Risoluzione dell'omogenea associata :

1° CASO

Siano λ_1 λ_2 λ_3 λ_4.... λ_n soluzioni distinte dell'omogenea associata, allora il suo integrale generale è :

$$z(x) = C_1 e^{l_1 x} + C_2 e^{l_2 x} \ldots.$$

2° CASO

Se λ_1 è soluzione di molteplicità r allora l'integrale generale diventa :

$$z(x) = C_1 e^{l_1 x} + C_2 x e^{l_1 x} + \ldots + C_r x^{r-1} e^{l_1 x} + \ldots.$$

3° CASO

Se λ_1 λ_2 sono soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2}$=a±jb allora l'integrale generale diventa :

$$z(x) = C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \ldots.$$

Soluzione Particolare :

1° CASO

F(x)=P_m(x) polinomio di grado m φ(x)=P_q / q=m+r
ove r molteplicità della soluzione λ=0, se non esiste la soluzione la soluzione λ=0 è il minimo ordine di derivazione.
Es.

$$y'' + y = x^2 + x$$

$$F(x) = x^2 + x \Rightarrow m = 2, r = 0 \Rightarrow q = 1$$

$$j(x) = Ax^2 + Bx + c$$

2° Caso

$$F(x) = he^{kx}$$

=> φ(x)= - Ae^{kx} se k non è soluzione dell'eq caratteristica

- $Ax^{r}e^{kx}$ se k è soluzione r-upla dell’eq caratteristica

3° Caso

$$F(x) = P_m(x)e^{kx}$$

$$j(x) = P_q(x)e^{kx}$$

$$q = m + r$$

r molteplicità della radice k nell’equazione caratteristica

4° Caso

F(x)=hsin(kx) oppure hcos(kx)

f(x)= -Acos(x)+Bsin(x) se +/-iK non è soluzione dell’equazione caratteristica

- x^{r} [Acos(kx)+Bsin(kx)] se +/-iK è soluzione r-upla della caratteristica.

N.B.

iK è soluzione se e solo se lo è -iK (P(λ) è reale), non bisogna sommare la loro singola molteplicità.

5° Caso

$F(x) = \sum_{1}^{N} F_i(x) \Rightarrow j(x) = \sum_{1}^{n} j_i(x)$ dove $\varphi_i(x)$ è l’integrale particolare corrispondente a $F_i(x)$.

6° Caso

F(x)=hSh(kx) oppure hCh(kx)

Se ne k ne -k sono soluzioni della caratteristica allora φ(x)=ASh(b)+BCh(x) altrimenti se ne k ne -k sono soluzioni (non accade contemporaneamente si determina φ(x) ricorrendo ai casi 5 e 2

7° Caso

$$F(x) = he^{px}\cos(qx)$$

$$F(x) = he^{px}\,\mathrm{sen}(qx)$$

Se p+/-iq non sono soluzione dell’eq caratteristica allara l’integrale:

φ(x)= e^{px} (Acos(qx)+Bsin(qx)), altrimenti se sono soluzioni r-uple della caratteristica φ(x)= e^{px} x^r (Acos(qx)+Bsin(qx))

Equazione di Eulero

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n+1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = F(x), x > 0$$

x^l è un integrale particolare se λ verifica la sequente eq caratteristica :
$a_0 l(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots\ldots\ldots.(\lambda-(n-1))+\ldots\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$, se $\lambda_1..\lambda_n$ sono soluzioni semplici allore l'integrale generale è:

$$z(x) = C_1 x^{l1} + C_2 x^{l2} + \ldots + C_n x^{ln}$$

Se λ_1 è soluzione r-upla allora

$$z(x) = C_1 x^{l1} + C_2 \log x x^{l1} + C_3 (\log x)^2 x^{l1} + \ldots + C_r (\log x)^{r-1} x^{l1} + \ldots + C_n x^{ln}$$

Ricerca di una soluzione particolare
1° Caso
F(x)= hx^k
φ(x)= -A x^k se k non è soluzione della caratteristica
- A x^k $(\log x)^r$ se k è soluzione r-upla della caratteristica
2° Caso
F(x)=P_m(log(x)), polinomio logaritmico di grado x
φ(x)=P_q(log(x)) q=m+r, r molteplicità dell'eventuale soluzione λ=0
3° Caso
Sommatoria delle φ(x), vedi 7° caso a coeff costanti.

Eq del 1° ordine
y(x)=φ(x)Y(x)+ψ(x) ,
l'integrale generale è

$$y(x) = e^{\int j(x)dx}\left[C + \int e^{-\int j(x)dx} y(x)dx\right]$$

Eq di Bernoulli
$y' = p(x)y + q(x)y^a$ con a<>0,1 si dividono ambo i membri sempre per y^a , si pone $y^{1-a} = z$ e alla fine si arriva ad un eq del 1° ordine

Eq a variabili separabili
y’=Y(y)X(x) con XY continue e Y(x)<>0, si divide per Y(x) =>
1/Y(y)(dy/dx)=X(x), poi si integrano ambo i membri.

Eq omogenee
Sono del tipo y’=f(y/x) ove f è una funzione continua x<>0, si pone (y/x)=t(x) =>y=xt(x) y’=t(x)+xt’(x), sostituendo t+xt’=f(t) xt’=f(t)-t t’=1/x[f(t)-t] eq a variabili separabili

Eq Autonome

y’’=f(y,y’)
Si pone y’=z(y)

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'(y)y' \Rightarrow y'' = z'z'$$

sostituendo

$$z'z = f(y,z)$$

Si ottiene un eq del 1° ordine