Modelo de dos factores para activos con riesgo

René G. Suárez Urrutia

Asesor: Dr. Alejandro Segundo Valdés

Resumen

El trabajo desarrolla la estructura temporal de tasa de interés spot ante tres posibles alternativas. Analiza la incertidumbre en el proceso de liquidación del pago en los bonos de deuda gubernamental y corporativa. Por último, plantea el desarrollo algebraico necesario para el cálculo de la probabilidad de incumplimiento de pago en activos con riesgo para modelos con cualquier número de factores de incertidumbre.

Introducción

El presente trabajo está basado en el artículo de Jarrow y Turnbull de 1995. Representa una modificación en el sentido que se propone un modelo de incertidumbre de dos factores en lugar de uno. El objetivo consiste en verificar si estas alteraciones tienen repercusiones considerables en el cálculo de la probabilidad de incumplimiento de pago.

Para el análisis se utilizan bonos cupón cero con riesgo y sin él, además de un mercado monetario utilizado como tasa de descuento. La construcción de las ecuaciones está sustentada en la igualación entre el valor presente de bonos con diferentes vencimientos, haciendo una martingala. A partir de este procedimiento, y partiendo de ejemplos sencillos, se proponen ecuaciones de carácter general aplicables a cualquier plazo.

El primer apartado explica la evolución temporal de las tasas de interés. Basada en probabilidades, se especifican diferentes alternativas de la tasa spot para cada periodo de tiempo. Su importancia es sustancial dado que representa el factor de descuento, para el cálculo del valor presente, en los activos de deuda gubernamental y corporativa.

El segundo aplica la herramienta analítica desarrollada a los bonos de deuda corporativa. Incorpora las nociones de riesgo por falta de pago y plantea también probabilidades de que se pague el valor nominal del papel o una fracción de éste.

Por último, la parte final es la conjunción de los dos procesos aleatorios especificados anteriormente. La finalidad es otorgar las bases necesarias para el cálculo de la probabilidad de incumplimiento de pago, dadas las evoluciones de la tasa de interés, para cualquier periodo y con cualquier número de factores.

Supuestos

El trabajo que se presenta a continuación está sustentado en los siguientes supuestos y definiciones:

Supuestos

1. Mercados competitivos. Ningún agente tiene el poder suficiente para fijar el precio de los activos.

2. Mercados completos. Libremente puede encontrarse un portafolio que replique los flujos de efectivo de otro activo con características similares.

3. Ausencia de fricciones. No existen operaciones que encarezcan o dificulten la libre transacción de activos como impuestos, costos de transacción, restricciones, etcétera.

4. No existen oportunidades de arbitraje. Esto significa que pueden encontrarse sustitutos perfectos, que son libremente comerciables y que además se venden al mismo precio en ausencia de restricciones. Esto implica, por ejemplo, que no pueden hacerse portafolios con cierto tipo de bonos para replicar el flujo de efectivo que otorgaría otro activo similar a un costo menor.

Existen dos tipos de activos (conocidos como bonos cupón cero) y un mercado monetario:

Definiciones

1. Existen bonos libres de riesgo (bonos de deuda gubernamental) -p(t,T)- cuyo valor es estrictamente positivo; además se entiende que p(t,t)=1, que supondremos como su valor nominal.

2. Existen también bonos con riesgo –v(t,T)- con valor estrictamente positivo. El riesgo que enfrentan estos activos es evidentemente la falta de pago.

3. Existe un mercado monetario donde se negocian activos a corto plazo, normalmente aquellos cuyo vencimiento oscila entre un día y un año. La cuenta del mercado monetario se refiere a la inversión de un monto igual al valor nominal del bono en el periodo más corto y seguir haciéndolo así en cada fecha de vencimiento siguiente. Claramente se observa que $b(0) = 1$. Para el siguiente periodo $b(1) = b(o)e^{r(0)}$, para t=2 se tiene $b(2) = b(1)e^{r(1)}$, es decir $b(2) = e^{r(0)}e^{r(1)}$; y así sucesivamente. r(t) representa la tasa de interés de corto plazo o *spot*.

1. Estructura temporal de la tasa de interés

Para construir la estructura de la tasa de interés *spot* considere al tiempo como discreto, esto es el intervalo [0,1,2,...,t,t+1,...,T].

En el tiempo cero se conoce la tasa de interés, r(t), que será utilizada como factor de descuento para valuar los bonos cupón cero. A partir de aquí se desprenden evoluciones alternativas de la tasa *spot* (y por consecuencia del precio de los bonos). Se definen como los estados "*up*", "*medium*" y "*down*"[1]. Las probabilidades de cada estado son π, θ y $1-\pi-\theta$ respectivamente. Suponemos que $0 < \pi < 1$ y, de manera semejante, $0 < \theta < 1$. Las letras griegas pi y zeta son conocidas como pseudo probabilidades.

El modelo utilizado se conoce como de dos factores porque intervienen en él dos fuentes de incertidumbre. Para visualizarlo es útil construir un diagrama de árbol (Gráfica 1.1). Se sigue que el número de estados en el tiempo t es igual a 3^t.

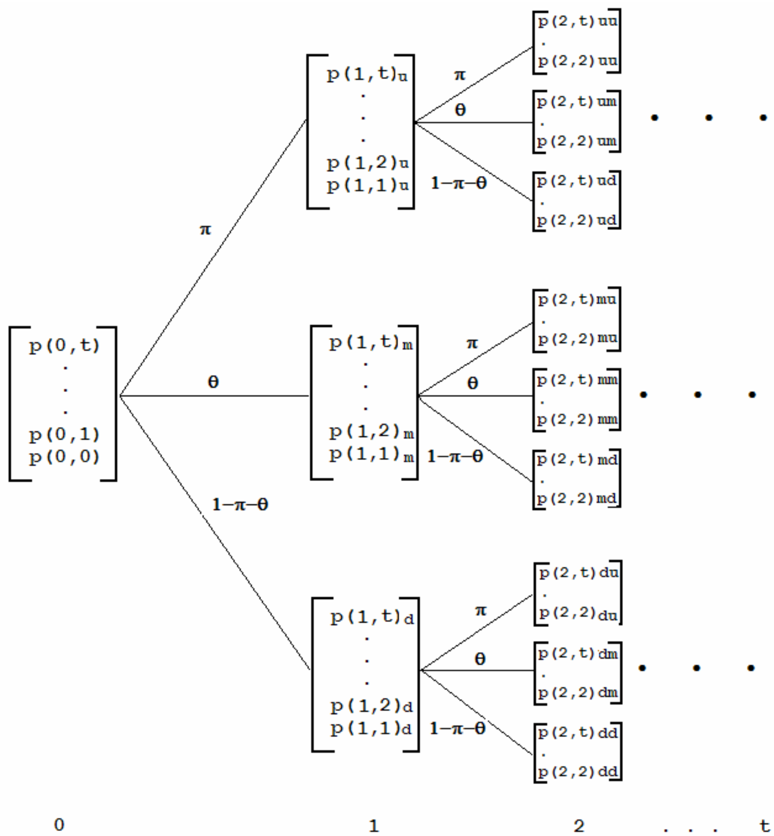
Por simplicidad asumiremos que el intervalo temporal entre cada periodo es de un año. En este apartado nos enfocaremos

[1] En el artículo de Ho y Lee (1986) se demuestra que las tasas de interés están normalmente distribuidas.

únicamente a los bonos libres de riesgo. Para conocer sus precios suponemos interés compuesto[2]

$$p(0,1) = \frac{1}{e^{r(0)}} \; ; \quad p(t-1,t)_i = \frac{1}{e^{r(t-1)i}} \quad \text{donde i = } \textit{up, medium, down} \qquad [1.1]$$

Gráfica 1.1 Estructura temporal de bonos sin riesgo



De la gráfica 1.1 se concluye que

[2] Si se desea, puede utilizarse el interés simple. La manera de valuar los activos es semejante $p(t,T) = \frac{1}{(1+r(t))^{T-t}}$. Esto quiere decir que los intereses ganados no se invierten para generar nuevos intereses.

$$p(0,2)=\frac{\pi p(1,2)_u+\theta p(1,2)_m+(1-\pi-\theta)\,p(1,2)_d}{e^{r(0)}} \qquad [1.a]$$

La anterior ecuación explica que el valor del bono con vencimiento a dos años es equivalente al activo con similar vencimiento pero con emisión en el periodo 1, si es ponderado por las pseudo probabilidades y descontado por la cuenta del mercado monetario.

En el artículo de Harrison y Pliska (1981) se demuestra que los precios de bonos normalizados por la cuenta del mercado monetario son una martingala[3]. Si además suponemos, como en este caso, que hay ausencia de arbitraje, entonces las pseudo probabilidades son únicas.

La ecuación siguiente es equivalente a [1.a]. Explica que no puede haber arbitraje entre el mercado monetario y el mercado de deuda. Además utiliza las ideas expresadas en los dos párrafos anteriores para conocer las tasas en cada estado. Por simplicidad se usará el caso en que t=1.

$$\frac{p(0,2)}{b(0)}=E^{\pi\theta}[\frac{p(1,2)}{b(1)}] \qquad [1.b]$$

Haciendo procedimientos algebraicos simples se tiene:

[3] Martingala. En tiempo discreto, proceso estocástico que satisface la igualdad $E(X_{n+1}\mid X_1,...,X_n)=X_n$. El proceso aleatorio es una martingala si el valor esperado de la siguiente observación es igual a la última, tomando como dadas todas las anteriores.

$$e^{r(0)}p(0,2) = \frac{\pi}{e^{r(1)_u}} + \frac{\theta}{e^{r(1)_m}} + \frac{(1-\pi-\theta)}{e^{r(1)_d}} \quad [1.c]$$

Donde las pseudo probabilidades están dadas por las condiciones del mercado. De esta manera las incógnitas son las $r(1)_i$.

En general, se cumple que $r(t)_{iu} > r(t)_{im} > r(t)_{id}$. Por lo que los rendimientos son mayores en el estado *down* que en *medium* y, a su vez, que en el estado *up*.

Para conocer las tasas en cada estado se utiliza el método de ensayo y error. Actividad que puede resultar tediosa, pero con la ayuda de una hoja de cálculo se reduce notablemente la complejidad.

Para t=2 el proceso es aún más problemático. Para cada estado i, el primer paso consiste en tantear nuevamente las tasas con idénticas pseudo probabilidades. Una vez obtenidas algunas habrá que sustituirlas en la igualdad

$$\frac{p(1,3)_i}{b(1)} = E^{\pi\theta}[\frac{p(2,3)}{b(2)}] \quad [1.d]$$

Se obtendrán así tres valores para p(1,3)[4]. La operación siguiente es calcular su valor esperado descontado

$$\frac{p(0,3)}{b(0)} = E^{\pi\theta}[\frac{p(1,3)}{b(1)}] \quad [1.e]$$

[4] A diferencia del caso anterior, este valor es una incógnita. El mercado no valúa directamente bonos con este vencimiento.

Como es conocido el valor de p(0,3) es posible verificar si las tasas *spot* elegidas fueron adecuadas. En caso contrario habría que intentar con otras.

El ejemplo anterior ilustra la manera de construir el entramado de la tasa *spot* y, en consecuencia, de los precios de bonos libres de riesgo con diferentes vencimientos. Nótese que todo el desarrollo está sustentado en la idea que subyace de las martingalas y la ausencia de arbitraje. Por ello, se puede generalizar el planteamiento en la siguiente igualdad

$$\frac{p(t-n,t)}{b(t-n)} = E^{\pi\theta}[\frac{p(t-n+1,t)}{b(t-n+1)}] \qquad [1.2]$$

con $n \in [2,3,...,k]$ donde k–t=0

El valor "n" equivale a la diferencia entre el periodo a partir del cual se desee valuar y la fecha de vencimiento del bono. El proceso que describe la ecuación anterior se va construyendo de atrás hacia delante. En la primera de la serie de igualdades que se necesitan para encontrar las tasas $r(t)_i$, para cualquier t, n es igual a dos[5]. Según [1.3] irá aumentando en una unidad hasta que finalmente n sea igual a t.

[5] Véase la ecuación [1a].

2. Estructura temporal de bonos con riesgo

Los activos tratados en este apartado se refieren a la deuda emitida por las empresas. Dado que no tienen el mismo respaldo económico que el gobierno, el tenedor de esos títulos puede incurrir en riesgo por falta de pago[6]. Lo anterior implica que puede recibir un pago inferior al estipulado como valor nominal (1) al finalizar la fecha de vencimiento.

La fracción efectivamente pagada de cada unidad monetaria ofrecida se identificará como e(t). Puede tomar el valor unitario o ser inferior. El hecho de que suceda una u otra alternativa es dependiente de probabilidades

$$e(t)= \begin{cases} \delta \text{ con probabilidad } \lambda(t) \\ 1 \text{ con probabilidad } 1-\lambda(t) \end{cases}$$

$$\text{Donde } \delta, \lambda(t) \in (0,1) \qquad [2.1]$$

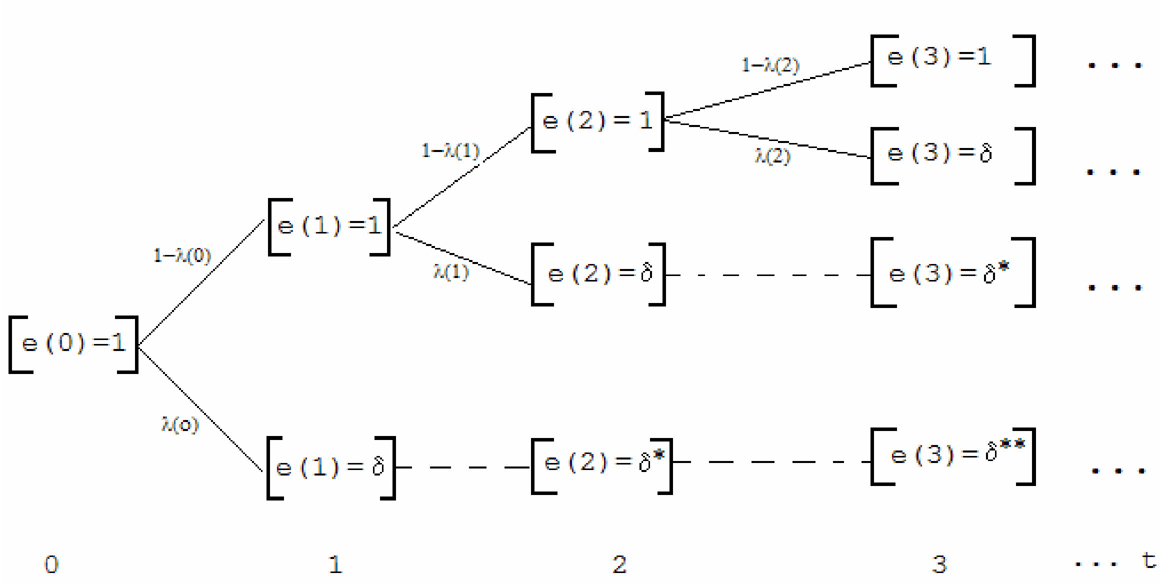
La variable δ[7] está determinada por condiciones imperantes en el mercado.

[6] En realidad existen otros tipos de riesgo; si, por ejemplo, se negocian bonos gubernamentales es posible que el intermediario incurra también en falta de pago.

[7] Es claramente una propensión marginal. Entre mayor sea ésta, el mercado de activos está menos expuesto.

Al igual que en el caso anterior, se puede construir un diagrama (gráfica 2.1) que ayude a explicar la evolución temporal de la razón de pago. El número de estados posibles es igual a (t+1).

Gráfica 2.1 Estructura temporal de la razón de pagos



Las líneas punteadas indican que el estado es originado por una situación de incumplimiento de pago. Si éste es el antecedente, la fase posterior asume la misma naturaleza. Su probabilidad de ocurrencia es de 100%. Estas etapas serán denominadas triviales[8]. El número de ellas, en el tiempo t (a partir de t=1), pertenece al intervalo [0,t-1].

[8] La notación de la letra delta con asteriscos como superíndice contabiliza desde cuantos rezagos se ha originado el incumplimiento de pago.

Las variables $\lambda(t)$ son también una pseudo probabilidad[9]. A diferencia de las utilizadas en el apartado anterior, π y θ, son una incógnita que no puede ser revelada observando procesos anteriores. La finalidad de la siguiente sección será explicar las bases para calcularlas.

Se supondrá que existe independencia entre la pseudo probabilidad $\lambda(t)$ y el proceso de evolución de la tasa *spot*. Lo anterior implica que no importa que alta o baja sea la tasa de descuento, la probabilidad de falta de pago no se ve influenciada por fenómenos de este tipo. Matemáticamente[10]:

$$r(t-1)_u v(t-1,t)_u = r(t-1)_m v(t-1,t)_m = r(t-1)_d v(t-1,t)_d \qquad [2.2]$$

Los bonos con riesgo utilizados en la ecuación anterior se refieren a aquellos que efectivamente pagaron su valor nominal, es decir no son $\delta v(t-1,t)_i$.

Las conclusiones del citado artículo de Harrison y Pliska aplican también para bonos con riesgo. El bono emitido por cualquier empresa, normalizado por la cuenta del mercado monetario, es una martingala.

Dado que e(t) es una tasa de recuperación, el valor nominal del bono v(t,t)[11] puede tomar los valores dados por [2.1]:

---

[9] La probabilidad de incumplimiento de pago en el tiempo t es igual a $\lambda(t-1)$.

[10] Para mayor referencia ver Jarrow y Turnbull (1995).

[11] A diferencia de los bonos libres de riesgo, donde p(t,t)=1. Es decir, su tasa de recuperación es del 100 por ciento.

$$v(t,t) \begin{cases} \delta \text{ con probabilidad } \lambda(t-1) \\ 1 \text{ con probabilidad } 1-\lambda(t-1) \end{cases}$$

Donde $\lambda(t-1) \in (0,1)$ [2.a]

Siguiendo el proceso del apartado 1, para obtener una martingala en t=1 se tiene:

$$\frac{v(0,1)}{b(0)} = E^{\lambda(t-1)}[\frac{v(1,1)}{b(1)}] \quad [2.b]$$

Donde

$$E^{\lambda(t-1)} = (1-\lambda(0))1 + \lambda(0)\delta \quad [2.c]$$

Los valores de las componentes del vector de precios del tipo v(0,t) son conocidos porque se conocen las tasas *spot* r(0).

La ecuación [2.b] se puede generalizar y plantear algo semejante a [1.3]

$$\frac{v(t-n,t)}{b(t-n)} = E^{\lambda(t-1)}[\frac{v(t-n+1,t)}{b(t-n+1)} \quad [2.2]$$

Con n $\in$ [2,3,...,k] donde k-t=0

3. Probabilidad de incumplimiento de pago

Este apartado retoma los procesos explicados en las dos primeras secciones con la finalidad de construir una estructural temporal de activos con riesgo.

Utilizando la evolución temporal de la tasa de interés y el diagrama 2.1 se construye la gráfica 3.1. Explica los posibles factores de pago para bonos con riesgo ante valores alternativos de la cuenta del mercado monetario. El número de estados posibles resulta de la multiplicación de 3^t y (t+1). La probabilidad de cada uno de ellos es también el producto de las probabilidades acotadas en las gráficas 2.1 y 3.1.

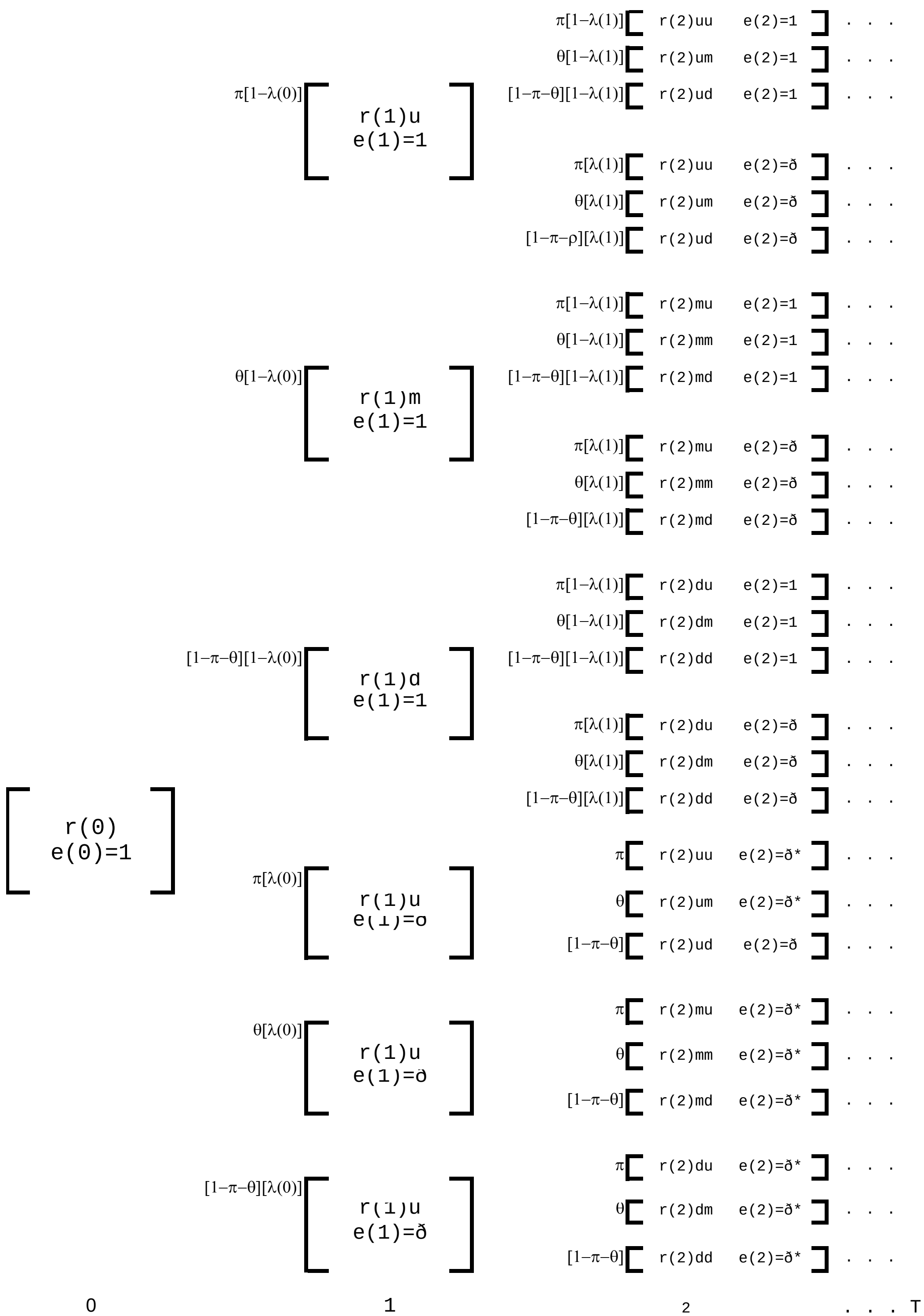
La utilidad de la serie de ecuaciones expuestas en [2.2] es que permite conocer las probabilidades de falta de pago, λ(t-1). Primero tomemos el caso de en que t=1. Según [2.b]:

$$\lambda(0) = \frac{1 - e^{r(0)} v(0,1)}{1 - \delta} \qquad [3.1]$$

En t=2, se parte de 6 posibles estados. De abajo hacia arriba, se denominarán A,B,...,F. Los pagos en los procesos posteriores a A, B y C[12] son equivalentes a δ^*. En D, E y F pueden ser δ ó 1.

[12] A, B y C son estados en los hubo falta de pago.

Gráfica 3.1 Razón de pago y factor de descuento para activos con riesgo



Las probabilidades de estas 6 opciones se señalan a continuación:

A: $(1-\pi-\theta)\lambda(0)$

B: $\theta\lambda(0)$

C: $\pi\lambda(0)$

D: $(1-\pi-\theta)(1-\lambda(0))$

E: $\theta(1-\lambda(0))$

F: $\pi(1-\lambda(0))$

Para A, B y C, según [2.2]

$$v(1,2)_j = \frac{\delta *}{e^{r(1)_i}} \qquad [3.a]$$

donde j es A, B ó C.

Para D, E ó F,

$$v(1,2)_k = \frac{(1-\lambda(1)) + \lambda(1)\delta}{e^{r(1)_i}} \qquad [3.b]$$

donde k representa el estado correspondiente.

Según los argumentos expuestos en la primera sección, [3.a] y [3.b] se pueden escribir respectivamente como:

$$v(1,2)_j = p(1,2)_i \delta^* \qquad [3.c]$$

$$v(1,2)_k = p(1,2)_i[(1-\lambda(1))+\lambda(1)\delta] \qquad [3.d]$$

Una vez obtenidos los valores esperados para el periodo 2 a partir de t=1, resta reutilizar la ecuación [2.2] con los parámetros señalados arriba, ponderando cada estado por su probabilidad:

$$v(0,2) = \frac{1}{e^{r(0)}}\left\{\begin{matrix}(1-\pi-\theta)\lambda(0)v(1,2)_A + \theta\lambda(0)v(1,2)_B + \pi\lambda(0)v(1,2)_C + \\ (1-\pi-\theta)(1-\lambda(0))v(1,2)_D + \theta(1-\lambda(0))v(1,2)_E + \pi(1-\lambda(0))v(1,2)_F\end{matrix}\right\} \qquad [3.e]$$

Reagrupando, podemos dividir la igualdad anterior en dos útiles componentes

$$\frac{1}{e^{r(0)}}\{\lambda(0)\delta[(1-\pi-\theta)\,p(1,2)_d + \theta p(1,2)_m + \pi p(1,2)_u]\} \qquad [3.e']$$

$$\frac{1}{e^{r(0)}}\{(1-\lambda(0))(1-\lambda(1)+\lambda(1)\delta)[(1-\pi-\theta)\,p(1,2)_d + \theta p(1,2)_m + \pi p(1,2)_u]\} \qquad [3.e'']$$

De acuerdo con [1.a], el dividendo y la parte encerrada entre corchetes es equivalente a p(0,2). Lo anterior nos permite factorizar el precio del bono libre de riesgo y expresar [3.e] como:

$$v(0,2) = p(0,2)\{\lambda(0)\delta + (1-\lambda(0))[1-\lambda(1)+\lambda(1)\delta]\} \qquad [3.f]$$

Resta despejar el valor de $\lambda(1)$ para conocer la probabilidad de incumplimiento de pago al periodo dos

$$\lambda(1) = \left\{1-[\frac{v(0,2)}{b(0,2)} - \lambda(0)\delta]\frac{1}{(1-\lambda(0))}\right\}\frac{1}{(1-\delta)} \qquad [3.2]$$

Supongamos que ahora nos interesa hacer el mismo procedimiento para el periodo tres; esto es equivalente a buscar la probabilidad λ(2). Se puede anticipar que el procedimiento será bastante laborioso porque para t=2 el número de estados es igual a 27. Es preciso recordar que existen estados triviales[13]; en este caso, su número es igual a 9. Existen 9 bonos tipo $v(2,3)_j$ y la misma cantidad para $v(2,3)_k$. Las probabilidades están marcadas en la gráfica 3.1.

Siguiendo el proceso recursivo utilizado en el ejemplo anterior, llegará el momento en el que será posible obtener el valor esperado de p(0,3) descontado por $e^{r(0)}$. La ecuación resultante se expresa a continuación:

$$v(0,3) = p(0,3)\{\lambda(0)\delta + (1-\lambda(0))[\lambda(1)\delta + (1-\lambda(1))(1-\lambda(2)+\lambda(2)\delta)\} \qquad [3.g]$$

De esta complicada igualdad se despeja λ(2) y se obtiene la probabilidad de falta de pago para el periodo 3.

$$\lambda(2) = \left\{1-[(\frac{v(0,3)}{b(0,3)} - \lambda(0)\delta)\frac{1}{(1-\lambda(0))} - \lambda(1)\delta]\frac{1}{(1-\lambda(1))}\right\}\frac{1}{(1-\delta)} \qquad [3.3]$$

En general, para el periodo t, la probabilidad de falta de pago estará dada por:

[13] En estos estados no hay probabilidad λ(t) inmiscuida, únicamente dependen de las probabilidades que afectan la tasa de interés.

$$\lambda(t-1)=\left\{1-[(((\frac{v(0,t)}{b(0,t)}-\lambda(0))\frac{1}{(1-\lambda(0))}-\lambda(1)\delta)\frac{1}{(1-\lambda(1))}...)-\lambda(t-2)]\frac{1}{(1-\lambda(t-2))}\right\}\frac{1}{(1-\delta)}$$

[3.4]

La ecuación generalizada indica un hecho sustancial: no importa cuántas alternativas en la evolución de tasas existan, al final la probabilidad de falta de pago del bono con riesgo sólo depende de la tasa *spot* en el periodo inicial, t=0, el vector de bonos con riesgo del tipo **(0,t)** y el parámetro δ que refleja condiciones particulares de cada mercado financiero.

$$\lambda(t-1)=f[(r(0),v(0,t),\delta]$$ [3.5]

Conclusiones

Se ha mostrado que el caso del modelo de incertidumbre de un factor puede ser generalizado al de dos o más factores. El proceso que ello implica se ve enturbiado por el complicado desarrollo algebraico.

La probabilidad de incumplimiento de pago es función de la tasa *spot* inicial, del vector inicial de precios de bonos corporativos (a diferentes vencimientos) y el factor crucial δ. Lo anterior implica que pueden existir cualquier número de factores de incertidumbre, pero esto no influirá en el valor $\lambda(t-1)$.

La principal carencia de este modelo es que el influyente valor de riesgo del mercado, δ, es exógeno. Esto parece sugerir líneas de investigación: en la medida que este valor pueda ser *endogenizado*, el poder explicativo de la metodología expuesta se enriquecerá sustantivamente.

También sugiere la utilidad de demostrar formalmente la inocuidad en la probabilidad de incumplimiento de pago, si el número de posibles variantes en la tasa *spot* se incrementa hasta cualquier número permisible.

Bibliografía

Harrison M. y Pliska S. "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuos trading". Discussion paper No. 454. Enero, 1981.

Ho T. y Lee S. "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims". *The Journal of Finance*. Vol. XLI, No. 5. Diciembre, 1986.

Jarrow R. y Turnbull S. "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk". *The Journal of Finance*. Vol. L, No. 1. Marzo, 1995.

Jarrow R. y Turnbull S. Derivative securities: the complete investor's guide. South-Westerns publications. Julio 1999.

Jarrow. R. Modeling fixed-income securities and interest rate options. Stanford University Press. 2° edición. 2002.