeni slobode u čvoru})$$

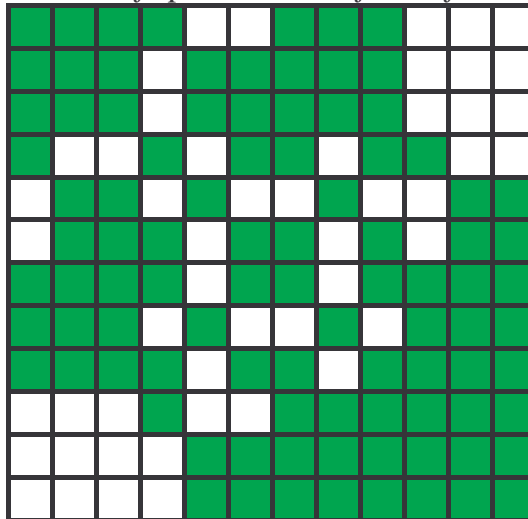
S - broj veza (reakcije veza)

⁵ Preciznim definisanjem na koliko će se decimala zaokruživati rezultat, direktno nam zavisi koje ćemo vrijednosti na kraju dobiti kao rezultate. Tako i ovom slučaju se pokazalo da je pomjeranje u pravcu x ose u čvoru 3 zanemarljivo malo, ali je zaokruživanjem na četiri decimale konačni rezultat nula u pomjeranju u x pravcu. Karikirani prikaz (dobijen uz pomoć software **Amses Frame 2D v.2.0**) strukture najbolje nam govori o prethodnom.

Pa je u ovom slučaju: $F=4 \cdot 3 - 4=8$

Širina pojasa matrice krutosti je 18, a to možemo vidjeti iz rezultata prikazanih u prethodnom dijelu teksta str. 8. **Širina pojasa** zavisi od složenosti noseće strukture, načina podjele i broja konačnih elemenata i konačno i od samog načina i redosljeda numeracije čvorova. U savremenim komercijalnim verzijama software-a, ova je opcija optimizirana specijalnim algoritmima *renumeracije čvorova*, dobijajući na taj način uzak pojas matrice krutosti, što nam direktno utiče na brzinu rješavanja problema. Ovaj postupak je naročito pogodan za sisteme sa velikim brojem stepeni slobode. U ovom slučaju širina pojasa je 18, a red matrice krutosti je 12x12, sa ukupno 144 elementa.

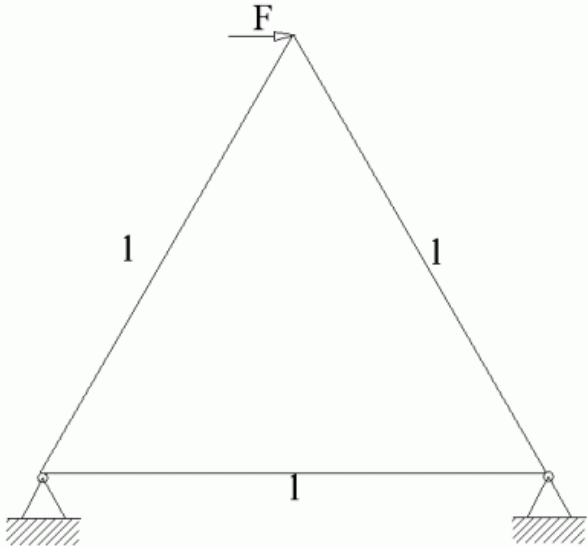
Pojasni oblik matrice krutosti je prikazan na sljedećoj slici.



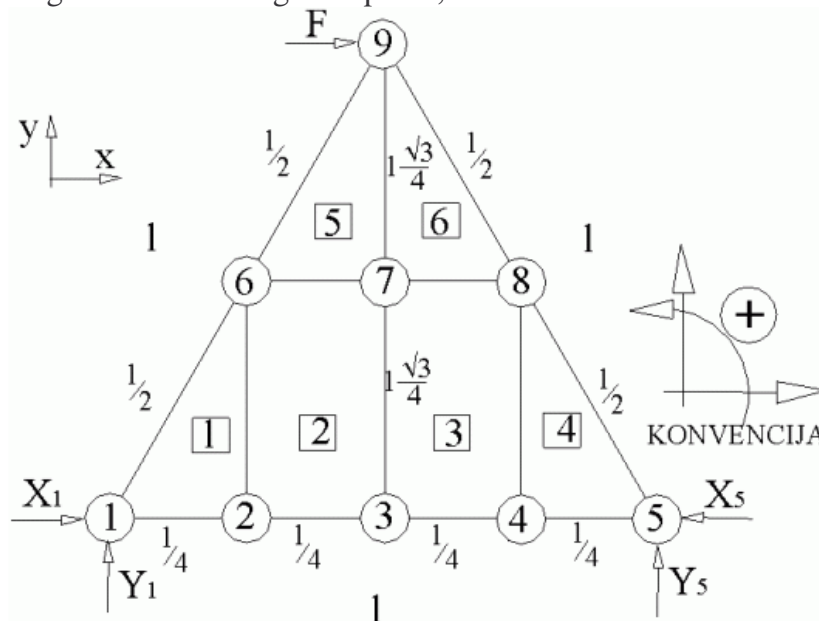
Pojasni oblik matrice krutosti sistema - K

ZADATAK 2

Na slici 2.1 prikazana je trougaona ploča na čijem vrhu djeluje horizontalna sila F . Na ostala dva temena ploča se zglibno oslanja. Potrebno je **MKE** (metodom pomjeranja) izvršiti strukturnu analizu datog modela, tako što ćemo dati model diskretizovati na mrežu konačnih elementa prikazanih kao na slici 2.2. Potrebno je odrediti deformisani oblik modela, a zatim odrediti deformacije i napone u konačnim elementima modela.

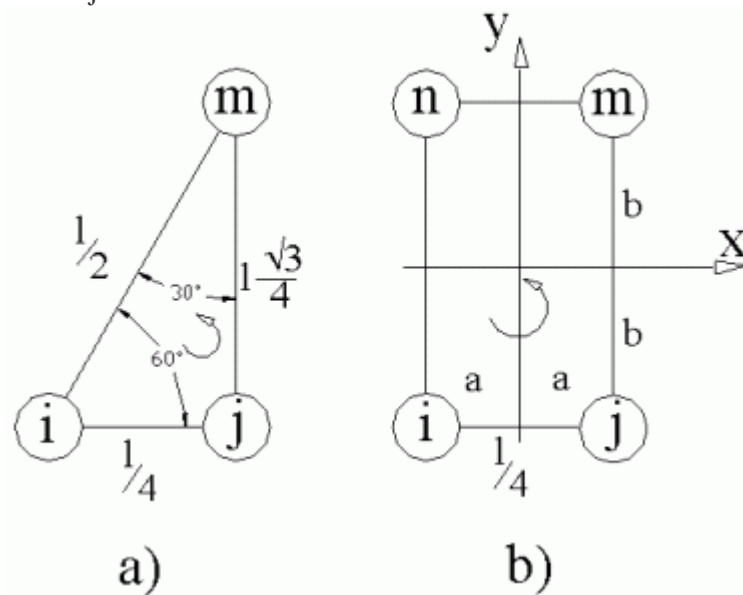
 <p>Slika 2.1 - Model ploče sa geometrijskim karakteristikama</p>	<p>Potrebni podaci</p> <ul style="list-style-type: none"> - $l=1 [m]$ - dužina stranica trougaone ploče - debljina ploče $t=5 [cm]$ - Poisson-ov koeficijent: $\nu=1/3=0.33333$ - Young-ov modul elastičnosti: $E=2 \cdot 10^4 [KN / cm^2]$ - Horizontalna sila: $F=20 [KN]$
--	---

Dati model ćemo diskretizovati kao na slici 2.2, pri tom uočavamo da su nam konačni elementi ravne trougaone i četvorougonaone ploče, dakle **2D** ravanski konačni elementi.



Slika 2.2 - Diskretni model trougaone ploče

Na slici 2.3 prikazana su dva konačna elementa sa naznačenim geometrijskim karakteristikama kao i smjerom obilaska čvorova.



Slika 2.3 - Trougaoni i četvorougaoi (pravougaoni) ravni **KE** sa naznačenim čvorovima i smjerom

▪ Matrica krutosti sistema

I u ovom slučaju nećemo detaljno izvoditi pojedine matrice krutosti (njihovo izvođenje je dato u literaturi [2] str. 20÷32.). Dakle, za ravanske **KE**, potrebno je napisati matrice krutosti (u ovom slučaju su to trougaoni i pravougaoni **KE**) za svaki **KE** posebno. Proces formiranja kompletne matrice krutosti sistema sastoji se u sabiranju određenih submatrica (submatrice sa istim indeksom). Napominjemo da je red matrice **KE** onog reda submatrica koliko **KE** ima čvorova. Tj. trougaoni **KE** je reda 3x3 a četvorougaoi (pravougaonik u ovom slučaju) je reda 4x4. Red submatrice je određen zavisnošću pomjeranja u čvorovima **KE**. Matrice krutosti **KE** će biti ispisane za slučaj ravanskog stanja napona, tj. vektor sila sadrži dvije komponente sile, nema momenta oko ose normalne na ravan **KE**.⁶

U opštem slučaju za četvorougaoi **KE** sa čvorovima *ijmn*, odnosno, u posebnom obliku za pravougaonik sa stranama **2a** i **2b**, važi isto. Tj. vektor pomjeranja i sila sadrži dvije komponente pomjeranja i sila.⁷

Za ranije napisanu matricu krutosti za trougaoni **KE**, koja važi za globalni koordinatni sistem vezan u nekoj tački sistema, možemo napisati kako bi izgledala matrica krutosti za svaki trougaoni **KE** posebno. U sljedećem dijelu teksta prikazana je matrica krutosti za trougaoni **KE**.⁸

⁶ Vidjeti literatura [2] str. 20.

⁷ Vidjeti literatura [2] str. 26.

⁸ Matrica krutosti trougaonog **KE** je napisana u odnosu na globalni koordinatni sistem. Vidjeti prilog prof. S. Savićevića

Uzimajući u obzir prethodno napisanu matricu krutosti za trougaoni **KE**, možemo napisati matrice krutosti pojedinačno za svaki trougaoni **KE**.

$$\frac{Et}{4(1-\nu^2)A} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{16}l^2 & 0 & -\frac{3}{16}l^2 & \nu\frac{\sqrt{3}}{16}l^2 & 0 & -\nu\frac{\sqrt{3}}{16}l^2 \\ & (1-\nu)\frac{3}{32}l^2 & (1-\nu)\frac{\sqrt{3}}{32}l^2 & -(1-\nu)\frac{3}{32}l^2 & -(1-\nu)\frac{\sqrt{3}}{32}l^2 & 0 \\ & & (7-\nu)\frac{l^2}{32} & -(1+\nu)\frac{\sqrt{3}}{32}l^2 & (-2\sqrt{3}-1+\nu)\frac{l^2}{32} & \nu\frac{\sqrt{3}}{16}l^2 \\ & & & (5-3\nu)\frac{l^2}{32} & (1-\nu)\frac{\sqrt{3}}{32}l^2 & -\frac{l^2}{16} \\ & & & & (1-\nu)\frac{l^2}{32} & 0 \\ & & & & & -\frac{l^2}{16} \end{bmatrix}$$

gdje su: $\mathbf{K}^{[1]} = \mathbf{K}^{[5]}$ tj. matrice krutosti su iste. Pri čemu je u ovom slučaju $X_{mj} = 0; Y_{ij} = 0$

I za druga dva trougaona **KE**:

$$\frac{Et}{4(1-\nu^2)A} \cdot \begin{bmatrix} (7-\nu)\frac{l^2}{32} & (1+\nu)\frac{\sqrt{3}}{32}l^2 & -\frac{3}{16}l^2 & -(1-\nu)\frac{\sqrt{3}}{32}l^2 & -(1-\nu)\frac{l^2}{16} & -\nu\frac{\sqrt{3}}{16}l^2 \\ & (5-3\nu)\frac{l^2}{32} & -\nu\frac{\sqrt{3}}{16}l^2 & -(1-\nu)\frac{3}{32}l^2 & -(1-\nu)\frac{\sqrt{3}}{32}l^2 & -\frac{l^2}{16} \\ & & \frac{3}{16}l^2 & 0 & 0 & \nu\frac{\sqrt{3}}{16}l^2 \\ & & & (1-\nu)\frac{3}{32}l^2 & (1-\nu)\frac{\sqrt{3}}{32}l^2 & 0 \\ & & & & (1-\nu)\frac{l^2}{32} & 0 \\ & & & & & \frac{l^2}{16} \end{bmatrix}$$

gdje su: $\mathbf{K}^{[6]} = \mathbf{K}^{[4]}$ tj. matrice krutosti ova dva trougaona **KE** su iste. Odnosno, $X_{im} = 0; Y_{ij} = 0$

U sljedećoj tabeli prikazane su zavisnosti čvorova trougaoune ploče sa njihovim koordinatama X_n i Y_n , za $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9$

Tabela 1 - Koordinate čvorova u odnosu na globalni koordinatni sistem

		Čvorovi (n)									Čvor. troug.pl.			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	i	j	m	
Trougaona ploča	1	X _n	0	l/4				l/4				1	2	6
		Y _n	0	0				l√3/4						
	5	X _n						l/4	l/2		l/2	6	7	9
		Y _n						l√3/4	l√3/4		l√3/2			
	6	X _n							l/2		l/2	7	8	9
		Y _n							l√3/4	l√3/4	l√3/2			
	4	X _n				3l/4	l				3l/4	4	5	8
		Y _n				0	0				l√3/4			

Za četvorougao **KE**, u ovom slučaju su to pravougaonici i to dva pravougaonika [2] i [3], iz opšte teorije **MKE** pokazano je kako se dolazi do matrica krutosti. S obzirom da se ovdje nećemo baviti detaljnim izvođenjem, napisaćemo kako ona izgleda u gotovom obliku:

$$K = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} & K_{in} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} & K_{jn} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} & K_{mn} \\ K_{ni} & K_{nj} & K_{nm} & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Kako pojedine submatrice izgledaju u nekom opštem slučaju za neki pravougaoni **KE**, vidjeti literaturu [2].Dok ćemo ovdje napisati kako one izgledaju u sređenom obliku za naš konkretan primjer.

$$K_{ii} = \frac{Et}{24(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 8\sqrt{3} + 4(1-\nu)\sqrt{3}/3 & 3(1+\nu) \\ 3(1+\nu) & 8\sqrt{3}/3 + 4(1-\nu)\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$K_{jj} = \frac{Et}{24(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 8\sqrt{3} + 4(1-\nu)\sqrt{3}/3 & -3(1+\nu) \\ -3(1+\nu) & 8\sqrt{3}/3 + 4(1-\nu)\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = \frac{Et}{24(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} -8\sqrt{3} + 2(1-\nu)\sqrt{3}/3 & -3(1-3\nu) \\ -3(1-3\nu) & 4\sqrt{3}/3 - 4(1-\nu)\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$K_{im} = \frac{Et}{24(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} -4\sqrt{3} - 2(1-\nu)\sqrt{3}/3 & -3(1+\nu) \\ -3(1+\nu) & -4\sqrt{3}/3 - 2(1+\nu)\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$K_{in} = \frac{Et}{24(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} - 4(1-\nu)\sqrt{3}/3 & 3(1-3\nu) \\ -3(1-3\nu) & -8\sqrt{3}/3 + 2(1-\nu)\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$K_{jm} = \frac{Et}{24(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} - 4(1-\nu)\sqrt{3}/3 & -33(1-3\nu) \\ 3(1-3\nu) & -8\sqrt{3}/3 + 2(1-\nu)\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$K_{jn} = \frac{Et}{24(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} -4\sqrt{3} - 2(1-\nu)\sqrt{3}/3 & 3(1+\nu) \\ 3(1+\nu) & -4\sqrt{3}/3 - 2(1-\nu)\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$K_{mn} = \frac{Et}{24(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} -8\sqrt{3} + 4(1-\nu)\sqrt{3}/3 & -3(1-3\nu) \\ 3(1-3\nu) & 4\sqrt{3}/3 - 4(1-\nu)\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

gdje su: $\beta = b/a = \sqrt{3}$ i $\alpha = a/b = \sqrt{3}/3$ pri čemu je $a = l/8$ i $b = l\sqrt{3}/8$. Za specijalni slučaj (kvadratna ploča), važi $\alpha = \beta = 1$. Submatrice ispod dijagonale (matrica krutosti za pravougaonik) su transponovane. Vidjeti u narednom dijelu teksta. Konačno možemo napisati kako izgleda matrica krutosti četvorougona (pravougaonog) **KE**. Pa je:

$$K^{[2]} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{27} & K_{26} \\ K_{23}^T & K_{33} & K_{37} & K_{36} \\ K_{27}^T & K_{37}^T & K_{77} & K_{76} \\ K_{26}^T & K_{36}^T & K_{76}^T & K_{66} \end{bmatrix}, \text{ odnosno } K^{[3]} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{38} & K_{37} \\ K_{34}^T & K_{44} & K_{37} & K_{47} \\ K_{38}^T & K_{48}^T & K_{88} & K_{87} \\ K_{37}^T & K_{47}^T & K_{87}^T & K_{77} \end{bmatrix}$$

Na kraju, kad smo napisali kako izgledaju pojedinačno matrice krutosti za trougaoe i četvorougaoe **KE**, možemo formirati matricu krutosti sistema. Prethodno, pregledno ćemo prikazati u tabeli 2 sve submatrice, gdje je nam je jasno prikazano koje submatrice treba sabirati, prilikom formiranja konačne matrice krutosti.

Tabela 2 - Kontrolna tabela

KONAČNI ELEMENTI					
\triangle	\square		\triangle		
1	2	3	4	5	6
K11	K22	K33	K44	K66	K77
K12	K23	K34	K45	K67	K78
K16	K27	K38	K48	K69	K79
K21	K26	K37	K54	K76	K87
K22	K32	K43	K55	K77	K88
K26	K33	K44	K58	K79	K89
K61	K37	K48	K84	K96	K97
K62	K36	K47	K85	K97	K98
K66	K72	K83	K88	K99	K99
	K73	K84	Naravno, ova tabela bi bila krajnje nepraktična za diskretne modele sa velikim brojem stepeni slobode. Na sljedećoj stranici je prikazana matrica krutosti sistema, sa naznačenim (sabranim) indeksima submatrica.		
	K77	K88			
	K76	K87			
	K62	K73			
	K63	K74			
	K67	K78			
	K66	K77			

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 K_{11}^{[1]} & K_{12}^{[1]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{22}^{[1]} + K_{22}^{[2]} & K_{12}^{[1]} + K_{26}^{[2]} & K_{23}^{[2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{33}^{[2]} + K_{33}^{[3]} & K_{36}^{[2]} & K_{33}^{[3]} & K_{37}^{[2]} + K_{37}^{[3]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{44}^{[3]} + K_{44}^{[4]} & 0 & K_{34}^{[3]} & K_{47}^{[3]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{45}^{[4]} & 0 & 0 & K_{47}^{[3]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{55}^{[4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{66}^{[1]} + K_{66}^{[2]} + K_{66}^{[5]} & K_{66}^{[1]} + K_{66}^{[2]} + K_{66}^{[5]} & 0 & K_{67}^{[2]} + K_{67}^{[5]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{77}^{[2]} + K_{77}^{[3]} + K_{77}^{[5]} + K_{77}^{[6]} & K_{77}^{[2]} + K_{77}^{[3]} + K_{77}^{[5]} + K_{77}^{[6]} & 0 & K_{77}^{[3]} + K_{77}^{[5]} + K_{77}^{[6]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{78}^{[3]} + K_{78}^{[6]} + K_{78}^{[88]} & K_{78}^{[3]} + K_{78}^{[6]} + K_{78}^{[88]} & 0 & K_{78}^{[3]} + K_{78}^{[6]} + K_{78}^{[88]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{88}^{[3]} + K_{88}^{[4]} + K_{88}^{[6]} & K_{88}^{[3]} + K_{88}^{[4]} + K_{88}^{[6]} & 0 & K_{88}^{[3]} + K_{88}^{[4]} + K_{88}^{[6]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{99}^{[5]} + K_{99}^{[6]} & K_{99}^{[5]} + K_{99}^{[6]} & 0 & K_{99}^{[5]} + K_{99}^{[6]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

SIMETRIČNO

Matrica krutosti sistema - **K**

Koristeći već poznatu matricnu relaciju $\mathbf{S}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{U}$, koja nam predstavlja zavisnost između vektora sila \mathbf{S} i vektora pomjeranja \mathbf{U} , odredićemo nepoznate reakcije veza, kao i nepoznata pomjeranja. Gdje vektor sila⁹ možemo napisati (u transponovanom obliku) kao:

$$S = [X_1 \quad Y_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad X_5 \quad -Y_5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad F \quad 0]^T$$

odnosno, vektor pomjeranja (takođe u transponovanom obliku) kao:

$$U = [0 \quad 0 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad 0 \quad 0 \quad u_6 \quad v_6 \quad u_7 \quad v_7 \quad u_8 \quad v_8 \quad u_9 \quad v_9]^T$$

gdje su nam i ovom slučaju u i v pomjeranja u pravcu x i y ose, respektivno. Primjenom računara, datu matricnu zavisnost možemo najjednostavnije riješiti. Stoga u dodatku B, prikazan je listing *script* file-a pisanog u MATLAB-u. Rezultati dobijeni ovom programom su prikazani u narednom dijelu teksta.

Vektor sila:

S =

```
-10.0000
-17.3205
-0.0000
 0.0000
 0.0000
 0.0000
-0.0000
-0.0000
-10.0000
 17.3205
-0.0000
 0.0000
 0.0000
-0.0000
-0.0000
 0
 20.0000
-0.0000
```

Vrijednosti sila su u [KN]

Vektor pomjeranja:

U =

```
1.0e-004 *
 0
 0
 0.0049
 0.0215
-0.0016
 0.0000
 0.0049
-0.0215
 0
 0
 0.0600
 0.0492
 0.0658
 0.0000
 0.0600
-0.0492
 0.2433
 0.0000
```

Vrijednosti pomjeranja su u [m]

⁹ Znak aktivnih sila i reakcija veza unosimo poštovanjem konvencije. Prikazano na slici 2.3

Matrica krutosti sistema:

K =

1.0e+007 *

od kolone 1 do 7

0.9743	0	-0.9743	0.1875	0	0	0
0	0.3248	0.1875	-0.3248	0	0	0
-0.9743	0.1875	1.8042	-0.1875	-0.6134	-0.0000	0
0.1875	-0.3248	-0.1875	1.0825	0.0000	-0.1083	0
0	0	-0.6134	0.0000	1.4434	0.0000	-0.6134
0	0	-0.0000	-0.1083	0.0000	0.8660	0.0000
0	0	0	0	-0.6134	0.0000	1.8042
0	0	0	0	-0.0000	-0.1083	0.1875
0	0	0	0	0	0	-0.9743
0	0	0	0	0	0	-0.1875
0	-0.1875	0.1443	0.1875	-0.3608	0.1875	0
-0.1875	0	0.1875	-0.4330	0.1875	-0.2165	0
0	0	-0.3608	-0.1875	0.5052	0.0000	-0.3608
0	0	-0.1875	-0.2165	0.0000	-0.2165	0.1875
0	0	0	0	-0.3608	-0.1875	0.1443
0	0	0	0	-0.1875	-0.2165	-0.1875
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

od kolone 8 do 14

0	0	0	0	-0.1875	0	0
0	0	0	-0.1875	0	0	0
0	0	0	0.1443	0.1875	-0.3608	-0.1875
0	0	0	0.1875	-0.4330	-0.1875	-0.2165
-0.0000	0	0	-0.3608	0.1875	0.5052	0.0000
-0.1083	0	0	0.1875	-0.2165	0.0000	-0.2165
0.1875	-0.9743	-0.1875	0	0	-0.3608	0.1875
1.0825	-0.1875	-0.3248	0	0	0.1875	-0.2165
-0.1875	0.9743	0	0	0	0	0
-0.3248	0	0.3248	0	0	0	0
0	0	0	1.8042	-0.1875	-1.5877	0.1875
0	0	0	-0.1875	1.0825	0.1875	-0.4330
0.1875	0	0	-1.5877	0.1875	3.6084	0.0000
-0.2165	0	0	0.1875	-0.4330	0.0000	2.1651
-0.1875	0	0.1875	0	0	-1.5877	-0.1875
-0.4330	0.1875	0	0	0	-0.1875	-0.4330
0	0	0	0	-0.1875	-0.2165	0
0	0	0	-0.1875	0	0	-0.6495

od kolone 15 do 18

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.3608	-0.1875	0	0
-0.1875	-0.2165	0	0
0.1443	-0.1875	0	0
-0.1875	-0.4330	0	0
0	0.1875	0	0
0.1875	0	0	0
0	0	0	-0.1875
0	0	-0.1875	0
-1.5877	-0.1875	-0.2165	0
-0.1875	-0.4330	0	-0.6495
1.8042	0.1875	0	0.1875
0.1875	1.0825	0.1875	0
0	0.1875	0.2165	0
0.1875	0	0	0.6495

Iz prethodnog uočavamo da su nam reakcije u vezama(osloncima) sljedeće:

$$X_1 = -10.0000[\text{KN}], Y_1 = -17.3205[\text{KN}], X_5 = -10.0000[\text{KN}], Y_5 = 17.3205[\text{KN}]$$

Provjera uslova ravnoteže za dati model nam pokazuje, da date vrijednosti rezultata reakcija u vezama zadovoljavaju uslove ravnoteže.

Provjera:

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0$$

$$Y_5 \cdot l - F \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17.3205 \cdot 1 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.000008$$

Iz prethodnog vidimo da ove vrijednosti apsolutno zadovoljavaju tačnost od $0.8 \cdot 10^{-4}\%$.

▪ Deformacije i naponi

Vektor deformacija i napona u slučaju trougaonog i četvorougaoanog konačnog elementa(ravnog) sastoji se iz tri komponente.¹⁰

Shodno prethodnom, navešćemo neke relacije koje su od značaja za ovaj deo zadatka.

$$\varepsilon^{[i]} = B^{[i]} \cdot U^{[i]}; i = 1, \dots, 6$$

$$\sigma^{[i]} = \mathfrak{N} \cdot \varepsilon^{[i]}; i = 1, \dots, 6$$

pri čemu je:

$$\mathfrak{N} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \text{ - matrica elastičnosti}$$

$U^{[i]}$ - matrica pomjeranja čvorova i -tog **KE**
 - za trougaoni **KE** važi

$$B^{[i]} = \frac{1}{2 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{16}} \cdot \begin{bmatrix} Y_{jm} & 0 & Y_{mi} & 0 & Y_{ij} & 0 \\ 0 & X_{mj} & 0 & X_{im} & 0 & X_{ji} \\ X_{mj} & Y_{jm} & X_{im} & Y_{mi} & X_{ji} & Y_{ij} \end{bmatrix}$$

- za četvorougaoani(pravougaoani) **KE** važi:

$$B^{[i]} = \frac{1}{4 \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4}} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l\sqrt{3}}{8} & 0 & \frac{l\sqrt{3}}{8} & 0 & \frac{l\sqrt{3}}{8} & 0 & -\frac{l\sqrt{3}}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{l}{8} & 0 & -\frac{l}{8} & 0 & \frac{l}{8} & 0 & \frac{l}{8} \\ -\frac{l}{8} & -\frac{l\sqrt{3}}{8} & -\frac{l}{8} & \frac{l\sqrt{3}}{8} & \frac{l}{8} & \frac{l\sqrt{3}}{8} & \frac{l}{8} & -\frac{l\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

Deformacije i napone za svaki od **KE** dobićemo množenjem odgovarajućih matrica(gore napisanih).U sljedećem dijelu teksta date su vrijednosti deformacija i napona za svaki od konačnih elemenata.

Deformacije i naponi u trougaonim pločama:

¹⁰ Detaljnije o ovoj problematici pogledati literatura [3] -V.A.Lubarda .

DEFORMACIJE U TROUGAONOJ PLOCI 1 (Konačni element 1)

=====

Epsilon 1
1.0e-004 *

0.0198
0.0639
0.2133

NAPONI U TROUGAONOJ PLOCI 1 (Konačni element 1)

=====

Sigma 1
1.0e+003 *

0.9238
1.5854
1.6000

DEFORMACIJE U TROUGAONOJ PLOCI 2 (Konačni element 5)

=====

Epsilon 2
1.0e-004 *

0.0229
0.0000
0.2133

NAPONI U TROUGAONOJ PLOCI 2 (Konačni element 5)

=====

Sigma 2
1.0e+003 *

0.5156
0.1719
1.6000

DEFORMACIJE U TROUGAONOJ PLOCI 3 (Konačni element 6)

=====

Epsilon 3
1.0e-004 *

-0.0229
0.0000
0.2133

NAPONI U TROUGAONOJ PLOCI 3 (Konačni element 6)

=====

Sigma 3
1.0e+003 *

-0.5156
-0.1719
1.6000

DEFORMACIJE U TROUGAONOJ PLOCI 4 (Konačni element 4)

```

=====
Epsilon 4
1.0e-004 *

-0.0198
-0.0639
0.2133

```

NAPONI U TROUGAONOJ PLOCI 4 (Konačni element 4)

```

=====
Sigma 4
1.0e+003 *

-0.9238
-1.5854
1.6000

```

Vrijednosti pomjeranja su u [m] a napona u [KN/m²]

Deformacije i naponi u pravougaonim pločama:

DEFORMACIJE U PRAVOUGAONOJ PLOCI 1 (Konačni element 2)

```

=====
Epsilon 1
1.0e-005 *

-0.0315
0.6388
-0.0000

```

NAPONI U PRAVOUGAONOJ PLOCI 1 (Konačni element 2)

```

=====
Sigma 1
1.0e+003 *

0.4082
1.4136
-0.0000

```

DEFORMACIJE U PRAVOUGAONOJ PLOCI 2 (Konačni element 3)

```

=====
Epsilon 2
1.0e-005 *

0.0315
-0.6388
-0.0000

```

NAPONI U PRAVOUGAONOJ PLOCI 2 (Konačni element 3)

```

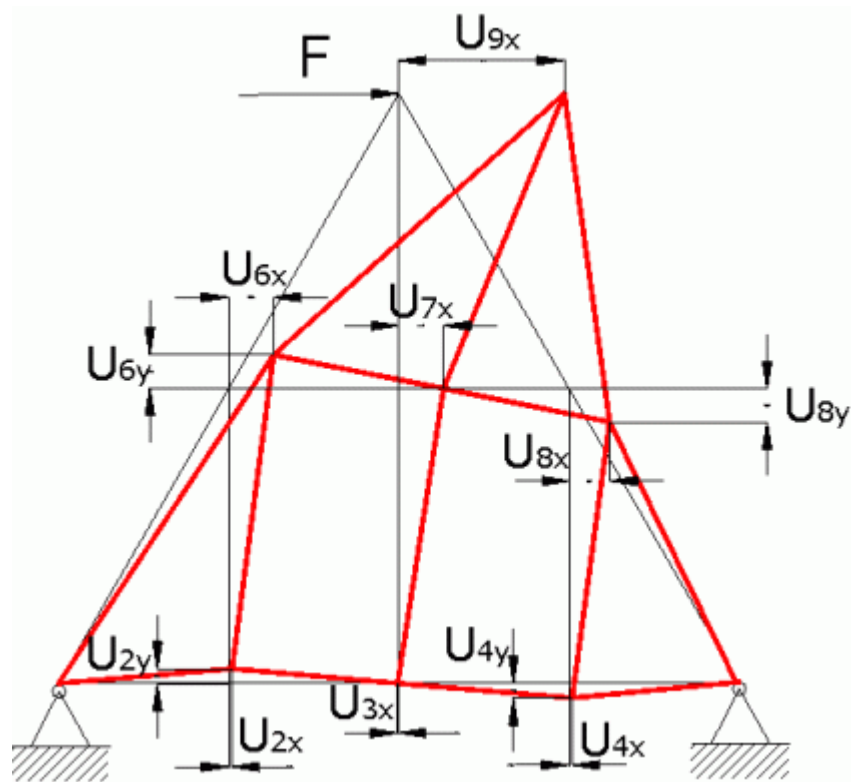
=====
Sigma 2
1.0e+003 *

-0.4082
-1.4136
-0.0000

```

Vrijednosti pomjeranja su u [m] a napona u [KN/m²]

Na osnovu već dobijenih vrijednosti pomjeranja u čvorovima možemo nacrtati deformisanu konfiguraciju modela. Na slici 2.4 prikazana je deformisana konfiguracija modela.



Slika 2.4 - Deformisana struktura modela

Uočavamo da relativna pomjeranja čvorova iznose nekoliko [μm]. Minimalno pomjeranje je u čvoru 3 i iznosi svega $0.16[\mu\text{m}]$ u negativnom pravcu x-ose. Maksimalno pomjeranje je u pozitivnom pravcu x-ose i iznosi $24,33[\mu\text{m}]$. U sljedećoj tabeli date su vrijednosti pomjeranja u pojedinim čvorovima u [μm].

Tabela 3 - Vrijednosti pomjeranja u čvorovima u [μm]

	Čvorovi								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0	0.49	-0.16	0.49	0	6.58	6.58	6	24.33
y	0	2.15	0	-2.15	0	4.92	0	-4.92	0

• Zaključak

***Komentar rezultata

Na str. 8 dati su rezultati ove analize. Uočavamo, da su s obzirom na simetričnu geometriju modela, vrijednosti reakcija u osloncima iste, suprotno orijentisane (vidjeti sliku 2.1, gdje su smjerovi naznačeni onako kako smo ih pretpostavili, dok nam rezultati na str.8 pokazuju da je njihov smjer suprotan od pretpostavljenog). Takođe možemo uočiti da su pomjeranja u čvorovima veoma malog reda (reda nekoliko μm).

***Funkcije oblika (Interpolacione funkcije)

Funkcijama oblika (shape function) opisujemo polje deformacija, napona i drugih uticaja u KE. Pomoću njih uspostavljamo neposrdnu vezu između pomjeranja u bilo kojoj tački polja elementa i pomjeranja u čvornim tačkama. U ovom slučaju korišćeni su *Lagrange*-ovi¹¹ interpolacioni polinomi a detaljnije o ovome pogledati u literaturi [2] str. 21 i 26, gdje je detaljno opisano na koji način dolazimo do ovih relacija.

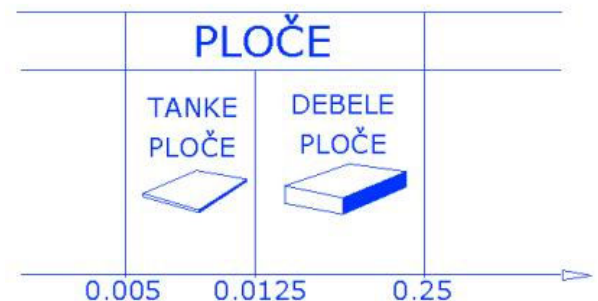
***Izbor KE i dokaz konvergencije numeričkog rješenja

Na slici 2.2 prikazan je diskretni model i kao što se na slici može vidjeti, diskretizovan je upotrebom ravanskih **KE** tipa trougaone i četvorougona (pravougona) ploče. Postavlja se pitanje koliko je ovaj diskretni model dobro izabran? U tom smislu, u **MKE** se ovakvi problemi podvrgavaju provjeri tačnosti numeričkih rješenja, tj. potrebno je odrediti kojem tačnom numeričkom rješenju dati rezultat *konvergira*. Prije izvođenja dokaza konvergencije numeričkog rješenja, obratićemo pažnju na geometrijski kriterijum izbora tipa **KE**.

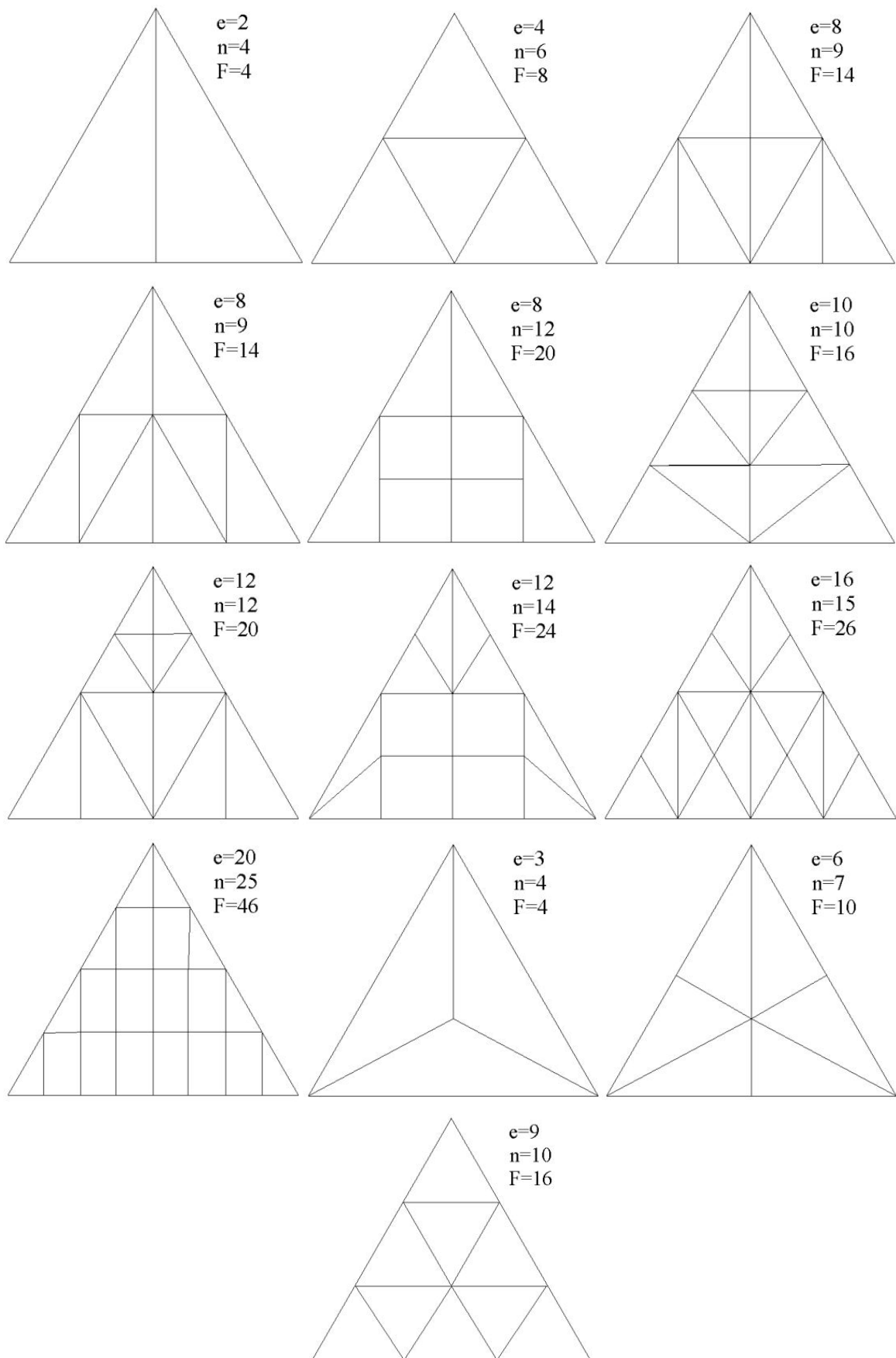
Ploče su ravna prizmatična tijela male debljine u odnosu na ostale dimenzije. Kod tanke ploče je debljina $1/10$ ostalih dimenzija, i pri tome se smatra da pri spoljašnjem opterećenju nastaju male deformacije ploča, koje ne prelaze $1/5$ debljine ploče. Prema autorima *Timošenko, Vojnovski-Kriger*, geometrija **tankih** ploča se kreće u dijapazonu $h/L = 1/80 \div 1/200$, dok je kod **debelih** ploča taj odnos u granicama (količnik debljine i dužine (širine) ploče - prema *Poceskom*) $h/L = 1/4 \div 1/80$. Debele ploče se koriste za najveća opterećenja. Još je bitno napomenuti da ploča prenosi spoljašnje dejstvo unutrašnjim momentima savijanja, za razliku od ljuski koja prenosi spoljašnje dejstvo membranskim naponima.

Geometrijski kriterijum gore pomenutih autora je i ovdje korišćen prilikom izbora tipa **KE**. I za ovaj primjer se može reći da odnos dimenzija pripada opsegu debelih ploča. Pri tome smo kao odnos dimenzija koristili odnos debljine i kateta trougaonog **KE**, odnosno odnos debljine i širine (visine) kod pravouganih **KE**. Pri tome uočavamo, da ako želimo da nam **KE** zadovoljava geometrijski kriterijum ne smijemo "ići ispod" 20 cm po dužini stranice trougaone, odnosno pravougane ploče.

Na slici 2.5 ćemo prikazati neke varijante mreže **KE** za posmatrani model trougaone ploče.



¹¹ Najveću primjenu danas su našle tri klase interpolacionih funkcija: *Lagrange*-ovi i *Hermit*-ovi polinomi, *Serendipity* funkcije



Slika 2.4 - Nekoliko varijanti diskretnih modela, gdje nam je: **e**-broj elemenata, **n**-broj čvorova i **F**-broj stepeni slobode sistema

Klasičnim postupkom rješavanja zadataka **MKE** zahtjeva se dokaz uspješnosti pristupa, a realizuje se kroz tri vrste provjere:

1. Utvrđivanjem tačnosti numeričkog izračunavanja,
2. Utvrđivanjem numeričke stabilnosti postupka i
3. Ispitivanjem konvergencije rješenja.

Bliskost analitičkog i numeričkog rješenja predstavlja tačnost numeričkog izračunavanja. U ovom slučaju analitičko rješenje je vrlo teško dobiti sa obzirom na složenost problema.

Pod utvrđivanjem numeričke stabilnosti podrazumjevamo provjeru postojanja svih rješenja, traženih u svim etapama razvoja modela, pri različitim vrstama opterećenja, bez prekida u numeričkom izvršenju procedura.

Dok pod **konvergencijom** podrazumjevamo numeričko približenje uzastopnih rješenja tačnoj vrijednosti. Shodno ovome dokaz konvergencije se izvodi formiranjem niza sukcesivnih mreža konačnih elemenata različitih veličina. U graničnom slučaju, kada veličine konačnih elementa postanu vrlo male, dobija se tačno numeričko rješenje. I pri tome moraju biti ispunjena dva slova:

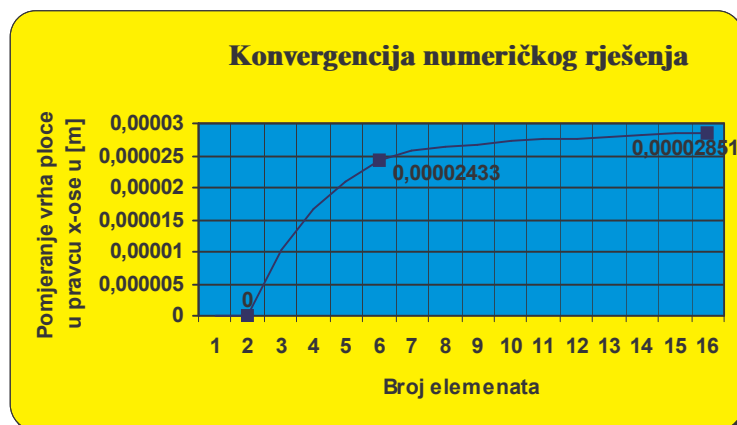
- Izabrana deformaciona funkcija **KE** treba da bude tako definisana da pomjeranja elementa kao cijeline (kao krutog tijela) ne prouzrokuju deformacije (napone) u samom elementu.
- Izabrana deformaciona funkcija mora da da konačna pomjeranja na granicama elementa (Kriterijum neprekidnosti među njima)

Potrebno je još u cilju dokaza tačnosti dobijeno rješenje podvrći provjerama:

1. Rješavamo neki poznati analitički problem istim tipom i veličinom **KE**, na osnovu čega se ocjenjuje kvalitet primjenjenog **KE** i kvalitet modeliranja. Ovdje provjeravamo da li su na primjer pomjeranja, naponi, istog reda kao i kod modela kojeg analiziramo.
2. Posmatranjem položaja asimptote dobijene iz uzastopnih monotono konvergirajućih rješenja, mreža različitih gustina, ocjenjujemo položaj tačnog numeričkog rješenja. U praksi je ova metoda češće korišćena i biće primjenjena i ovom slučaju.

Dokaz konvergencije shodno teorijskim uslovima za **2D** površinske elemente, zahtjeva formiranje finije mreže, diobom površina elemenata grube mreže u dva koordinatna pravca.

U našem slučaju posmatrali smo pomjeranje vrha trougaone ploče u pravcu x ose za tri diskretna modela različitih gustina mreža **KE**. Pri tom smo od početnog modela sa dva **KE** formirali model dat ovim zadatkom, a od njega dijeleći pravougaonike na po četiri a trougaone na po dva nova **KE** formirali treći diskretni model. Izabrana geometrija **KE** ovih diskretnih modela pripada opsegu debelih ploča, ranije pomenutih autora. Dalja dioba **KE** pri zadržavanju iste debljine, vodila bi ka zapreminskim **KE** i smanjilo bi adekvatnost funkcija oblika kojima se odlikuju elementi debele ploče kada bi bile primjenjene na **3D KE** sa osam čvorova.



Na narednom dijagramu jasno se uočava vrijednost kojoj konvergira numeričko rješenje tj. približava se vrijednosti od oko 0.000029 [m]. Modeli koji su posmatrani za dokaz konvergencije su modeli 1, zad. 2 (naš zadatak) i model 9. Sa respektivno 2, 6 i 16 elemenata. Iz početnog posmatranog modela, drugi smo formirali dijeleći trougaoni **KE** na po dva nova trougaona i jedan

novi pravougaoni. Dok smo treći model formirali, dijeleći pravougaoni **KE** na četiri nova trougaona **KE**, trougaone na po dva nova trougaona **KE**.

Modeli koji nezadovoljavaju geometrijski kriterijum izbor **KE** su modeli 6, 7 i 10. Jer, kod ovih modela odnos dimenzija ne pripada dozvoljenom opsegu. Vidjeti sliku 2.4.

***Broj stepeni slobode i širina pojasa matrice krutosti

Broj stepeni slobode sistema možemo izračunati kao:

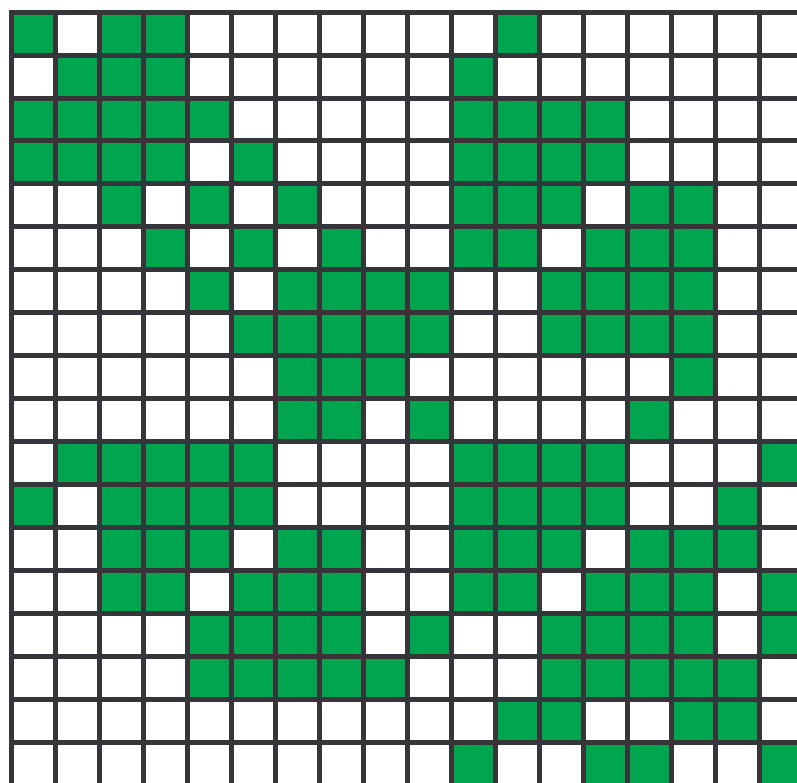
$$F = \sum_{i=1}^n q_i \cdot p - S = N - S \text{ - broj stepeni slobode sistema}$$

$$N = \sum_{i=1}^n q_i \cdot p - (\text{broj čvorova}) \times (\text{broj stepeni slobode u čvoru})$$

S - broj veza (reakcije veza)

Pa je u ovom slučaju: $F = 9 \cdot 2 - 4 = 14$

Širina pojasa matrice krutosti je 24, a red matrice krutosti je 18x18, sa ukupno 324 elementa.



Pojasni oblik matrice krutosti sistema - K

***Deformacije i naponi

Deformacije i naponi u **KE** su u dozvoljenim granicama. Ako uzmemo da je za čelik¹² sa moduom elastičnosti $E = 200 \text{ [GPa]} = 2 \cdot 10^4 \text{ [KN/cm}^2\text{]}$, napon na granici tečenja: $R_e = 240 \text{ [MPa]}$, odnosno granica kidanja: $R_m = 450 \text{ [MPa]}$, vidimo da je maksimalni napon (u ovom slučaju u tangentnom pravcu) koji se pojavljuju u **KE** jednak $1,6 \cdot 10^3 \text{ [KN/m}^2\text{]}$. Što je znatno manje od napona na granici tečenja koji iznosi $R_e = 240.000 \text{ [KN/m}^2\text{]}$. Ovdje smo samo htjeli da naglasimo da su deformacije koje se javljaju u **KE** u oblasti elastičnosti. Naravno, problem

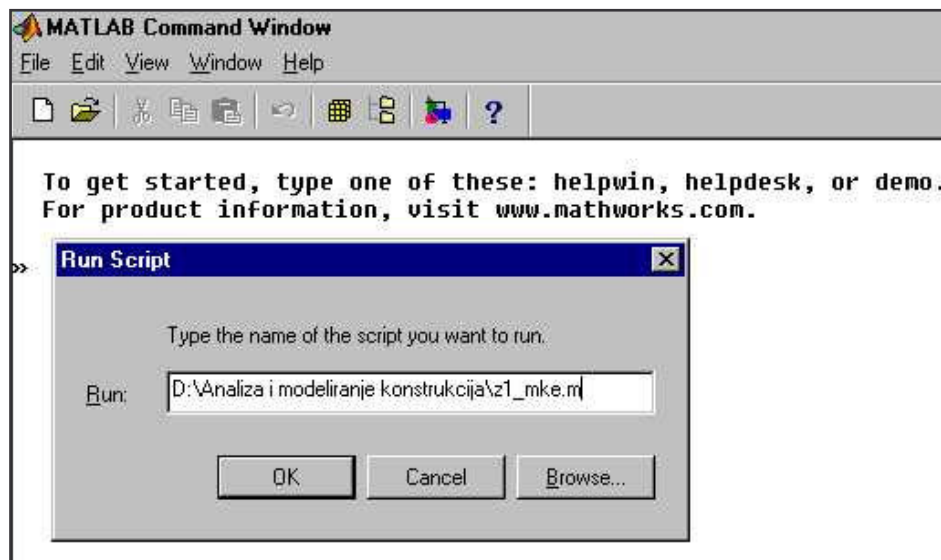
¹² Ove su vrijednosti dosta relativne i zavise od vrste čelika. Pogledati literatura [3]- V.A. Lubarda str.91.

dimenzionisanja i provjere naponskog stanja zahteva uzimanje u obzir i niz drugih faktora, kao što su stepen sigurnosti i drugi.

DODATAK



A Dodatak A



Nakon startovanja **Matlab-a**¹³ i pozivanja odgovarajućeg script file-a (prikazano na slici A-1), potrebno je pratiti uputstva koja se ispisuju u **command-**nom prozoru Windows-a.

A-1 - Izgled startnog ekrana

Listing **m** file-a koji je korišćen u prvom zadatku je dat u narednom dijelu teksta:

```

%-----
%-----MKE 1D ver 1.0-----
%-----
%Predmet: Analiza i modeliranje konstrukcija
% Oblast: Metoda konacnih elemenata (MKE)
% Predavanja: Prof. Dr Zoran Culafic & Dr Sreten Savicevic
%Semestar - VII i VIII
%Masinski fakultet Podgorica - Faculty of Mechanical Engineering
%Autor: Muhidin Kozica
%Datum: 10 -novembar- 2002
%E-mail: mkozica@hotmail.com
%WEB: www.kozica.cjb.net
%Opis: Ovaj script file namjenjen je rjesavanju sistema sastavljenog
% od stapova (zapravo resetke). Kao konacni elementi (KE) koriste se
% 1D linijski elementi (stapovi) razlicitog porednog presjeka. Program
% je interaktivan. Kao ulazni podaci, definisu se: broj stapova, broj
% cvorova, vrsta popreznog presjeka. Zatim se u obliku vrste unose
% nepoznate vrijednosti pomjeranja, i opterecenja. Nakon cega se na
% kraju kao izlazni podaci dobijaju matrice krutosti, pomjeranja i
% matrica sila.
clear all;
clc;

```

¹³ U ovoj analizi je korišćena verzija **Matlab-a** 5.3.0.10183 (R11), Jan. '99.

```

disp('=====PROGRAM=====');
disp('-      Rijesavanje sistema sastavljenog od n stapova      -');
disp('-      (ramovi, odnosno resetke)                          -');
disp('-      pomocu Metode Konacnih Elemenata (MKE).              -');
disp('- ***Predpostavke***                                       -');
disp('- Svi stapovi su jednakog popreznog presjeka povrrsine A   -');
disp('- i od istog materijala modula elasticnosti E              -');
disp('=====');
disp(' ');
disp(' ');
disp(' ');
%-----Unos potrebnih podataka
disp('=====UNOS POCETNIH PODATAKA=====');
e=input(' Od koliko stapova se sistem sastoji? (Unesite broj): ');
n=input(' U koliko cvorova su ti stapovi vezani? (Unesite broj): ');
K=zeros(3*n);
disp(' ');
disp(' Koji je oblik popreznog presjeka stapa? ');
disp(' 1. Kvadratni ');
disp(' 2. Pravougaoni ');
disp(' 3. Tankozidni kvadratni (kutija) ');
disp(' 4. Tankozidni pravougaoni (kutija) ');
disp(' 5. Kruzni ');
disp(' 6. Kruzni prsten (debela cijev) ');
disp(' 7. Tankozidni kruzni prsten (tanka cijev) ');
disp(' 8. Drugi...');
i=input(' Presjek --(unesite broj)--> : ');
disp(' ');
if i==1
    a=input(' Unesite duzinu stranice u [cm]: ');
    a=a/100;
    A=a^2;
    I=(a^4)/12;
    clear a;
end
if i==2
    h=input(' Duzina vertikalne stranice u [cm]: ');
    h=h/100;
    b=input(' Duzina horizontalne stranice u [cm]: ');
    b=b/100;
    A=b*h;
    I=(b*h^3)/12;
    clear b,h;
end
if i==3
    H=input(' Duzina spoljasnje ivice u [cm]: ');
    H=H/100;
    h=input(' Duzina unutrasnje ivice u [cm]: ');
    h=h/100;
    A=H^2-h^2;
    I=(H^4-h^4)/10;
    clear H,h;
end
if i==4
    H=input(' Duzina spoljasnje vertikale u [cm]: ');
    h=input(' Duzina unutrasnje vertikale u [cm]: ');
    B=input(' Duzina spoljnje horizontale u [cm]: ');
    b=input(' Duzina unutrasnje horizontale u [cm]: ');
    H=H/100; h=h/100; B=B/100; b=b/100;
    A=B*H-b*h;
    I=(B*H^3 - b*h^3)/12;
    clear B,b,H,h;
end

```

```

if i==5
    r=input(' Unesite duzinu poluprecnika u [cm]: ');
    r=r/100;
    A=pi*(r^2);
    I=(pi/4)*(r^4);
    clear r;
end
if i==6
    R=input(' Duzina spoljasnjeg poluprecnika u [cm]: ');
    R=R/100;
    r=input(' Duzina unutrasnjeg poluprecnika u [cm]: ');
    r=r/100;
    A=(R^2-r^2)*pi;
    I=(R^4-r^4)*pi/4;
    clear R,r;
end
if i==7
    R=input(' Duzina spoljasnjeg poluprecnika u [cm]: ');
    R=R/100;
    delta=input(' Debljina zida u [cm]: ');
    delta=delta/100;
    A=2*pi*R*delta;
    I=(R^3)*pi*delta;
    clear R,delta;
end
if i==8
    A=input(' Unesite površinu poprečnog presjeka u kvadratnim metrima: ');
    I=input(' Unesite moment inercije u metrima^4: ');
end
disp(' ');
disp(' Unesite Young-ov modul elastičnosti u [kN/m^2]: ');
E=input(' Na primjer ako je E=2*10^8 [kN/m^2] unijeti samo broj "2" : ');
E=E*10^8;
B=E*I;%Savojna krutost
disp(' ');
disp('====UNOS POTREBNIH PODATAKA O STAPOVIMA====');
disp(' NAPOMENA: Duzine unositi u metrima, a uglove u stepenima! ');
for i=1:e
    disp(' ');
    disp('-----');
    disp([' Stap broj: ' num2str(i)]);
    t(i,1)=input(' Duzina stapa u [m]: ');
    t(i,2)=input(' Polazi od cvora broj: ');
    t(i,3)=input(' Završava se u cvoru broj: ');
    t(i,4)=input(' Sa horizontalom gradi ugao: ');
    disp('-----');
    t(i,4)=t(i,4)*(pi/180);
    t(i,5)=cos(t(i,4)); % Ovo je u zadatku "c=cos(alfa)"
    t(i,6)=sin(t(i,4)); % Ovo je u zadatku "s=sin(alfa)"
end
disp('====UNOS OPTERECENJA I POMJERANJA====');
disp(' ');
disp(' Unesite redne brojeve vrsta gdje pomjeranja nisu poznata?');
b=input(' Na primjer: [1 4 8 10 11 ...]: ');
disp(' ');
disp(' Sada unesite brojne vrijednosti opterećenja u tim vrstama ');
disp('          sile u [kN] a momente u [kNm]. ');
f=input(' Na primjer: [5 -0.8 7.25 6 ...]: ');
tic; %Reperna linija za racunanje vremena procesiranja
%-----Završen unos podataka

%-----Formiranje matrice krutosti

```

```

for i=1:e % Ponavlja se e puta(koliko ima stapova)
    l=t(i,1); % Duzina i-tog stapa
    c=t(i,5);
    s=t(i,6);
    Y=zeros(3*n);
    k(1,1)=E*A/l*c^2+12*B/l^3*s^2;
    k(1,2)=E*A/l*c*s-12*B/l^3*s*c;
    k(1,3)=-6*B/l^2*s;
    k(1,4)=-k(1,1);
    k(1,5)=-k(1,2);
    k(1,6)=k(1,3);
    k(2,1)=k(1,2);
    k(2,2)=E*A/l*s^2+12*B/l^3*c^2;
    k(2,3)=6*B/l^2*c;
    k(2,4)=-k(2,1);
    k(2,5)=-k(2,2);
    k(2,6)=k(2,3);
    k(3,1)=k(1,3);
    k(3,2)=k(2,3);
    k(3,3)=4*B/l;
    k(3,4)=-k(3,1);
    k(3,5)=-k(3,2);
    k(3,6)=2*B/l;
    k(4,1)=k(1,4);
    k(4,2)=k(2,4);
    k(4,3)=k(3,4);
    k(4,4)=k(1,1);
    k(4,5)=-k(4,2);
    k(4,6)=k(4,3);
    k(5,1)=k(1,5);
    k(5,2)=k(2,5);
    k(5,3)=k(3,5);
    k(5,4)=k(4,5);
    k(5,5)=k(2,2);
    k(5,6)=k(5,3);
    k(6,1)=k(1,6);
    k(6,2)=k(2,6);
    k(6,3)=k(3,6);
    k(6,4)=k(4,6);
    k(6,5)=k(5,6);
    k(6,6)=k(3,3);
    w=[3*t(i,2)-2 3*t(i,2)-1 3*t(i,2) 3*t(i,3)-2 3*t(i,3)-1 3*t(i,3)];
    Y(w,w)=k;
    K=K+Y; % Matrica krutosti sistema
end
%-----Formirana je matrica krutosti

f=f';
c=K(b,b);
d=inv(c)*f;
for i=1:(3*n)
    U(i)=0;
end
disp(' ');
disp('*****');
disp('*****REZULTATI*****');
disp('*****');
disp(' ');
disp(' MATRICA KRUTOSTI ');
disp('=====');
K %Ispisuje matricu krutosti
U(b)=d;
Up=U';

```

```

U=Up;
disp(' VEKTOR POMJERANJA ');
disp('=====');
U %Ispisuje vektor pomjeranja
S=K*U;
disp(' VEKTOR SILA ');
disp('=====');
S %Ispisuje vektor sila
disp(' ');
disp(' OSTALE INFORMACIJE ANALIZE ');
disp('=====');
disp(' ');
disp([' Broj elemenata: ' num2str(e)]);
disp(' ');
disp([' Broj cvorova: ' num2str(n)]);
F=length(b); %Racuna broj stepeni slobode sistema
disp(' ');
disp([' Broj stepeni slobode sistema: ' num2str(F)]);
disp(' ');
%toc; %Završeno mjerenje vremena procesiranja
disp([' Vrijeme procesiranja u [sec]: ' num2str(toc)]);
disp(' ');
disp('----- KRAJ -----');
end %Kraj programa

```

• Primjer:

Postupak unosa podataka nakon startovanja Matlab-a, a koji se konkretno odnosi na zadatak 1, prikazan je u narednom dijelu teksta.

```

=====PROGRAM=====
- Rijesavanje sistema sastavljenog od n stapova -
- (ramovi, odnosno resetke) -
- pomocu Metode Konacnih Elemenata (MKE). -
- ***Predpostavke*** -
- Svi stapovi su jednakog poprecnog presjeka površine A -
- i od istog materijala modula elasticnosti E -
=====
=====UNOS POCETNIH PODATAKA=====
Od koliko stapova se sistem sastoji? (Unesite broj): 5
U koliko cvorova su ti stapovi vezani? (Unesite broj): 4

Koji je oblik poprecnog presjeka stapa?
1. Kvadratni
2. Pravougaoni
3. Tankozidni kvadratni (kutija)
4. Tankozidni pravougaoni (kutija)
5. Kruzni
6. Kruzni prsten (debela cijev)
7. Tankozidni kruzni prsten (tanki cijev)
8. Drugi...
Presjek --(unesite broj)-> : 5

Unesite duzinu poluprecnika u [cm]: 2.5

Unesite Young-ov modul elasticnosti u [kN/m^2]:
Na primjer ako je E=2*10^8 [kN/m^2] unijeti samo broj "2" : 2

=====UNOS POTREBNIH PODATAKA O STAPOVIMA=====
NAPOMENA: Duzine unositi u metrima, a uglove u stepenima
-----

```

```

Stap broj: 1
Duzina stapa u [m]: 0.5
Polazi od cvora broj: 1
Zavrsava se u cvoru broj: 2
Sa horizontalom gradi ugao: 0
-----

```

```

Stap broj: 2
Duzina stapa u [m]: 0.866025
Polazi od cvora broj: 2
Zavrsava se u cvoru broj: 3
Sa horizontalom gradi ugao: 90
-----

```

```

Stap broj: 3
Duzina stapa u [m]: 0.5
Polazi od cvora broj: 2
Zavrsava se u cvoru broj: 4
Sa horizontalom gradi ugao: 0
-----

```

```

Stap broj: 4
Duzina stapa u [m]: 1
Polazi od cvora broj: 1
Zavrsava se u cvoru broj: 3
Sa horizontalom gradi ugao: 60
-----

```

```

Stap broj: 5
Duzina stapa u [m]: 1
Polazi od cvora broj: 3
Zavrsava se u cvoru broj: 4
Sa horizontalom gradi ugao: -60
-----

```

=====UNOS OPTERECENJA I POMJERANJA=====

Unesite redne brojeve vrsta gdje pomjeranja nisu poznata?
Na primjer: [1 4 8 10 11 ...]: [3 4 5 6 7 8 9 12]

Sada unesite brojne vrijednosti opterećenja u tim vrstama
sile u [kN] a momente u [kNm].
Na primjer: [5 -0.8 7.25 6 ...]: [0 8.65 0 -11.25 8.65 0 1.25 0]

Teorijska osnova na kojoj se zasniva ovaj program je data u literaturi [1].Ovdje je korišćena matrica krutosti za štap posmatrana u odnosu na globalni sistem.A cio problem se svodi na rješavanje matricne zavisnosti $\mathbf{S}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{U}$, pri čemu su iskorišćene prednosti programskog paketa Matlab koji je baš pogodan pri radu sa matricama.

Ova verzija programa je u potpunosti funkcionisala i testirana na par konkretnih primjera.Program(*script file*) bi mogao u narednim verzijama da se jednostavnije prilagodi korsniku, čime bi interaktivnost programa bila podignuta na viši nivo, eventualno dodati dio koji se odnosi na računanje deformacija i napona, izbjeći pretpostavke vezane da su svi štapovi istog poprečnog presjeka, isog modula elastičnosti, tj. potrebno je posmatrati generalnije problem.Program za sada nema bug-ove(bar nisu poznati).

- Vrijeme procesiranja iznosi **0.281** sec. Izvršeno na računaru: Intel Celeron 566 MHz, 48 MB SDRAM na Win NT (service pack 6) i MATLAB Version 5.3.0.10183 (R11)

B Dodatak B

Nakon startovanja Matlab-a i script file-a datog u narednom dijelu teksta, potrebno je pratiti instrukcije date u **command**-nom prozoru Windowsa.

Listing **m** file-a koji je korišćen u drugom zadatku je dat u narednom dijelu teksta:

```
%-----
%-----MKE 2D ver 1.0-----
%-----
%Predmet: Analiza i modeliranje konstrukcija
% Oblast: Metoda konacnih elemenata (MKE)
% Profesor: Prof. Dr Zoran Culafic & Dr Sreten Savicevic
%Semestar - VII i VIII
%Masinski fakultet Podgorica - Faculty of Mechanical Engineering
%Autor: Muhidin Kozica
%Datum: 10 -novembar- 2002
%E-mail: mkozica@hotmail.com
%WEB: www.kozica.cjb.net
%Opis: Ovaj script file namjenjen je rjesavanju sistema sastavljenog
%od stapova i ravanskih 2D konacnih elemenata(trougla i cetvorougla)
%Program je interaktivan.Kao ulazni podaci, definisu se: broj stapova,
% broj cvorova, vrsta popreznog presjeka.Zatim se u obliku vrste unose
% nepoznate vrijednosti pomjeranja, i opterecenja.Nakon cega se na
% kraju kao izlazni podaci dobijaju matrice krutosti, pomjeranja i
% matrica sila.
%Napomena: Ukoliko se u tekstu pominje 'trougao' ili 'pravougaonik',
% misli se na trougaonu i pravougaonu ploču-ravanski KE!
% Pravougaoni KE nisu zarotirani, vec se njihov koordinatni
% sistem poklapa sa globalnim.Nema transformacione matrice!
% Sile se unose u [KN], momenti u [KNm] duzine u [m], osim
% ako nije specijalno naglaseno, uglovi u stepenima!
clear all;
clc;
disp('====PROGRAM====');
disp('- Rjesavanje sistema sastavljenog od ravanskih elemenata -');
disp('- (trougaone odnosno pravougaone ploce) i stapova -');
disp('- pomocu Metode Konacnih Elemenata (MKE) -');
disp('- ***Predpostavke: -');
disp('- Isti KE su iste debljine, moguće je birati razlicitu -');
disp('- debljinu KE(vazi za troug. i pravougaone ploce) -');
disp('- od istog materijala modula elasticnosti E -');
disp('- odnosno istog Poisson-ovog koeficijenta "ni" -');
disp('====');
disp(' ');
disp(' ');
disp(' ');
%-----Unos potrebnih podataka
n=input(' Koliko cvorova ima sistem : ');
K=zeros(2*n); %Definisali smo dimenzije matrice krutosti
Kst=zeros(2*n);%Ovo je posebno matrica krutosti za stapove
Ktr=zeros(2*n);%Ovo je posebno matrica krutosti za troug. ploce
Kpr=zeros(2*n);%Ovo je posebno matrica krutosti za pravoug. ploce
disp(' ');
disp(' Unesite Young-ov modul elasticnosti u [kN/m^2]: ');
```

```

E=input(' Na primjer ako je E=2*10^8 [kN/m^2] unijeti samo broj "2" : ');
E=E*10^8;
disp(' ');
ni=input(' Unesite Poisson-ov koeficijent: ');
disp(' ');
%-----Završen unos opstih podataka
%----Odavde pa do kraja koristimo promjenljive: n,K,Kst,Kr,Kpr,E,ni
%-----

%-----
%-----STAPOVI-----
%-----

brst=input(' Koliko stapova ima u sistemu: ');
if brst>0
    disp(' ');
    disp(' Koji im je oblik popreznog presjeka ? ');
    disp(' 1. Kvadratni ');
    disp(' 2. Pravougaoni ');
    disp(' 3. Tankozidni kvadratni (kutija) ');
    disp(' 4. Tankozidni pravougaoni (kutija) ');
    disp(' 5. Kruzni ');
    disp(' 6. Kruzni prsten (debela cijev) ');
    disp(' 7. Tankozidni kruzni prsten (tanki cijev) ');
    disp(' 8. Drugi...');
    i=input(' Presjek --(unesite broj)--> : ');
    disp(' ');
    if i==1
        a=input(' Unesite duzinu stranice u [cm]: ');
        a=a/100;
        A=a^2;
        I=(a^4)/12;
        clear a;
    end
    if i==2
        h=input(' Duzina vertikalne stranice u [cm]: ');
        h=h/100;
        b=input(' Duzina horizontalne stranice u [cm]: ');
        b=b/100;
        A=b*h;
        I=(b*h^3)/12;
        clear b,h;
    end
    if i==3
        H=input(' Duzina spoljasnje ivice u [cm]: ');
        H=H/100;
        h=input(' Duzina unutrasnje ivice u [cm]: ');
        h=h/100;
        A=H^2-h^2;
        I=(H^4-h^4)/10;
        clear H,h;
    end
    if i==4
        H=input(' Duzina spoljasnje vertikale u [cm]: ');
        h=input(' Duzina unutrasnje vertikale u [cm]: ');
        b=input(' Duzina unutrasnje horizontale u [cm]: ');
        H=H/100; h=h/100; B=B/100; b=b/100;
        A=B*H-b*h;
        I=(B*H^3 - b*h^3)/12;
        clear B,b,H,h;
    end
    if i==5
        r=input(' Unesite duzinu poluprecnika u [cm]: ');
        r=r/100;

```

```

    A=pi*(r^2);
    I=(pi/4)*(r^4);
    clear r;
end
if i==6
    R=input(' Duzina spoljasnjeg poluprecnika u [cm]: ');
    R=R/100;
    r=input(' Duzina unutrasnjeg poluprecnika u [cm]: ');
    r=r/100;
    A=(R^2-r^2)*pi;
    I=(R^4-r^4)*pi/4;
    clear R,r;
end
if i==7
    R=input(' Duzina spoljasnjeg poluprecnika u [cm]: ');
    R=R/100;
    delta=input(' Debljina zida u [cm]: ');
    delta=delta/100;
    A=2*pi*R*delta;
    I=(R^3)*pi*delta;
    clear R,delta;
end
if i==8
    A=input(' Unesite površinu poprečnog presjeka u kvadratnim metrima: ');
    I=input(' Unesite moment inercije u metrima^4: ');
end
clear i;
%-----Odavde izlaze samo A i I za stapove i to u m^2 tj m^4
B=E*I; % Savojsna krutost
disp(' ');
disp('====UNOS POTREBNIH PODATAKA O STAPOVIMA=====');
disp(' NAPOMENA: Duzine unositi u metrima, a uglove u stepenima! ');
for i=1:brst
    disp(' ');
    disp('-----');
    disp([' Stap broj: ' num2str(i)]);
    t(i,1)=input(' Duzina stapa u [m]: ');
    t(i,2)=input(' Polazi od cvora broj: ');
    t(i,3)=input(' Završava u cvoru broj: ');
    t(i,4)=input(' Sa horizontalom gradi ugao: ');
    disp('-----');
    t(i,4)=t(i,4)*(pi/180);
    t(i,5)=cos(t(i,4)); % Ovo je u zadatku "c=cos(alfa)"
    t(i,6)=sin(t(i,4)); % Ovo je u zadatku "s=sin(alfa)"
end
clear i;

%-----Formiranje matrice krutosti-----
%clc % Brise se sadržaj command-nog prozora(nije aktivno)
for i=1:brst
    l=t(i,1); % Duzina i-tog stapa
    c=t(i,5);
    s=t(i,6);
    Y=zeros(2*n); % Istih je dimenzija kao i K bez obzira na ploce
    k(1,1)=(E*A/l)*c^2 ;
    k(1,2)=(E*A/l)*c*s ;
    k(1,3)=-k(1,1);
    k(1,4)=-k(1,2);
    k(2,1)=k(1,2);
    k(2,2)=(E*A/l)*s^2 ;
    k(2,3)=-k(2,1);
    k(2,4)=-k(2,2);
    k(3,1)=-k(1,1);

```

```

k(3,2)=-k(1,2);
k(3,3)=k(1,1);
k(3,4)=k(1,2);
k(4,1)=-k(1,2);
k(4,2)=-k(2,2);
k(4,3)=k(3,4);
k(4,4)=k(2,2);
w=[2*t(i,2)-1 2*t(i,2) 2*t(i,3)-1 2*t(i,3)];
Y(w,w)=k;
Kst=Kst+Y; % Matrica krutosti
end
%-----Matrica krutosti formirana-----
end
%-----
clear A B I Y c i k l s t w;
%-----Odavde nam je jedini izlazni podatak Kst
%-----
%Kst % Maci '%' ispred ukoliko zelite da se ispisuje matrica
%-----
%-----Trougaone ploce-----
%-----
disp(' ');
disp('=====');
disp('-----TROUGAONE PLOCE-----');
disp('=====');
disp(' ');
brtr=input(' Koliko ima trougaonih ploca? ');
if brtr>0
    t=input(' Unesite debljinu trougaonih ploca u [cm]: ');
    t=t/100; % Prevodi u metre
    kapa=(E/(1-ni^2))*[1 ni 0
                     ni 1 0
                     0 0 (1-ni)/2]; % Matrica elasticnosti
    for r=1:brtr
        Y=zeros(2*n);
        disp(' ');
        disp([' Trougaona ploca ' int2str(r)]);
        % Ovdje trouglovi nisu oznaceni kao na diskretnom modelu
        disp(' Unijeti cvorove koji ogranicavaju trougaonu ploču u pozitivnom
smjeru! ');
        i=input(' i = ');
        j=input(' j = ');
        m=input(' m = ');

        % Formiranje pomocne matrice koja ce zapamtiti pripa-
        % dajece indexe ovog trougla u matrici pomjeranja
        % Indexi ce biti smjesteni po vrstama
        h=[2*i-1 2*i 2*j-1 2*j 2*m-1 2*m];
        for q=1:6
            Itr(r,q)=h(q);
        end
        clear h q;
        % Završeno formiranje pomocne matrice koja ce
        % zapamtiti pripadajuće indexe

        disp(' Unesite koordinate cvorova u metrima: ');
        xi=input([' x',int2str(i),' = ']);
        yi=input([' y',int2str(i),' = ']);
        xj=input([' x',int2str(j),' = ']);
        yj=input([' y',int2str(j),' = ']);
        xm=input([' x',int2str(m),' = ']);
        ym=input([' y',int2str(m),' = ']);

```

```

sa=sqrt((xi-xj)^2+(yi-yj)^2);
sb=sqrt((xi-xm)^2+(yi-ym)^2);
sc=sqrt((xj-xm)^2+(yj-ym)^2);
ss=(sa+sb+sc)/2;
A=sqrt(ss*(ss-sa)*(ss-sb)*(ss-sc));
clear sa sb sc ss;

B=(1/(2*A))*[(yj-ym)    0    (ym-yi)    0    (yi-yj)    0
              0    (xm-xj)    0    (xi-xm)    0    (xj-xi)
              (xm-xj) (yj-ym) (xi-xm) (ym-yi) (xj-xi) (yi-yj)];

% Formiranje pomocne matrice preko koje cemo
% izracunati epsilon
q=1:6;
h=[6*r-5 6*r-4 6*r-3 6*r-2 6*r-1 6*r];
Btr(1,h)=B(1,q);
Btr(2,h)=B(2,q);
Btr(3,h)=B(3,q);
clear q h;
% Završeno formiranje pomocne matrice preko
% koje cemo izracunati epsilon

w=[2*i-1 2*i 2*j-1 2*j 2*m-1 2*m];
Y(w,w)=B'*kapa*B*A*t; % Formiranje matrice krutosti za trougao
clear A B w i j m xi xj xm yi yj ym;
Ktr=Ktr+Y;
end % Od for petlje
clear r Y t;
end % Od if naredbe
%-----Završeno rješavanje trougaonih ploca-----
%-----Odavde su nam izlazni podaci Kst, Itr, Btr-----
%Ktr % Maci '%' ispred ukoliko zelite da se ispisuje matrica
%-----
%-----Pravougaone ploce-----
%-----
kapa=(E/(1-ni^2))*[1 ni 0
                  ni 1 0
                  0 0 (1-ni)/2];% Matrica elasticnosti(vazi za oba KE i tr. i pr.)
disp(' ');
disp('=====');
disp('-----PRAVOUGAONE PLOCE-----');
disp('=====');
disp(' ');
brpr=input(' Koliko ima pravougaonih ploca? ');
if brpr>0
    t=input(' Unesite debljinu pravougaonih ploca u [cm]: ');
    t=t/100; % Pretvara u metre
    for r=1:brpr
        Y=zeros(2*n);
        disp(' ');
        disp([' Pravougaona ploca ' int2str(r)]);
        % Ovdje pravougaone ploce nisu oznacene kao na diskretnom modelu
        disp(' Unesite cvorove koji ogranicavaju pravougaonu ploču ');
        disp(' u pozitivnom smjeru, pocevsi od donjeg lijevog: ');
        i=input(' i = ');
        j=input(' j = ');
        m=input(' m = ');
        p=input(' p = ');

        % Formiranje pomocne matrice koja ce zapamtiti pripadajuće indese
        % ovog pravougaonika u matrici pomjeranja
        % Indexi ce biti smjesteni po vrstama
        h=[2*i-1 2*i 2*j-1 2*j 2*m-1 2*m 2*p-1 2*p];

```

```

for q=1:8
    Ipl(r,q)=h(q);
end
clear h q;
% Završeno formiranje pomocne matrice koja ce zapamtiti pripadajuće
indexe
a=input(' Unesite sirinu pravougaone ploce (po x osi) u metrima : ');
a=a/2; % Pogledati literatura [2] strana 25.Sirina pravougaonika je 2a
b=input(' Unesite visinu pravougaone ploce (po y osi) u metrima : ');
b=b/2; % Pogledati literatura [2] strana 25.Visina pravougaonika je 2b

%Ovdje definisemo koliko su pravougaoni konacni elementi zaokrenuti u
% odnosu na ose X i Y.Uglove unijeti u stepenima!
%Ukoliko nema transformacije, onda je ugao izmedju (x i X)=0,
%izmedju (x i Y)=90, izmedju (y i X)=90 a izmedju (y i Y)=0.
%U svim ostalim slucajevima potrebno je navesti tacan ugao u
stepenima!
disp(' Ukoliko se lokalni koordinatni sistem ne poklapa se globalnim
');
disp('          unijeti uglove, prateci naredna uputstva! ');
ugao1=input(' Unesite ugao izmedju x i X(u slucaju poklapanja je 0) :
');
ugao1=ugao1*(pi/180);% Pretvaranje stepena u radijane
ugao2=input(' Unesite ugao izmedju x i Y(u slucaju poklapanja je 90):
');
ugao2=ugao2*(pi/180);
ugao3=input(' Unesite ugao izmedju y i X(u slucaju poklapanja je 90):
');
ugao3=ugao3*(pi/180);
ugao4=input(' Unesite ugao izmedju y i Y(u slucaju poklapanja je 0) :
');
ugao4=ugao4*(pi/180);
% Formiranje pomocne matrice preko koje cemo odrediti epsilon
Bpl(1,8*r-7)=-b; Bpl(1,8*r-6)=0; Bpl(1,8*r-5)=b; Bpl(1,8*r-4)=0;
Bpl(1,8*r-3)=b; Bpl(1,8*r-2)=0; Bpl(1,8*r-1)=-b; Bpl(1,8*r)=0;
Bpl(2,8*r-7)=0; Bpl(2,8*r-6)=-a; Bpl(2,8*r-5)=0; Bpl(2,8*r-4)=-a;
Bpl(2,8*r-3)=0; Bpl(2,8*r-2)=a; Bpl(2,8*r-1)=0; Bpl(2,8*r)=a;
Bpl(3,8*r-7)=-a; Bpl(3,8*r-6)=-b; Bpl(3,8*r-5)=-a; Bpl(3,8*r-4)=b;
Bpl(3,8*r-3)=a; Bpl(3,8*r-2)=b; Bpl(3,8*r-1)=a; Bpl(3,8*r)=-b;
h=[8*r-7 8*r-6 8*r-5 8*r-4 8*r-3 8*r-2 8*r-1 8*r];
Bpl(1,h)=(1/(2*(a*b)))*Bpl(1,h);
Bpl(2,h)=(1/(2*(a*b)))*Bpl(2,h);
Bpl(3,h)=(1/(2*(a*b)))*Bpl(3,h);
clear h;
% Završeno formiranje pomocne matrice preko koje cemo odrediti epsilon

al=a/b; %Ovo je alfa
be=b/a; %Ovo je beta
t1=cos(ugao1);%
t2=cos(ugao2);% Elementi matrice transformacije
t3=cos(ugao3);%
t4=cos(ugao4);%
clear a b ugao1 ugao2 ugao3 ugao4;

Kii=[8*be+4*(1-ni)*al      3*(1+ni)
      3*(1+ni)      8*al+4*(1-ni)*be];
Kmm=Kii;

Kij=[-8*be+2*(1-ni)*al      -3*(1-3*ni)
      3*(1-3*ni)      4*al-4*(1-ni)*be];
Kji=Kij';

```

```

Kim=[-4*be-2*(1-ni)*al      -3*(1+ni)
      -3*(1+ni)             -4*al-2*(1-ni)*be];
Kmi=Kim';

Kin=[4*be-4*(1-ni)*al      3*(1-3*ni)
      -3*(1-3*ni)          -8*al+2*(1-ni)*be];
Kni=Kin';

Kjj=[8*be+4*(1-ni)*al      -3*(1+ni)
      -3*(1+ni)            8*al+4*(1-ni)*be];
Knn=Kjj';

Kjm=[4*be-4*(1-ni)*al      -3*(1-3*ni)
      3*(1-3*ni)           -8*al+2*(1-ni)*be];
Kmj=Kjm';

Kjn=[-4*be-2*(1-ni)*al      3*(1+ni)
      3*(1+ni)              -4*al-2*(1-ni)*be];
Kjn=Kjn';

Kmn=[-8*be+2*(1-ni)*al      -3*(1-3*ni)
      3*(1-3*ni)            4*al-4*(1-ni)*be];
Knm=Kmn';
T=[t1 t2
   t3 t4]; %Matrica transformacije
k=zeros(8);
k ([1 2],[1 2])=T'*Kii*T;
k ([1 2],[3 4])=T'*Kij*T;
k ([1 2],[5 6])=T'*Kim*T;
k ([1 2],[7 8])=T'*Kin*T;
k ([3 4],[1 2])=T'*Kji*T;
k ([3 4],[3 4])=T'*Kjj*T;
k ([3 4],[5 6])=T'*Kjm*T;
k ([3 4],[7 8])=T'*Kjn*T;
k ([5 6],[1 2])=T'*Kmi*T;
k ([5 6],[3 4])=T'*Kmj*T;
k ([5 6],[5 6])=T'*Kmm*T;
k ([5 6],[7 8])=T'*Kmn*T;
k ([7 8],[1 2])=T'*Kni*T;
k ([7 8],[3 4])=T'*Knj*T;
k ([7 8],[5 6])=T'*Knm*T;
k ([7 8],[7 8])=T'*Knn*T;
k=(E*t)/(24*(1-ni^2))*k;
clear Kii Kij Kim Kin Kji Kjj Kjm Kjn Kmi Kmj Kmm Kmn Kni Knj Knm Knn
al be T t1 t2 t3 t4;

w=[2*i-1  2*i  2*j-1  2*j  2*m-1  2*m  2*p-1  2*p];
Y(w,w)=k;
clear i j m p k w;

Kpr=Kpr+Y;
end
clear E ni t Y r;
end
disp('====UNOS POMJERANJA I OPTERECENJA=====');
disp(' Unesite redne brojeve vrsta gdje pomjeranja nisu poznata. ');
disp('          (Ne uzimati u obzir rotacije i momente!) ');
b=input(' Na primjer: [3 5 7 9 12 14 ...]: ');
disp(' ');
disp(' Sada unesite brojne vrijednosti opterećenja u tim vrstama ');
disp('          Sile unositi u [kN] ');
f=input(' Na primjer: [5.42 -0.67 2.52 35.5 ...]: ');
tic;% Reperna tacka za racunanje vremena procesiranja

```

```

%-----Završeno sa pravougaonicima-----
%Kpr % Maci '%' ispred ukoliko zelite da se ispisuje matrica
%-----
%-----FORMIRANJE MATRICE KRUTOSTI SISTEMA-----
%-----
K = Kst + Ktr + Kpr;% Formira se matrica krutosti sistema
clear Kst Ktr Kpr;
%-----Formirali smo matricu krutosti sistema-----
%-----
%-----Odredjivanje pomjeranja i sila-----
%-----
    f=f';
    c=K(b,b);
    d=inv(c)*f;
    for j=1:(2*n)
        U(j)=0;
    end
    clear j;
    U(b)=d;
    clear f c d;
    Up=U';
    U=Up;
    clear Up;
    disp(' ');
    disp('*****');
    disp('*****REZULTATI*****');
    disp('*****');
    disp(' ');
    disp(' MATRICA KRUTOSTI SISTEMA ');
    disp('=====');
    K % Ispisuje matricu krutosti sistema
    disp(' VEKTOR POMJERANJA ');
    disp('=====');
    U % Ispisuje vektor pomjeranja
    S=K*U;
    disp(' VEKTOR SILA ');
    disp('=====');
    S % Ispisuje vektor sila
%-----
%-----Završeno odredjivanje pomjeranja i sila-----
%-----
%-----
%-----Odredjivanje napona i deformacija-----
%-----
%-----Izracunavanje epsilon i sigme za troug.ploce-----
    disp(' ');
    disp('=====');
    disp(' DEFORMACIJE I NAPONI ');
    disp('=====');
    disp(' ');
    for r=1:brtr
        q=1:6;
        h=[6*r-5 6*r-4 6*r-3 6*r-2 6*r-1 6*r];
        B(1,q)=Btr(1,h);
        B(2,q)=Btr(2,h);
        B(3,q)=Btr(3,h);
        I=Itr(r,q);
        clear q h;
        Utr=U(I);
        epsilon=B*Utr;
        disp([' DEFORMACIJE U TROUGAONJ PLOCI ',int2str(r)]);
        disp('=====');
    end

```

```

        disp([' Epsilon ',int2str(r)]);
        disp(epsilon);
        sigma=kapa*epsilon;
        disp([' NAPONI U TROUGAONOJ PLOCI ',int2str(r)]);
        disp('=====');
        disp([' Sigma ',int2str(r)]);
        disp(sigma);
        clear B I Utr epsilon sigma;
    end
    clear r Btr Itr;
    % Završeno izracunavanje epsilon i sigme za troug.ploce

%-----Izracunavanje epsilon i sigme za pravoug.ploce-----
for r=1:brpr
    q=1:8;
    h=[8*r-7 8*r-6 8*r-5 8*r-4 8*r-3 8*r-2 8*r-1 8*r];
    B(1,q)=Bpl(1,h);
    B(2,q)=Bpl(2,h);
    B(3,q)=Bpl(3,h);
    I=Ipl(r,q);
    clear q h;
    Upl=U(I);
    epsilon=B*Upl; % Racuna deformacije
    disp([' DEFORMACIJE U PRAVOUGAONOJ PLOCI ',int2str(r)]);
    disp('=====');
    disp([' Epsilon ',int2str(r)]);
    disp(epsilon); % Ispisuje deformacije
    sigma=kapa*epsilon; % Racuna napone
    disp([' NAPONI U PRAVOUGAONOJ PLOCI ',int2str(r)]);
    disp('=====');
    disp([' Sigma ',int2str(r)]);
    disp(sigma); % Ispisuje napone
    clear B I Upl epsilon sigma;
end
clear r Bpl Ipl;
% Završeno izracunavanje epsilon i sigme za pravougaone ploce

end % od IF petlje
disp(' ');
brel=brst+brtr+brpr; % Broj elemenata modela
disp(' OSTALE INFORMACIJE ANALIZE ');
disp('=====');
disp(' ');
disp([' Broj elemenata: ' num2str(brel)]);
disp(' ');
disp([' Broj cvorova: ' num2str(n)]);
F=length(b);% Racuna broj stepeni slobode sistema
disp(' ');
disp([' Broj stepeni slobode sistema: ' num2str(F)]);
disp(' ');
%toc; %Završeno mjerenje vremena procesiranja
disp([' Vrijeme procesiranja u [sec]: ' num2str(toc)]);
disp(' ');
disp('----- KRAJ ----- ');
end % Kraj programa

```

• Primjer:

Postupak unosa podataka nakon startovanja Matlab-a, a koji se konkretno odnosi na zadatak 2, prikazan je u narednom dijelu teksta.

```

=====PROGRAM=====
- Rijesavanje sistema sastavljenog od ravanskih elemenata -
-   (trougaone odnosno pravougaone ploce) i stapova -
-   pomocu Metode Konacnih Elemenata (MKE) -
- ***Predpostavke: -
- Isti KE su iste debljine, moguće je birati razlicitu -
- debljinu KE (vazi za troug. i pravougaone ploce) -
- od istog materijala modula elasticnosti E -
- odnosno istog Poisson-ovog koeficijenta "ni" -
=====

Koliko cvorova ima sistem :    9

Unesite Young-ov modul elasticnosti u [kN/m^2]:
Na primjer ako je E=2*10^8 [kN/m^2] unijeti samo broj "2" :    2

Unesite Poisson-ov koeficijent:    0.33333

Koliko stapova ima u sistemu:    0

=====
-----TROUGAONE PLOCE-----
=====

Koliko ima trougaonih ploca?    4
Unesite debljinu trougaonih ploca u [cm]:    5

Trougaona ploca 1
Unijeti cvorove koji ogranicavaju trougaonu plocu u pozitivnom smjeru!
i = 1
j = 2
m = 6
Unesite koordinate cvorova u metrima:
x1 = 0
y1 = 0
x2 = 0.25
y2 = 0
x6 = 0.25
y6 = 0.4330125

Trougaona ploca 2
Unijeti cvorove koji ogranicavaju trougaonu plocu u pozitivnom smjeru!
i = 6
j = 7
m = 9
Unesite koordinate cvorova u metrima:
x6 = 0.25
y6 = 0.4330125
x7 = 0.5
y7 = 0.4330125

```

```
x9 = 0.5
y9 = 0.866025
```

Trougaona ploca 3

Unijeti cvorove koji ogranicavaju trougaonu ploču u pozitivnom smjeru!

```
i = 7
j = 8
m = 9
```

Unesite koordinate cvorova u metrima:

```
x7 = 0.5
y7 = 0.4330125
x8 = 0.75
y8 = 0.4330125
x9 = 0.5
y9 = 0.866025
```

Trougaona ploca 4

Unijeti cvorove koji ogranicavaju trougaonu ploču u pozitivnom smjeru!

```
i = 4
j = 5
m = 8
```

Unesite koordinate cvorova u metrima:

```
x4 = 0.75
y4 = 0
x5 = 1
y5 = 0
x8 = 0.75
y8 = 0.4330125
```

```
=====
-----PRAVOUGAONE PLOCE-----
=====
```

Koliko ima pravougaonih ploca? 2

Unesite debljinu pravougaonih ploca u [cm]: 5

Pravougaona ploca 1

Unesite cvorove koji ogranicavaju pravougaonu ploču u pozitivnom smjeru, pocevsi od donjeg lijevog:

```
i = 2
j = 3
m = 7
p = 6
```

Unesite sirinu pravougaone ploce (po x osi) u metrima : 0.25

Unesite visinu pravougaone ploce (po y osi) u metrima : 0.4330125

Ukoliko se lokalni koordinatni sistem ne poklapa se globalnim unijeti uglove, prateci naredna uputstva!

Unesite ugao izmedju x i X(u slucaju poklapanja je 0) : 0

Unesite ugao izmedju x i Y(u slucaju poklapanja je 90): 90

Unesite ugao izmedju y i X(u slucaju poklapanja je 90): 90

Unesite ugao izmedju y i Y(u slucaju poklapanja je 0) : 0

Pravougaona ploca 2

Unesite cvorove koji ogranicavaju pravougaonu ploču u pozitivnom smjeru, pocevsi od donjeg lijevog:

```
i = 3
j = 4
m = 8
p = 7
```

Unesite sirinu pravougaone ploce (po x osi) u metrima : 0.25

Unesite visinu pravougaone ploce (po y osi) u metrima : 0.4330125

Ukoliko se lokalni koordinatni sistem ne poklapa se globalnim unijeti uglove, prateci naredna uputstva!

Unesite ugao između x i X (u slučaju poklapanja je 0) : 0
 Unesite ugao između x i Y (u slučaju poklapanja je 90) : 90
 Unesite ugao između y i X (u slučaju poklapanja je 90) : 90
 Unesite ugao između y i Y (u slučaju poklapanja je 0) : 0

=====UNOS POMJERANJA I OPTERECENJA=====

Unesite redne brojeve vrsta gdje pomjeranja nisu poznata.

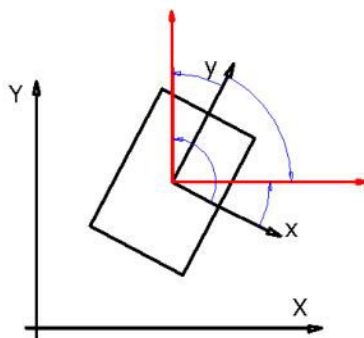
(Ne uzimati u obzir rotacije i momente!)

Na primjer: [3 5 7 9 12 14 ...]: [3 4 5 6 7 8 11 12 13 14 15 16 17 18]

Sada unesite brojne vrijednosti opterećenja u tim vrstama

Sile unositi u [kN]

Na primjer: [5.42 -0.67 2.52 35.5 ...]: [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 20 0]



Ova verzija programa je u potpunosti funkcionisala i testirana na par konkretnih primjera. Podržana je i opcija sa matricom transformacije, čime je omogućeno da se koriste i **KE** kojima se lokalni koordinatni sistem ne poklapa sa globalnim. Konkretno se odnosi na pravugaone **KE**, jer kod trougaonih **KE** je korišćena matrica krutosti napisana u globalnom sistemu, s tom napomenom da je potrebno pratiti redosljed unosa čvorova u istom smjeru (pozitivni matematički smjer).

Transformaciona matrica se može napisati kao:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) \end{bmatrix}, \text{ gdje nam je:}$$

X, Y-globalni koordinatni sistem; **x, y**-lokalni koordinatni sistem.

Teorijska osnova na kojoj je baziran ovaj program je data u literaturi [2], važi za četvorougao **KE**, dok je za trougaoni **KE** detaljno izvođenje prikazano u literaturi [1].

Za ovaj program važe neke pretpostavke, koje su direktno povezane sa teorijskim izvođenjem na kojoj je i baziran ovaj program. A to su, da je opterećenje u vidu koncentrisanih sila, i djeluje i ravni modela.

- Vrijeme procesiranja iznosi **0.791** sec. Izvršeno na računaru: Intel Celeron 566 MHz, 48 MB SDRAM na Win NT (service pack 6) i MATLAB Version 5.3.0.10183 (R11)

Prilog FEA analize

U cilju provjere rezultata zadatka 2, prikazanih na prethodnim stranicama, urađena je FEA analiza software-om **MSC/NASTRAN** for Windows 4.0¹⁴.

Kompletna analiza pre/postprocesiranje je izvršena ovim programom, na računaru sa GenuineIntel Pentium procesorom radnog takta od 200 MHz i 16 MB EDO DRAM memorije, na Windows 98.

Za model sa 14 stepeni slobode(9 čvorova i 6 elemenata) ukupno vrijeme analize je trajalo 41 sec.

U narednom dijelu teksta dat je pregled rezultata i prikaz deformacija i naponskog stanja u posmatranom modelu.

□ Pregled rezultata strukturne analize

Napomena: Dimenzije su u [cm], naponi u [N/cm²], momenti u [Ncm] a sile u [N]

Model	D:\My MSC projects\Zad2\Z2_kon.MOD						
Scratch File	C:\WINDOWS\TEMP\Z2_kon.scr						
Model Size	2983936 bytes						
Cache Size	31 Pages of 20 Blocks each. Max of 250 Pages.						
	Min	Max	Number	Next	Active	Color	
Coordinate System				3		60	
Point				1		24	
Curve				1		120	
Surface				1		60	
Solid/Volume				1			
Text				1		124	
Node	1	9	9	10		46	
Element	1	6	6	7		124	
Material	1	1	1	2	1	104	
Property	1	1	1	2	1	110	
Load Set	1	1	1	2	1		
Constraint Set	1	1	1	2	1		
View	1	2	2	3			
Group				1			
Output Set	1	1	1	2	1		
Output Format				1			
Workplane Origin	X			Y		Z	
	0.			0.		0.	
Workplane Normal	X			Y		Z	
	0.			0.		1.	
Workplane X Axis	X			Y		Z	
	1.			0.		0.	
Snap	X Spacing			Y Spacing		Angle	
	5.			5.		0.	
Model Extents	X			Y		Z	
	0.			0.		-0.1	
	100.			86.6025		0.1	

¹⁴ **MSC/NASTRAN** for Windows 4.0, The MacNeal-Schwendler Corp.

Femap 6.0 Copyright© 1985-1998, Enterprise Software Production Inc. www.femap.com

Analysis Modules Copyright© The MacNeal-Schwendler Corp. www.msc.com

Output Set 1 - MSC/NASTRAN Case 1

From = MSC/NASTRAN Analysis Type = Static Value = 0.

Notes:

From: D:\My MSC projects\Zad2\Z2_ko004.op2

Date : Mon Mar 03 23:17:52 2003

Output Vector 1 - Total Translation (Model Vector 835)

Maximum	Node ID = 9	Value = 0.0024807
Minimum	Node ID = 1	Value = 0.
Type = Displacement		Calc = Y Component Dir = Y Centroid = Y
Component 0	2 - T1 Translation	
Component 1	3 - T2 Translation	
Component 2	4 - T3 Translation	
1	0.	
2	0.00021316	
3	0.000030055	
4	0.00021316	
5	0.	
6	0.00079525	
7	0.00066371	
8	0.00079525	
9	0.0024807	

Output Vector 2 - T1 Translation (Model Vector 715)

Maximum	Node ID = 9	Value = 0.0024807
Minimum	Node ID = 3	Value = -0.000030055
Type = Displacement		Calc = N Component Dir = Y Centroid = Y
Component 0	2 - T1 Translation	
1	0.	
2	0.000043508	
3	-0.000030055	
4	0.000043508	
5	0.	
6	0.00060518	
7	0.00066371	
8	0.00060518	
9	0.0024807	

Output Vector 3 - T2 Translation (Model Vector 716)

Maximum	Node ID = 6	Value = 0.00051594
Minimum	Node ID = 8	Value = -0.00051594
Type = Displacement		Calc = N Component Dir = Y Centroid = Y
Component 1	3 - T2 Translation	
1	0.	
2	0.00020867	
3	0.	
4	-0.00020867	
5	0.	
6	0.00051594	
7	0.	
8	-0.00051594	
9	0.	

Output Vector 4 - T3 Translation (Model Vector 717)

Maximum	Node ID = 1	Value = 0.
Minimum	Node ID = 1	Value = 0.
Type = Displacement		Calc = N Component Dir = Y Centroid = Y
Component 2	4 - T3 Translation	
1	0.	
2	0.	
3	0.	
4	0.	
5	0.	

```

        6          0.
        7          0.
        8          0.
        9          0.
Output Vector 5 - Total Rotation (Model Vector 836)
  Maximum      Node ID = 1      Value = 0.
  Minimum      Node ID = 1      Value = 0.
  Type = Displacement      Calc = Y  Component Dir = Y  Centroid = Y
  Component 0      6 - R1 Rotation
  Component 1      7 - R2 Rotation
  Component 2      8 - R3 Rotation
        1          0.
        2          0.
        3          0.
        4          0.
        5          0.
        6          0.
        7          0.
        8          0.
        9          0.
Output Vector 6 - R1 Rotation (Model Vector 718)
  Maximum      Node ID = 1      Value = 0.
  Minimum      Node ID = 1      Value = 0.
  Type = Displacement      Calc = N  Component Dir = Y  Centroid = Y
  Component 0      6 - R1 Rotation
        1          0.
        2          0.
        3          0.
        4          0.
        5          0.
        6          0.
        7          0.
        8          0.
        9          0.
Output Vector 7 - R2 Rotation (Model Vector 719)
  Maximum      Node ID = 1      Value = 0.
  Minimum      Node ID = 1      Value = 0.
  Type = Displacement      Calc = N  Component Dir = Y  Centroid = Y
  Component 1      7 - R2 Rotation
        1          0.
        2          0.
        3          0.
        4          0.
        5          0.
        6          0.
        7          0.
        8          0.
        9          0.
Output Vector 8 - R3 Rotation (Model Vector 720)
  Maximum      Node ID = 1      Value = 0.
  Minimum      Node ID = 1      Value = 0.
  Type = Displacement      Calc = N  Component Dir = Y  Centroid = Y
  Component 2      8 - R3 Rotation
        1          0.
        2          0.
        3          0.
        4          0.
        5          0.
        6          0.
        7          0.
        8          0.
        9          0.

```

```

Output Vector 51 - Total Constraint Force          (Model Vector 839)
Maximum      Node ID = 1          Value = 19988.8
Minimum      Node ID = 2          Value = 0.
Type = Force                               Calc = Y  Component Dir = Y  Centroid = Y
Component 0          52 - T1 Constraint Force
Component 1          53 - T2 Constraint Force
Component 2          54 - T3 Constraint Force
    1          19988.8
    2           0.
    3           0.
    4           0.
    5          19988.8
    6           0.
    7           0.
    8           0.
    9           0.

Output Vector 52 - T1 Constraint Force          (Model Vector 709)
Maximum      Node ID = 2          Value = 0.
Minimum      Node ID = 1          Value = -10000.
Type = Force                               Calc = N  Component Dir = Y  Centroid = Y
Component 0          52 - T1 Constraint Force
    1          -10000.
    2           0.
    3           0.
    4           0.
    5          -10000.
    6           0.
    7           0.
    8           0.
    9           0.

Output Vector 53 - T2 Constraint Force          (Model Vector 710)
Maximum      Node ID = 5          Value = 17307.6
Minimum      Node ID = 1          Value = -17307.6
Type = Force                               Calc = N  Component Dir = Y  Centroid = Y
Component 1          53 - T2 Constraint Force
    1          -17307.6
    2           0.
    3           0.
    4           0.
    5          17307.6
    6           0.
    7           0.
    8           0.
    9           0.

Output Vector 54 - T3 Constraint Force          (Model Vector 711)
Maximum      Node ID = 1          Value = 0.
Minimum      Node ID = 1          Value = 0.
Type = Force                               Calc = N  Component Dir = Y  Centroid = Y
Component 2          54 - T3 Constraint Force
    1           0.
    2           0.
    3           0.
    4           0.
    5           0.
    6           0.
    7           0.
    8           0.
    9           0.

Output Vector 55 - Total Constraint Moment      (Model Vector 840)
Maximum      Node ID = 7          Value = 402.938
Minimum      Node ID = 1          Value = 9.38612
Type = Force                               Calc = Y  Component Dir = Y  Centroid = Y
Component 0          56 - R1 Constraint Moment

```

```

Component 1          57 - R2 Constraint Moment
Component 2          58 - R3 Constraint Moment
  1          9.38612
  2         52.6565
  3         98.9252
  4         52.6565
  5          9.38612
  6        204.663
  7        402.938
  8        204.663
  9        254.119
Output Vector 56 - R1 Constraint Moment          (Model Vector 712)
Maximum      Node ID = 1          Value = 0.
Minimum      Node ID = 1          Value = 0.
Type = Force                               Calc = N Component Dir = Y Centroid = Y
Component 0          56 - R1 Constraint Moment
  1           0.
  2           0.
  3           0.
  4           0.
  5           0.
  6           0.
  7           0.
  8           0.
  9           0.
Output Vector 57 - R2 Constraint Moment          (Model Vector 713)
Maximum      Node ID = 1          Value = 0.
Minimum      Node ID = 1          Value = 0.
Type = Force                               Calc = N Component Dir = Y Centroid = Y
Component 1          57 - R2 Constraint Moment
  1           0.
  2           0.
  3           0.
  4           0.
  5           0.
  6           0.
  7           0.
  8           0.
  9           0.
Output Vector 58 - R3 Constraint Moment          (Model Vector 714)
Maximum      Node ID = 7          Value = 402.938
Minimum      Node ID = 1          Value = 9.38612
Type = Force                               Calc = N Component Dir = Y Centroid = Y
Component 2          58 - R3 Constraint Moment
  1          9.38612
  2         52.6565
  3         98.9252
  4         52.6565
  5          9.38612
  6        204.663
  7        402.938
  8        204.663
  9        254.119

```

```

Output Vector 7430 - Plate Bot Mean Stress      (Model Vector 844)
  Maximum   Element ID = 1      Value = 132.543
  Minimum   Element ID = 4      Value = -132.543
  Type = Stress                      Calc = Y   Component Dir = N   Centroid = Y
  Component 0    100630 - PltC1 Bot Mean Stress
  Component 1    150630 - PltC2 Bot Mean Stress
  Component 2    200630 - PltC3 Bot Mean Stress
  Component 3    250630 - PltC4 Bot Mean Stress
      1      132.543
      2      48.7109
      3     -48.7109
      4     -132.543
      5      35.1214
      6     -35.1214

Output Vector 7431 - Plate Bot MaxShear Stress (Model Vector 845)
  Maximum   Element ID = 1      Value = 164.854
  Minimum   Element ID = 2      Value = 28.864
  Type = Stress                      Calc = Y   Component Dir = N   Centroid = Y
  Component 0    100631 - PltC1 Bot MxShear Stress
  Component 1    150631 - PltC2 Bot MxShear Stress
  Component 2    200631 - PltC3 Bot MxShear Stress
  Component 3    250631 - PltC4 Bot MxShear Stress
      1      164.854
      2      28.864
      3      28.864
      4      164.854
      5      160.891
      6      160.891

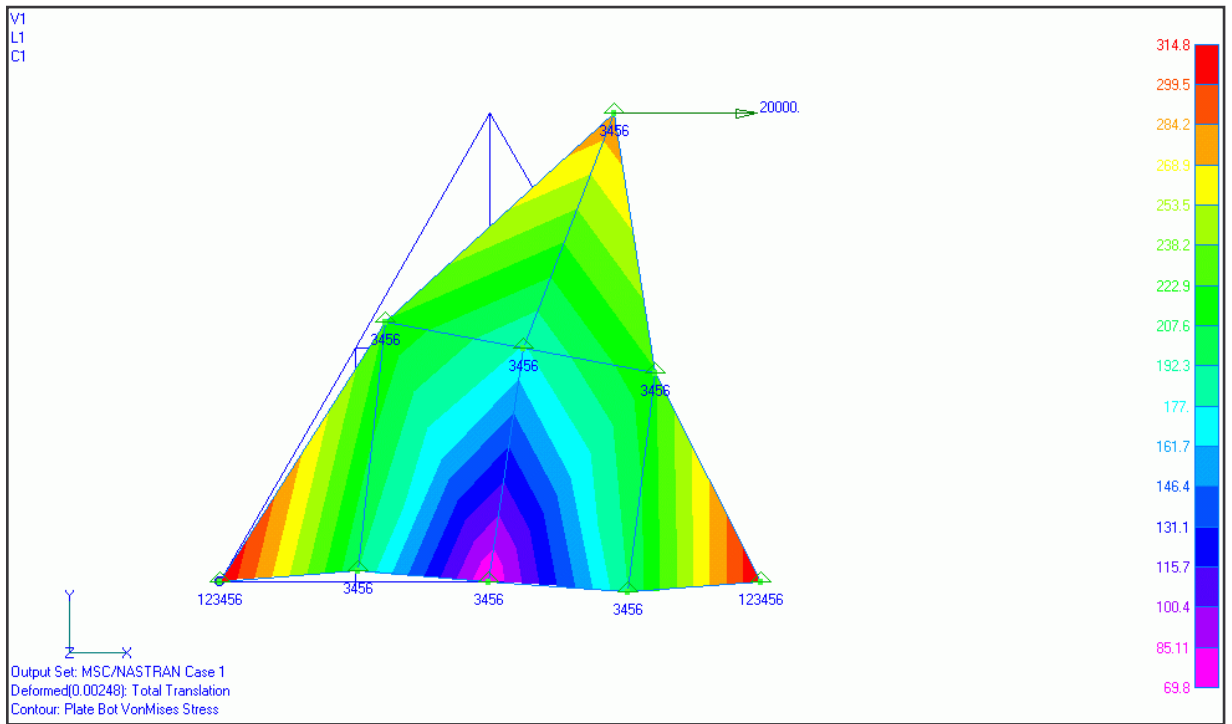
Output Vector 7433 - Plate Bot VonMises Stress (Model Vector 846)
  Maximum   Element ID = 1      Value = 314.799
  Minimum   Element ID = 2      Value = 69.8007
  Type = Stress                      Calc = Y   Component Dir = N   Centroid = Y
  Component 0    100633 - PltC1 Bot VnMises Stress
  Component 1    150633 - PltC2 Bot VnMises Stress
  Component 2    200633 - PltC3 Bot VnMises Stress
  Component 3    250633 - PltC4 Bot VnMises Stress
      1      314.799
      2      69.8007
      3      69.8007
      4      314.799
      5      280.876
      6      280.876

Displacement Summary
  Maximum Value    0.0024807   Output Vector 1 - Total Translation
  Minimum Value   -0.00051594   Output Vector 3 - T2 Translation

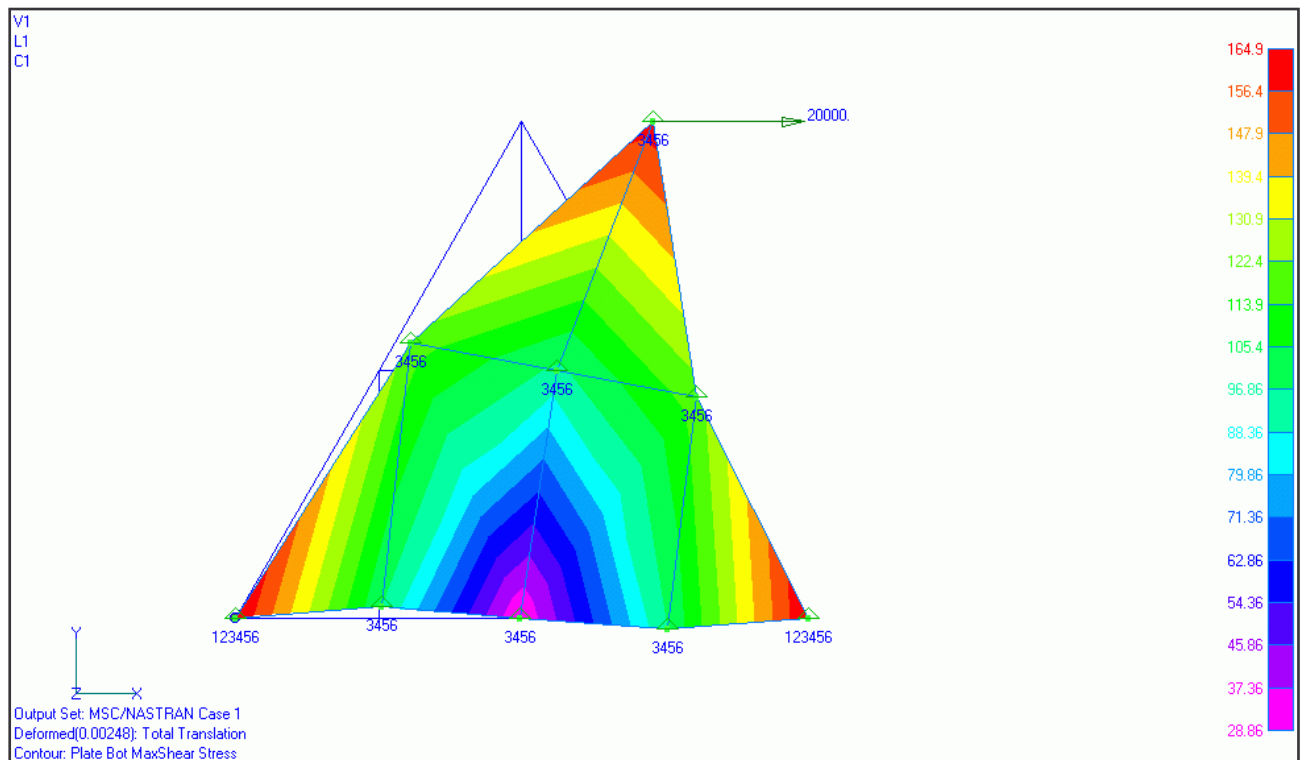
Force Summary
  Maximum Value    20000.   Output Vector 41 - Total Applied Force
  Minimum Value   -17307.6   Output Vector 53 - T2 Constraint Force

Stress Summary
  Maximum Value    314.799   Output Vector 7033 - Plate Top VonMises Stress
  Minimum Value   -297.397   Output Vector 7027 - Plate Top MinorPrn Stress

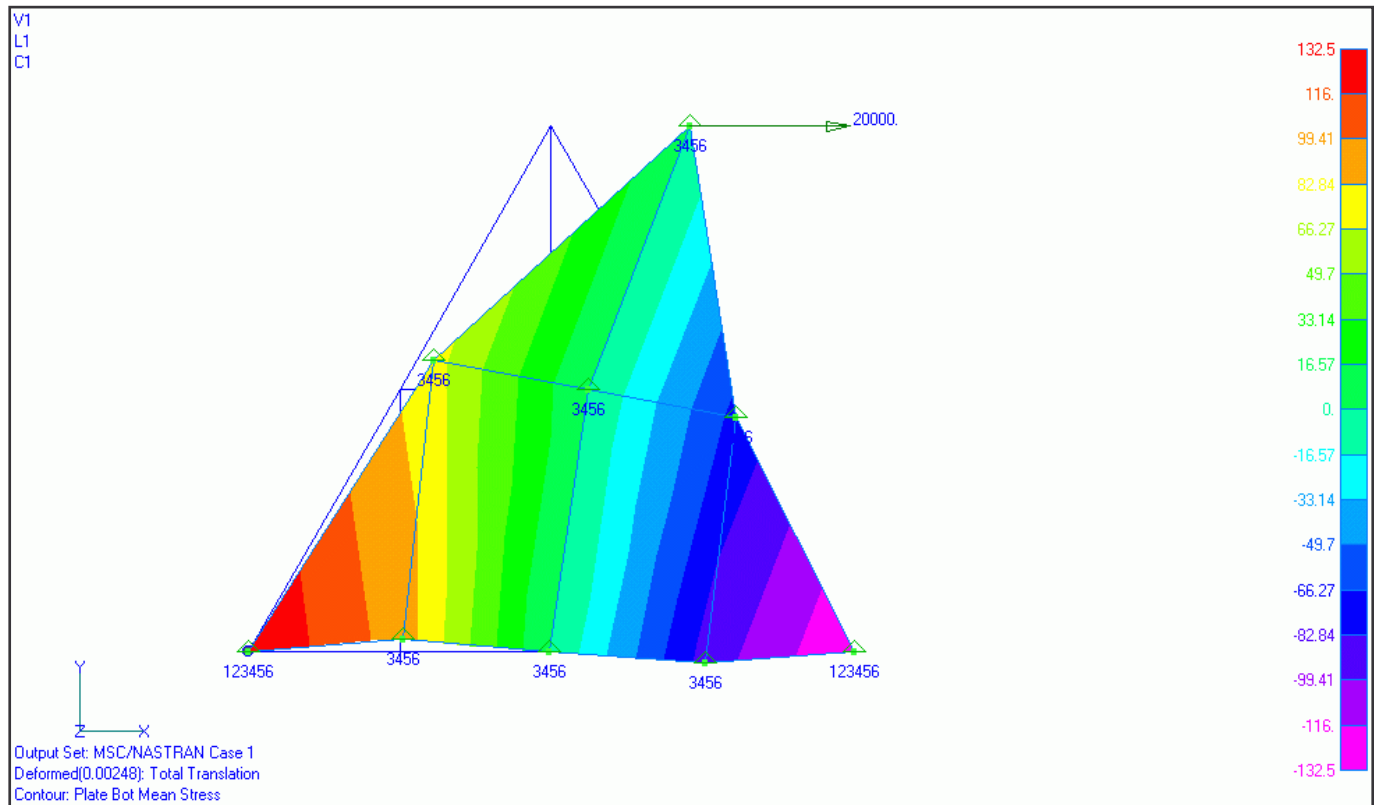
```



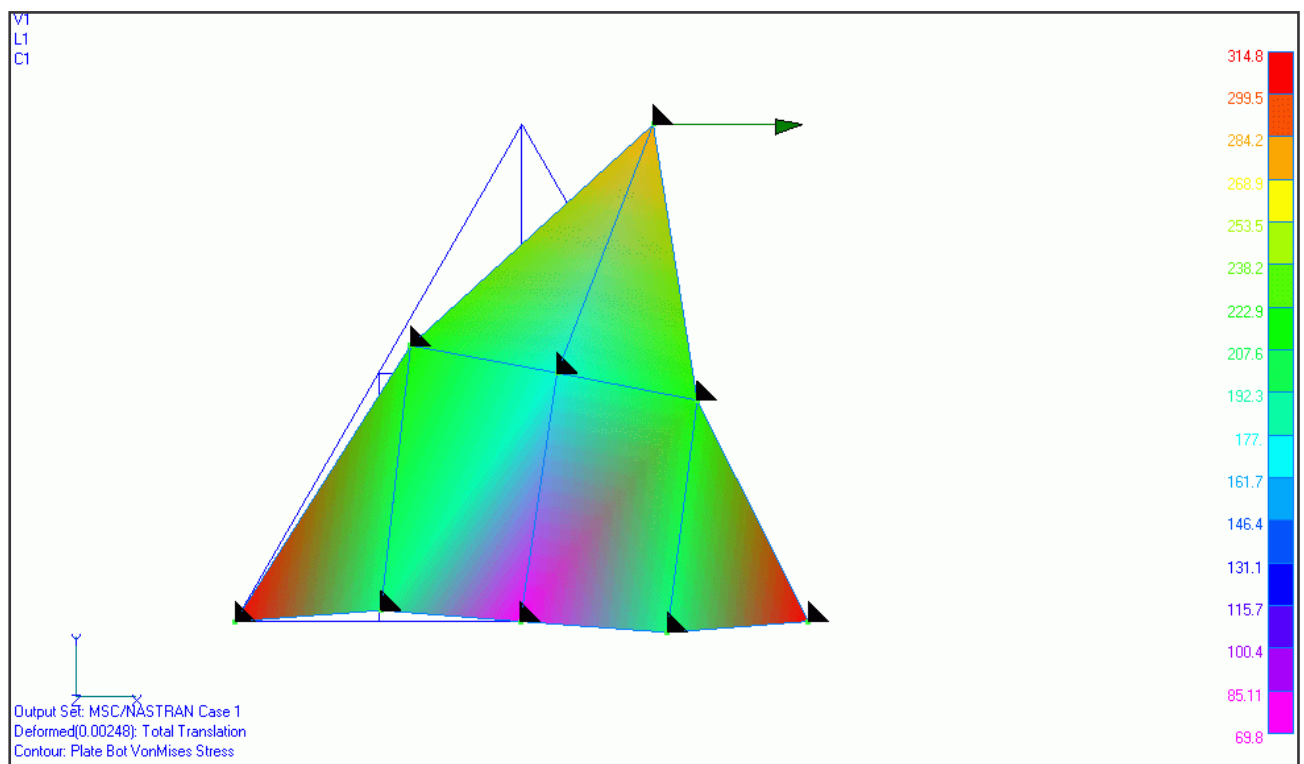
Slika C-1 – Plate Bot VonMises Stress



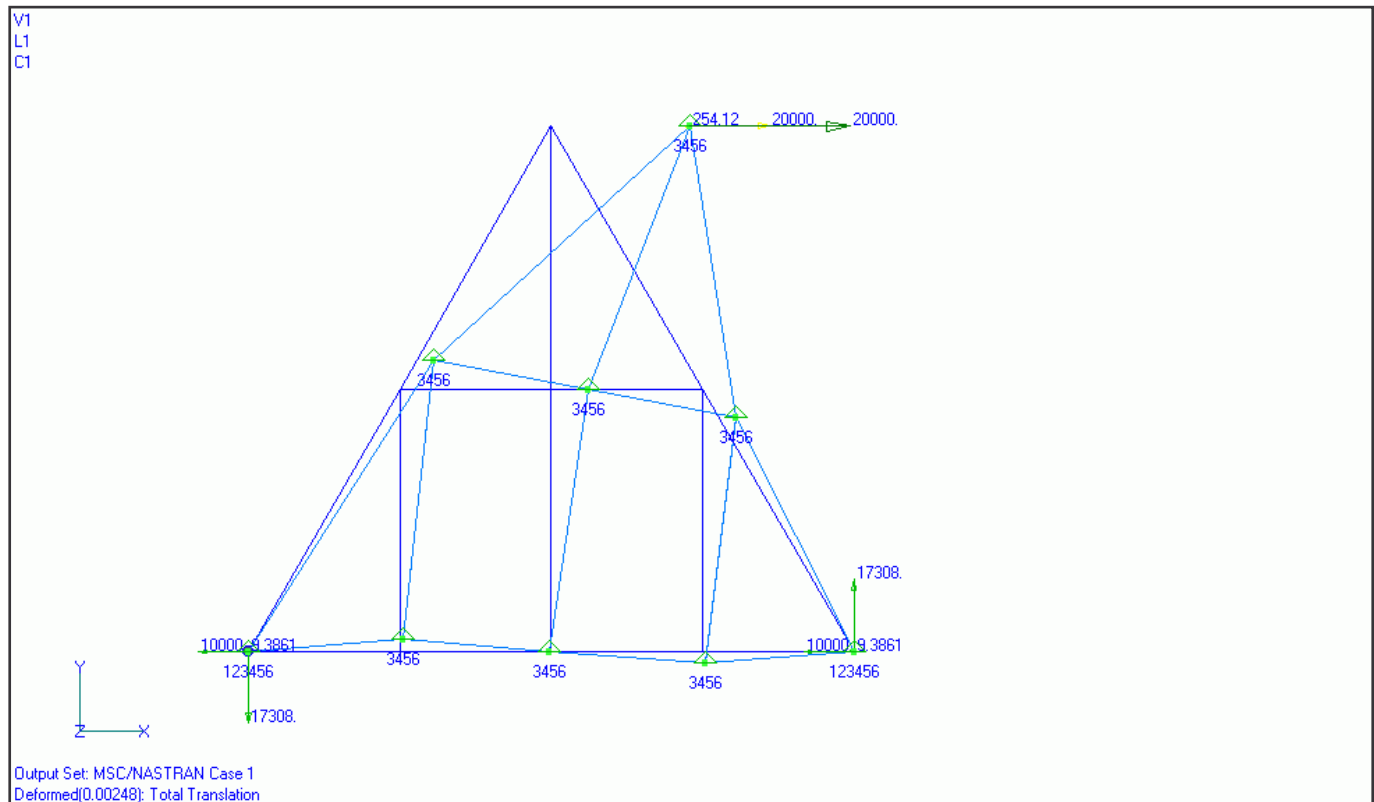
Slika C-2 – Plate Bot MaxShear Stress



Slika C-3 – Plate Bot Mean Stress



Slika C-4 – Plate Bot VonMises Stress(Renderovan prikaz)



Slika C-5 – Prikaz deformisane konfiguracije i reakcije u vezama(FreeBody Options)

• Zaključak

Na prethodnim stranicama dat je samo djelić prikaza rezultata ove FEA analize, izdvojeni su samo oni karakteristični.

Takođe uočavamo da se rezultati dobijeni pomoću **Matlab-a** ne razlikuju znatno od rezultata dobijenih uz pomoć **MSC/NASTRAN-a**.

Kao primjer, možemo navesti pomjeranje čvora 9 u horizontalnom pravcu i koje iznosi 0.002433 [cm] (dobijeno uz pomoć *Matlab-ovog* script file-*a*) u odnosu na pomjeranje dobijeno uz pomoć **MSC/NASTRAN-a** 0.002480 [cm] .

Ova FEA analiza je imala za cilj provjeru rezultata dobijenih uz pomoć *Matlab-a*.

Literatura

[1] Vježbe profesora Dr Sretena Savićevića, Podgorica 2002

[2] *M. Kalajdžić* - Metod konačnih elemenata, Institut za alatne mašine i alate, Beograd 1978

[3] *Vlado A. Lubarda* - Otpornost materijala, Titograd 1989

[4] *Miomir Lj. Jovanović, Janko D. Jovanović* - Teorija projektovanja konstrukcija računarom, Niš 1994

[5] *Miomir Lj. Jovanović, Janko D. Jovanović* - CAD/FEA Praktikum za projektovanje u mašinstvu, Podgorica 2000