ECUACIONES DIF.LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Ing. Angel Flores Morales

1 RAICES DIFERENTES

1.1 $y'' - 3y' + 2y = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^2 - 3m + 2 = 0$ Resolviendo por factorización
$(m-2)(m-1) = 0$ $m_1 = 2$ $m_2 = 1$
La solución general es $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$

1.2 $y'' + 4y' - 5y = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^2 + 4m - 5 = 0$ Resolviendo por factorización
$(m+5)(m-1) = 0$ $m_1 = -5$ $m_2 = 1$
La solución general es $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x}$

1.3 $y'' + 4y' + 3y = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^2 + 4m + 3 = 0$ Resolviendo por factorización
$(m+3)(m+1) = 0$ $m_1 = -3$ $m_2 = -1$
La solución general es $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$

1.4 $y'' - 5y' + 3y = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^2 - 5m + 3 = 0$ No se puede factorizar usar la fórmula general

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$
$$\frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \qquad m_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \qquad m_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$$

La solución general es

$$y = C_1 e^{(\frac{5+\sqrt{13}}{2})x} + C_2 e^{(\frac{5-\sqrt{13}}{2})x}$$
$$y = C_1 e^{\frac{5}{2}x} e^{\frac{\sqrt{13}}{2}x} + C_e^{\frac{5}{2}x} e^{-\frac{\sqrt{13}}{2}x}$$
$$y = e^{\frac{5}{2}x}(C_1 e^{\frac{\sqrt{13}}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{13}}{2}x})$$

1.5 $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

Solución

Se determina la ecuación característica o ecuación auxiliar
$m^3 - 4m^2 - 5m = 0$ Se resuelve por factorización
$m(m^2 - 4m - 5) = 0$ $m(m-5)(m+1) = 0$ $m_1 = 0$ $m_2 = 5$ $m_3 = -1$
La solución general esta dada por $y = C_1 + C_2 e^{5x} + C_3 e^{-x}$

1.6 $(4D^3 - 5D)y = 0$

Solución

La ecuación característica es
$4m^3 - 5m = 0$ Resolviendo por factorización
$m(4m^2 - 5) = 0$ $m_1 = 0$ $m_2 = \sqrt{\frac{5}{4}}$ $m_3 = -\sqrt{\frac{5}{4}}$
Como $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ $m_1 = 0$ $m_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ $m_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$
La solución general es $y = C_1 + C_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{5}x} + C_3 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}x}$

1.7 $(D^3 - 3D^2 - D + 3)y = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^3 - 3m^2 - m + 3 = 0$ Factorizando por división sintética

1	−3	−1	3	$\lfloor -1$
	−1	4	−3	
1	−4	3	0	

$(m^2 - 4m + 3)(m + 1) = 0$ Factorizando el trinomio cuadrado
$(m - 3)(m - 1)(m + 1) = 0$ $m_1 = 3$ $m_2 = 1$ $m_3 = -1$
La solución general es $y = C_1e^{3x} + C_2e^{x} + C_3e^{-x}$

1.8 $(D^3 - 7D + 6)y = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^3 - 7m + 6 = 0$ Factorizando por división sintética

1	0	−7	6	$\lfloor 1$
	1	1	−6	
1	1	−6	0	

$(m^2 + m - 6)(m - 1) = 0$ Factorizando el trinomio cuadrado
$(m + 3)(m - 2)(m - 1) = 0$ $m_1 = -3$ $m_2 = 2$ $m_3 = 1$
La solución general es $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + C_3e^{x}$

1.9 $D^3y = Dy$

Solución

$D^3y - Dy = 0$ $(D^3 - D)y = 0$
La ecuación característica es
$m^3 - m = 0$ Factorizando
$m(m^2-1) = 0$ $m(m-1)(m+1) = 0$ $m_1 = 0$ $m_2 = 1$ $m_3 = -1$
La solución general es $y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-x}$

2 RAICES COMPLEJAS

2.1 $y'' + 4y = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^2 + 4 = 0 \qquad m^2 = -4 \qquad m = \pm\sqrt{-4} \qquad m_1 = 2i \qquad m_2 = -2i$
La solución general es $C_1 cos 2x + C_2 sen 2x$

2.2 $y''' - 4y'' + 5y' = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^3 - 4m^2 + 5m = 0$ Factorizando
$m(m^2 - 4m + 5) = 0$ usando fórmula general

$$\frac{-(45) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$\dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} \qquad m_1 = 0 \qquad m_2 = 2{+}i \qquad m_3 = 2{-}i$
La solucón general es $\quad y = C_1 + e^{2x}(C_2 cos x + C_3 sen x)$

2.3 $y''' + 4y' = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^3 + 4m = 0 \qquad m(m^2 + 4) = 0 \qquad m_1 = 0 \qquad m_2 = +2i \qquad m_3 = -2i$
La solucón general es $\quad y = C_1 + C_2 cos 2x + C_3 sen 2x$

2.4 $y'' - 2y' + 2 = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^2 - 2m + 2 = 0$ No se puede factorizar usar fórmula general

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \qquad m_1 = 1 + i \qquad m_2 = 1 - i$$

La solución general es $\quad y = e^x(C_1 cosx + C_2 senx)$

2.5 $\quad y'' - 2y' + 10 = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^2 - 2m + 10 = 0 \qquad$ usando la fórmula general

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} \qquad = \frac{2 \pm 6i}{2} \qquad m_1 = 1 + 3i \qquad m_2 = 1 - 3i$$

La solución general es $\quad y = e^x(C_1 cos3x + C_2 sen3x)$

3 RAICES IGUALES

3.1 $\quad y'' - 2y' + 1 = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^2 - 2m + 1 = 0 \qquad$ Factorizando
$(m-1)(m-1) = 0 \qquad m_1 = m_2 = 1$
La solución general es $\quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x$

3.2 $\quad y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0 \qquad$ Factorizando por división sintética

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 3 & -1 & \underline{1} \\ & 1 & -2 & 1 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$(m^2 - 2m + 1)(m - 1) = 0$ Factorizando el trinomio cuadrado

$(m - 1)(m - 1)(m - 1) = 0$ $m_1 = m_2 = m_3 = 1$

La solución general es $1y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$

3.3 $(D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4)y = 0$

Solución

La ecuación característica es

$m^4 - m^3 - 9m^2 - 11m - 4 = 0$ Factorizando por división sintética

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -9 & -11 & -4 & \underline{-1} \\ & -1 & 2 & 7 & 4 & \\ \hline 1 & -2 & -7 & -4 & 0 & \end{array}$$

$(m^3 - 2m^2 - 7m - 4)(m + 1)$ Aplicando nuevamente división sintética

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & -7 & -4 & \underline{-1} \\ & -1 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & -3 & -4 & 0 & \end{array}$$

$(m^2 - 3m - 4)(m + 1)(m + 1) = 0$ Factorizando el trinomio cuadrado

$(m - 4)(m + 1)(m + 1)(m + 1) = 0$ $m_1 = 4$ $m_2 = m_3 = m_4 = -1$

La solución general es

$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + C_4x^2e^{-x}$ factorizando

$y = C_1e^{4x} + (C_2 + C_3x + C_4x^2)e^{-x}$

3.4 $(D^4 + 6D^3 + 5D^2 - 24D - 36)y = 0$

Solución

La ecuación característica es

$m^4 + 6m^3 + 5m^2 - 24m - 36 = 0$ Factorizando por división sintética se obtiene

$(m - 2)(m + 2)(m + 3)(m + 3)0 =$ $m_1 = 2$ $m_2 = -2$ $m_3 = m_4 = -3$

La solución general es

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} + C_4xe^{-3x}$

3.5 $y'''' + y'' = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^4 + m^2 = 0 \qquad m^2(m^2+1) = 0 \qquad m_1 = m_2 = 0 \qquad m_3 = i \qquad m_4 = -i$
La solución general es
$y = C_1 + C_2x + C_3cosx + C_4senx$

3.6 $y'''' + 2y'' + 1 = 0$

Solución

La ecuación característica es
$m^4 + 2m^2 + 1 = 0 \qquad (m^2+1)(m^2+1) = 0$
$m_1 = i \quad m_2 = -i \quad m_3 = i \quad m_4 = -i$
La solución general es $\qquad y = C_1cosx + C_2senx + C_3xcosx + C_4xsenx$
$y = (C_1 + C_3x)cosx + (C_2 + C_4x)senx$