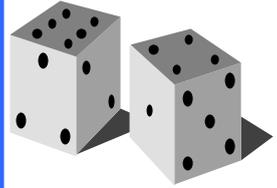


- 📖 Ejemplos
- 🔗 Ejercicios
- 😊 Misceláneas
- 👓 Evaluación

Teoría de errores de medición



Errores de medición. Precisión y exactitud. Cifras significativas. Errores absolutos y relativos. Histogramas. Errores sistemáticos y accidentales. Propagación de errores. Elección de instrumentos de medición.

1 1– Introducción

Una *magnitud física* es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o una sustancia, que puede determinarse cuantitativamente, es decir, es un atributo susceptible de ser medido. En general, usamos estos términos para describir magnitudes como la longitud, la masa, la potencia, la magnetización; y en particular, cuando definimos un *objeto* específico a medir, por ejemplo, la longitud de una barra, la potencia de un motor, la magnetización del hierro, etc. A veces se usa el término *mesurando* para designar la cantidad que se desea medir.

Para establecer el valor experimental de un mesurando recurrimos a observaciones realizadas con *instrumentos de medición* usando *métodos* específicos; instrumentos y métodos que no están exentos de limitaciones. Aun más, nuestras propias observaciones – dependientes de nuestra habilidad y pericia– arrojarán resultados asimismo imperfectos. Es importante en ciencias establecer en toda medición las cotas dentro de las cuales confiamos en que esté contenido el resultado de medición de la magnitud cuyo valor buscamos. Gráficamente, queremos dar como resultado de una medición un intervalo $X - \Delta X$ $\leq X \leq X + \Delta X$ como el de la Figura 1.1, donde esté centrado el valor de la medición de la magnitud X , y rodeado por márgenes establecidos bajo ciertas reglas lo más generales posibles.

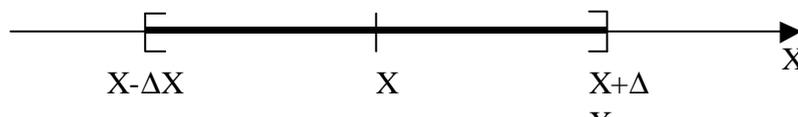


Figura 1.1. Intervalo asociado al resultado de una medición. Notamos que, en vez de dar un único número, definimos un intervalo. El semiancho del intervalo (ΔX) se denomina la *incertidumbre de la medición* (ver texto).

La necesidad de indicar un rango de valores como resultado de una medición, en vez de un único valor, está asociada con la natural imposición de las limitaciones que instrumentos, métodos de medición y observador u observadores introducen en el proceso de medición. Por consiguiente, es necesario establecer un margen de aceptación del resultado de medición y para ello se introduce el concepto de *incertidumbre*. Tradicionalmente, el concepto de incertidumbre de una medición está asociado con el de *error de medición*. En ciencia, el concepto de error, a su vez, tiene un significado diferente del uso habitual de este término. Coloquialmente, es usual el empleo del término error como análogo o equivalente a equivocación. En cambio, el concepto de error de medición tiene que ver, como se tratará de mostrar más adelante, con algo inherente a todo proceso de medición.

Por ejemplo, cuando usamos un termómetro para medir una temperatura, parte del calor del objeto fluye al termómetro (o viceversa) de modo que el resultado de la medición es un valor modificado del original debido a la inevitable interacción que debimos realizar. Es claro que esta interacción podrá o no ser significativa. Si estamos midiendo la temperatura de un metro cúbico de agua, la cantidad de calor transferida al termómetro puede no ser significativa, pero sí lo será seguramente si el volumen en cuestión es de una pequeña fracción del mililitro. Por otro lado, aún con instrumentos tan sofisticados y elaborados como nos esté permitido usar, es posible que el objeto mismo a medir (magnitud física) no esté definido con infinita precisión. Imaginemos que queremos medir el largo de una mesa; es posible que al usar instrumentos cada vez más precisos empecemos a notar las irregularidades típicas del corte, o al ir aun más allá, finalmente detectaremos la naturaleza atómica o molecular del material que la constituye y es claro que en ese punto la longitud dejará de estar bien definida. En la práctica, es posible que mucho antes de estos casos límites, la falta de paralelismo en sus bordes haga que el concepto de la “longitud de la mesa” comience a hacerse cada vez menos definido. Este tipo de limitación se denomina incertidumbre intrínseca o falta de definición de la magnitud en cuestión. Otro ejemplo sería el caso en que se cuenta la cantidad de partículas emitidas por una fuente radioactiva en 5 segundos; sucesivas mediciones arrojarán diversos resultados (similares, pero en general distintos). En este caso, de nuevo, estamos frente a una manifestación de una incertidumbre intrínseca asociada a esta magnitud, el número de partículas emitidas en 5 segundos, más que a la limitación de los instrumentos empleados o al observador.

1.2 – Algunos conceptos básicos

Otras fuentes de errores son las faltas de *precisión* y *exactitud* de los instrumentos. La precisión de un instrumento (o un método de medición) está asociada a la sensibilidad o menor variación de la magnitud que se pueda detectar con dicho instrumento. La mínima cantidad que puede medir directamente un instrumento se denomina su *apreciación nominal*. Así decimos que un tornillo micrométrico (con una apreciación nominal de $10\ \mu\text{m}$) es más preciso que una regla graduada en milímetros, o que un cronómetro es más preciso que un reloj co-

mún, etc. Por otro lado la exactitud de un instrumento (o método de medición) está asociado a la calidad de la calibración del mismo. Por ejemplo imaginemos que el cronómetro que usamos es capaz de determinar la centésima de segundo pero adelanta dos minutos por hora, mientras que el reloj común no lo hace. En este caso decimos que el cronómetro es todavía más preciso que el reloj común pero menos exacto. La exactitud es una medida de la calidad de la calibración de nuestro instrumento respecto de *patrones de medida* aceptados internacionalmente. En general los instrumentos vienen calibrados, pero dentro de ciertos límites. Es deseable que la calibración de un instrumento sea tan buena como la apreciación del mismo. La Figura 1.2 ilustra de modo esquemático estos dos conceptos.

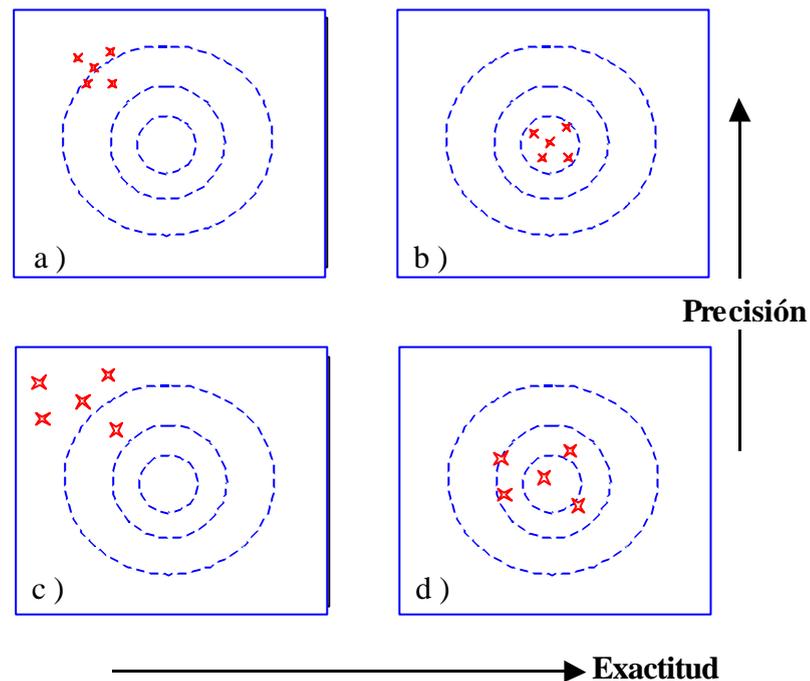


Figura 1.2. Esta figura ilustra de modo esquemático los conceptos de precisión y exactitud. Los centros de los círculos indican la posición del “verdadero valor” del medido y las cruces los valores de varias determinaciones del centro. La dispersión de los puntos da una idea de la precisión, mientras que su centro efectivo (centroide) está asociado a la exactitud. a) es una determinación precisa pero inexacta, mientras d) es más exacta pero imprecisa; b) es una determinación más exacta y más precisa; c) es menos precisa que a).

1.3 – Una posible clasificación de errores

Existen varias formas de clasificar y expresar los errores de medición. Según su origen los errores pueden clasificarse del siguiente modo:

I. Errores introducidos por el instrumento:

- ✓ **Error de apreciación, s_{ap} :** si el instrumento está correctamente calibrado la incertidumbre que tendremos al realizar una medición estará asociada a la mínima división de su escala o la mínima división que podemos resolver con algún método de medición (apreciación). Nótese que no decimos que la incertidumbre *de apreciación* es la mínima división del instrumento, sino la mínima división que es discernible por el observador. La mínima cantidad que puede medirse con un dado instrumento la denominamos *apreciación nominal*.
- ✓ **Error de exactitud, s_{exac} :** representa la incertidumbre (absoluta) con la que el instrumento en cuestión ha sido calibrado.

II. **La interacción del método de medición con el objeto a medir.** Esta fuente de incertidumbre la representamos por s_{int} . Su determinación depende de la medición que se realiza y su valor se estima de un análisis cuidadoso del método usado.

III. **Falta de definición en el objeto sujeto a medición:** como se dijo antes, las magnitudes a medir no están definidas con infinita precisión. Con s_{def} designamos la incertidumbre asociada con la falta de definición del objeto a medir o su incertidumbre intrínseca.

En general, en un dado experimento, todas estas fuentes de incertidumbres estarán presentes, de modo que resulta útil definir la **incertidumbre de medición nominal** s_{nom} como:

$$s_{nom}^2 = s_{ap}^2 + s_{def}^2 + s_{int}^2 + s_{exac}^2 \quad (I.1)$$

 Se desea determinar el diámetro del tronco de un árbol y el área de su sección transversal. ¿Cómo procedería y cuáles son las fuentes principales de incertidumbre en esta determinación? Un método de realizar esto podría consistir en medir el perímetro con una cinta métrica y luego determinar el diámetro y usar este valor para calcular el área. En este caso, la mayor fuente de incertidumbre proviene de la definición del mesurando (el diámetro). Una forma de estimar la incertidumbre sería determinar los valores máximos y mínimos del diámetro usando una serie de mediciones y tomar como $s_{diámetro}$ la semidiferencia de estos valores, $s_{diámetro} = \frac{1}{2} (D_{max} - D_{min})$.

Según su carácter los errores pueden clasificarse en sistemáticos, estadísticos e ilegítimos o espurios.

- a) **Sistemáticos:** dados por el sistema de medición. Por ejemplo piense en un reloj que atrasa o adelanta, en una regla dilatada, el error de paralaje, etc. Los errores introducidos por estos instrumentos (o métodos imperfectos) afectarán nuestros resultados siempre en un mismo sentido. El valor de s_{xac} sería un ejemplo de error sistemático pero desde luego no son lo mismo, ni los errores de exactitud son los únicos responsables de los errores sistemáticos. Imaginemos por ejemplo el caso de una balanza bien calibrada que se usa para conocer el peso de las personas en los centros comerciales u otros negocios, como es usual que las personas (en público) se pesen vestidas, los valores registrados con estas balanzas tendrán un error sistemático por el peso de la vestimenta. La única manera de detectarlos y corregirlos es comparar nuestras mediciones con otros métodos alternativos y realizar un análisis crítico y cuidadoso del procedimiento empleado. También es aconsejable intercalar en el proceso de medición patrones confiables que permitan calibrar el instrumento durante la medición.
- b) **Estadísticos:** Son los que se producen al azar. En general son debidos a causas múltiples y fortuitas. Por ejemplos, si nos equivocamos en contar el número de divisiones en una regla, o estamos mal ubicados frente al fiel de una balanza. Estos errores pueden cometerse con igual probabilidad por defecto como por exceso. Por tanto, midiendo varias veces y promediando el resultado, es posible reducirlos considerablemente. Es a este tipo de errores a los que comúnmente hace referencia la teoría (estadística) de evaluación de incertidumbres que formularemos sucintamente en lo que sigue. Lo designaremos con s_{est} .
- c) **Errores ilegítimos o espurios:** Imaginemos que deseamos calcular el volumen de un objeto esférico y para ello determinamos su diámetro. Si al introducir el valor del diámetro en la fórmula, nos equivocamos en el número introducido, o lo hacemos usando unidades incorrectas, o bien usamos una expresión equivocada del volumen, claramente habremos cometido un error. Esta vez este error está más asociado al concepto convencional de equivocación. A este tipo de errores lo designamos como ilegítimo o espurios. A este tipo de errores tampoco se aplica la teoría estadística de errores y el modo de evitarlo consiste en una evaluación cuidadosa de los procedimientos realizados en la medición.

Cuando se desea combinar los errores sistemáticos con los estadísticos, la prescripción usual es sumar los errores absolutos en cuadratura, es decir sumar los cuadrados de los errores y tomar la raíz cuadrada de este resultado, como lo indica la ecuación (1.2). Si estamos midiendo una magnitud Z , el error final de Z , ΔZ , vendrá dado por:

$$\Delta Z = \sqrt{\mathbf{s}_{est}^2 + \mathbf{s}_{nom}^2} = \sqrt{\mathbf{s}_{est}^2 + \mathbf{s}_{ap}^2 + \mathbf{s}_{def}^2 + \mathbf{s}_{int}^2 + \mathbf{s}_{exac}^2} \quad . \quad (1.2)$$

Las incertidumbres pueden asimismo expresarse de distintos modos, a saber:

- **Incertidumbre absoluta:** es el valor de la incertidumbre combinada (ec. 1.2). Tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida y es conveniente expresarla con las mismas unidades de ésta. Así si Z es la magnitud en estudio, \bar{Z} es el mejor valor obtenido y ΔZ su *incertidumbre absoluta*. El resultado se expresa adecuadamente como:

$$Z = \bar{Z} \pm \Delta Z \quad (1.3)$$

El significado de esta notación es equivalente a decir que según nuestra medición, con cierta probabilidad razonable p_0 (usualmente el $p_0 = 0.68$) el valor de Z está contenido en el intervalo $(\bar{Z} - \Delta Z, \bar{Z} + \Delta Z)$, o sea:

$$\bar{Z} - \Delta Z < Z < \bar{Z} + \Delta Z \quad (1.4)$$

es equivalente a:

$$P(\bar{Z} - \Delta Z < Z < \bar{Z} + \Delta Z) = p_0, \quad (1.5)$$

que significa que la probabilidad que el *mejor estimador* de Z esté comprendido entre $\bar{Z} - \Delta Z$ y $\bar{Z} + \Delta Z$ es igual a p_0 . El valor de p_0 se conoce con el nombre de *coeficiente de confianza* y los valores $(\bar{Z} - \Delta Z, \bar{Z} + \Delta Z)$ determinan un *intervalo de confianza* para Z .

- **Incertidumbre relativa:** e_Z , es el cociente entre la incertidumbre absoluta y el mejor valor de la magnitud, $e_Z = \Delta Z / \bar{Z}$.
- **Incertidumbre relativa porcentual:** $e_Z \%$, es la incertidumbre relativa multiplicada por 100.

 Imaginemos que medimos el espesor de un alambre (cuyo diámetro es $d \approx 3 \text{ mm}$) y su longitud ($L \approx 1 \text{ m}$) con la misma regla graduada en mm . Es claro que los errores absolutos de medición, dados por la apreciación del instrumento, es en ambos casos la misma ($\Delta d = \Delta L = 1 \text{ mm}$), sin embargo resulta evidente que la determinación de la longitud es mucho mejor que la de su diámetro. El error relativo (porcentual) refleja esta diferencia, ya que para el caso del diámetro su valor es $\varepsilon_d\% \approx 30\%$ y para el caso de la longitud tenemos $\varepsilon_L\% \approx 0.1\%$.

1.4 – Cifras significativas

Cuando realizamos una medición con una regla graduada en mm , está claro que si somos cuidadosos, podremos asegurar nuestro resultado hasta la cifra de los milímetros, o en el mejor de los casos con una fracción del mm pero no más. De este modo nuestro resultado podría ser por ejemplo $L = (95.2 \pm 0.5) \text{ mm}$ o bien $L = (95 \pm 1) \text{ mm}$. En el primer caso decimos que nuestra medición tiene tres cifras significativas y en el segundo solo dos. El número de cifras significativas es igual al número de dígitos contenidos en el resultado de la medición que están a la izquierda del primer dígito afectado por el error, incluyendo este dígito. El primer dígito, o sea el que está más a la izquierda, es el más significativo (9 en nuestro caso) y el último (más a la derecha) el menos significativo ya que es en que menos seguridad tenemos. Nótese que carece de sentido incluir en nuestro resultado de L más cifras que aquella en donde tenemos incertidumbres o sea donde cae el error (más cifras de las que son significativas). No es correcto expresar un resultado para L como $(95.321 \pm 1) \text{ mm}$, ya que si tenemos incertidumbre del orden de 1 mm , mal podemos asegurar el valor de las décimas, centésimas y milésimas del mm . Si el valor de L proviene de un promedio y el error es del orden del milímetro, se debe redondear el dígito donde primero cae el error.

Es usual expresar las incertidumbres con *una sola cifra significativa*, y solo en casos excepcionales y cuando existe fundamento para ello, se pueden usar más. También es usual considerar que la incertidumbre en un resultado de medición cae en la última cifra, si es que no se la indica explícitamente. Por ejemplo, si sólo disponemos de la información que una longitud es $L = 95 \text{ mm}$, podemos suponer que la incertidumbre es del orden del milímetro y, como dijimos antes, el resultado de L tiene dos cifras significativas.

Una posible fuente de ambigüedad se presenta con el número de cifras significativas cuando se hace un cambio de unidades. Por ejemplo, si en el último ejemplo deseamos expresar L en μm , el resultado sería $L = (95000 \pm 1000) \mu\text{m}$. ¿Cuántas cifras significativas tenemos en este resultado? Claramente dos, igual que antes, ya que la última cifra significativa

sigue siendo 5. Sin embargo, si no indicamos explícitamente la incertidumbre de L , es difícil saber cuántas cifras significativas tenemos. Nótese que $95 \text{ mm} \neq 95000 \text{ }\mu\text{m}$, ya que el primer resultado tiene sólo dos cifras significativas mientras el segundo tiene 5 (a propósito compare los costos de los instrumentos para realizar estas dos clases de determinaciones). Para evitar estas ambigüedades se emplea la notación científica. En este caso sí podemos escribir la siguiente igualdad: $9.5 \times 10^1 \text{ mm} = 9.5 \times 10^4 \text{ }\mu\text{m}$. Notemos que los números en ambos miembros de la igualdad tienen igual número de cifras significativas, la única diferencia está en las unidades usadas.

1.5 – Histogramas y distribución estadística

Consideremos el siguiente ejemplo, imaginemos tener una población de personas de una dada ciudad y queremos analizar cómo se distribuyen las estaturas de la misma. Para llevar adelante este estudio podemos medir la altura de todos los individuos de la *población*, o bien tomar una *muestra* representativa de la misma, a partir de la cual inferimos las características de la población. Esta clase de estudio es un típico problema de estadística. Consideremos que tomamos una muestra de tamaño N y para la misma medimos las alturas de cada individuo, esta medición dará N resultados: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Todos estos datos estarán comprendidos en un intervalo de alturas (x_{\min}, x_{\max}) . Una manera útil de visualizar las características de este conjunto de datos consiste dividir el intervalo (x_{\min}, x_{\max}) en m subintervalos iguales (o no), delimitados por los puntos $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m)$ que determinan lo que llamaremos el *rango de clases*. Seguidamente, contamos el número n_1 de los individuos de la muestra están en el primer intervalo $[y_1, y_2)$, el número n_j de los individuos de la muestra están en el primer intervalo $[y_{j-1}, y_j)$, etc. hasta el subintervalo m . Aquí hemos usado la notación usual de usar corchetes, [...], para indicar un intervalo cerrado (incluye al extremo) y paréntesis comunes, (...), para denotar un intervalo abierto (excluye el extremo). Con estos valores definimos la función de distribución f_j que se define para cada subintervalos j como:

$$f_j = \frac{n_j}{\sum_j n_j} \quad (1.6)$$

Claramente se ve que la función de distribución esta normalizada, es decir:

$$\sum_{j=1}^m f_j = 1 \quad (1.7)$$

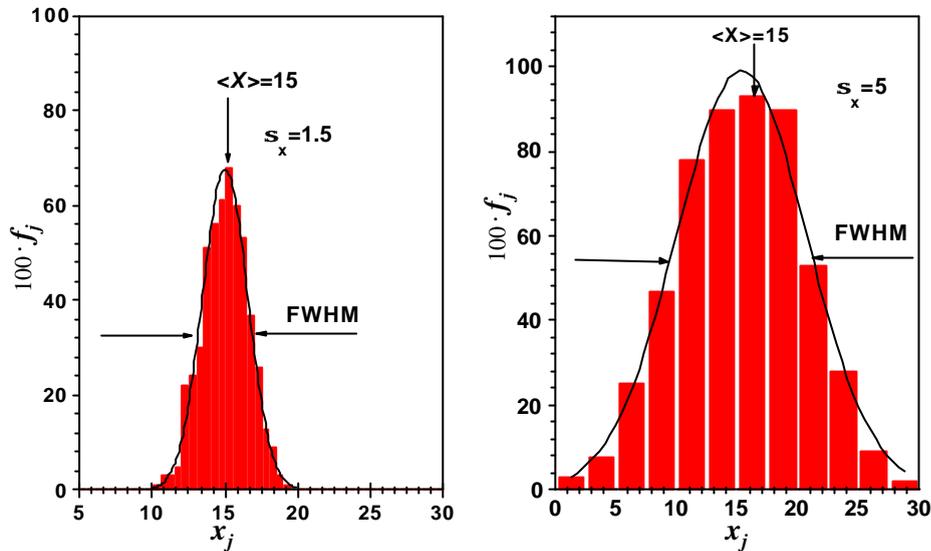


Figura 1.3. Histograma de dos muestras con igual valor medio pero con distintos grados de dispersión. En este ejemplo, los datos tienen una distribución Gaussiana o Normal, descrita por la curva de trazo continuo.

El gráfico de f_j versus $x_j (=0.5 \cdot (y_{j-1} + y_j))$ nos da una clara idea de cómo se distribuyen las altura de los individuos en la muestra en estudio. Este tipo de gráfico se llama un histograma y la mayoría de las hojas de cálculo (Excel, QuatroPro, Origin, etc.) tienen herramientas para realizar la operación descrita aquí y el gráfico en forma automática. En la Figura 1.3 ilustramos dos histogramas típicos.

Tres parámetros importantes de una distribución son:

➤ El valor medio: $\bar{x} = \langle x \rangle = \sum_{j=1}^m x_j \cdot f_j = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i$ (1.8)

➤ La varianza: $Var(x) = s_x^2 = \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 \cdot f_j$ (1.9)

➤ La desviación estándar: $s_x = \sqrt{Var(x)}$ (1.10)

El valor medio da una idea de la localización o valor medio de las alturas en la muestra, en general $\langle x \rangle$ da el centro de masa (centroide) de la distribución. Tanto $Var(x)$ como \mathbf{s} dan una idea de la dispersión de los datos alrededor del promedio. Cuando más concentrada esté la distribución alrededor de $\langle x \rangle$ menor será \mathbf{s} y viceversa. Una distribución de probabilidad muy común en diversos campos es la distribución gaussiana o normal, que tiene la forma de una campana como se ilustra en trazo continuo en la Figura 1.3. La expresión matemática de esta distribución es:

$$f(x) = N(x; m, \mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mathbf{s}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2 \cdot \mathbf{s}^2}\right) \quad (1.11)$$

La "campana de Gauss" está centrada en m y su ancho está determinado por la desviación estándar \mathbf{s} . En particular los puntos de inflexión están en $x - \mathbf{s}$ y $x + \mathbf{s}$. El área de esta curva entre estos dos puntos constituye el 68.3% del total. Asimismo el área entre $x - 2\mathbf{s}$ y $x + 2\mathbf{s}$ es del 96% del total. También es útil caracterizar para esta función el ancho a mitad de su altura, que está relacionado con \mathbf{s} a través de la expresión: $FWHM = 2.35\mathbf{s}$ (FWHM, de "full width half maximum"). Aunque esta distribución ocurre naturalmente en muchos procesos, desde luego no es única y existen muchos tipos de distribuciones de ocurrencia común en la naturaleza.

📖 En general, los valores con los que puede caracterizarse la distribución de un conjunto de N datos son:

- a) la media
- b) la mediana
- c) la moda

La media o promedio de la distribución se define, como ya vimos, como $x = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$, y es la media aritmética de los valores observados.

La moda corresponde al valor de la variable donde está la máxima frecuencia, o sea, que en un histograma la moda corresponde al valor de la variable donde hay un pico o máximo. Si una distribución tiene dos máximos la denominamos distribución bimodal.

La mediana es el valor de la variable que separa los datos entre aquéllos que definen el primer 50% de los valores de los de la segunda mitad.

Mientras que a la media la calculamos usando una fórmula, a la moda la evaluamos directamente del histograma.

Para estimar la mediana tenemos que observar, por ejemplo, la lista de datos ordenados de menor a mayor, y ubicar el valor central de la lista. Si el número de datos es impar, la mediana corresponde precisamente al valor central. Si el número N de datos es par, la mediana se estima como $\frac{1}{2} (X_{N/2} + X_{N/2+1})$. En una distribución una línea vertical trazada desde la mediana divide a la distribución en dos partes de área equivalentes.

Es fácil darse cuenta que media, moda y mediana no tienen por qué coincidir en general. Estos tres parámetros sí son iguales en el caso de distribuciones simétricas respecto del valor medio. Este es el caso de una distribución normal, por ejemplo. En cambio, si la distribución es asimétrica, la diferencia entre moda, media y mediana puede ser sustancial.

Es importante notar que siempre es deseable saber de cuál o cuáles parámetros se están hablando cuando se hace referencia a una distribución de valores. El ejemplo siguiente ayuda a pensar sobre la importancia de este punto. Consideremos, por ejemplo, la distribución del ingreso familiar en un país dado. La presencia de millonarios, aunque sean relativamente pocos, tiene un efecto sobre la media que contrarresta a muchos miembros de la población en el extremo inferior de la escala de salarios. De esta manera, la moda y la media difieren sustancialmente. Este ejemplo ilustra el cuidado que se requiere para interpretar las estadísticas que se manejan. Habitualmente, las personas que emplean datos estadísticos suelen hacerlo en la forma que más conviene a sus propósitos. Con el siguiente ejercicio podemos reflexionar un poco más sobre las diferencias entre los valores de los tres parámetros de una distribución.

✎ La empresa Privilegios S.A. analiza la necesidad de discutir los salarios. El cuadro de sueldos es el siguiente:

Gerente	\$9000
Sub-gerente	\$5000
2Asesor	\$2500
2 Secretarias	\$ 1350 c/u
Capataz	\$ 1200
6 Operarios	\$600 c/u

La empresa argumenta que el salario medio es \$2000. El delegado gremial sostiene que el sueldo representativo es de \$600. Un político consultado asegura que el salario más representativo es \$900. Qué parámetros tuvo en cuenta para argumentar cada persona participante de la reunión? (extraído de la guía de matemáticas del CNBA-UBA).

1.6 – Incertidumbre de una magnitud que se mide una única vez

En este caso el mejor valor será simplemente el valor medido y el error vendrá dado por el error nominal (s_{nom}) del instrumento. Según se deduce de (1.2), $\mathcal{D} = s_{nom}$.

1.7 – Incertidumbre de una magnitud que se mide directamente N veces

Un modo de minimizar la incidencia de los errores estadísticos, es realizar varias mediciones del mesurando, dado su carácter (al azar) es claro que al promediar los resultados, el promedio estará menos afectado de las desviaciones estadísticas que los valores individuales. El procedimiento que se describe seguidamente es un método para determinar el número óptimo de mediciones a realizar en cada caso y el modo de determinar las incertidumbres asociadas a los mejores valores (promedios). Esta teoría no es aplicable para reducir los errores de carácter sistemático o espurios. Por ejemplo si estamos midiendo intervalos de tiempo con un reloj que adelanta, por más que repitamos nuestras mediciones los intervalos siempre serán

más cortos de lo que deberían. Los errores sistemáticos pueden detectarse y corregirse realizando mediciones con otros procedimientos independientes (usando distintos relojes y/u otros dispositivos para medir tiempo). Otra técnica útil para estos fines es introducir en el procedimiento de medición un patrón confiable de modo de intercalar una calibración durante la medición.

Supongamos que se han hecho N mediciones de una misma magnitud con resultados $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N$. Estas N determinaciones puede ser considerada una *muestra* de todas las posibles mediciones que se podrían realizar (*población*). Bajo condiciones muy generales puede demostrarse que el mejor *estimador* de la magnitud x viene dado por el promedio, $\bar{x} \equiv \langle x \rangle$, de los valores:

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{N}. \quad (1.12)$$

Este resultado es llamado también el mejor valor o estimador de x o “valor más probable” del mesurando. Llamaremos a $\Delta x_j = x_j - \bar{x}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) la desviación de cada medición respecto de \bar{x} . También definimos la desviación estándar ($S_x^2 =$ varianza) o error cuadrático medio de cada medición, S_x . Esta cantidad es equivalente al concepto de desviación estándar de la población, más específicamente es un estimador de la misma. La misma da una idea global acerca de la dispersión de los x_j alrededor del promedio \bar{x} . Este estimador muestral (S_x) de la desviación estándar poblacional viene dado por:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2}{N - 1}. \quad (1.13)$$

S_x tiene las mismas dimensiones físicas que \bar{x} , pudiéndose comparar directamente con ésta. La calidad del proceso de medición será mayor cuanto menor sea el cociente S_x/\bar{x} , que en general es una constante del proceso de medición y no disminuye al aumentar N . El valor de S_x de una población puede calcularse para una muestra de datos usando la función *DESVEST* de las planillas de calculo *EXCEL*.

Como acabamos de discutir, S_x representa el error “promedio” de cada medición. Otra manera de explicar el significado de S_x , es pensar que cuando realizamos una serie de mediciones, los resultados obtenidos presentarán una distribución estadística, cuya desviación estándar viene dada por S_x . Si suponemos ahora que realizamos varias series de mediciones de x , y para cada una de estas series calculamos el valor medio \bar{x} , es de esperar que estos valores tendrán una distribución (variarán entre si) pero con una dispersión menor que las medi-

ciones individuales. Se puede probar^[1,3] que a medida que el número K de mediciones aumenta, la distribución de \bar{x} será normal con una desviación estándar dada por:

$$\sigma_{est} = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}. \quad (1.14)$$

S_x se llama el error estándar del promedio y es el estimador del error asociado a \bar{x} . Recordemos que S_x es la dispersión de cada medición y como se dijo no depende de N sino de la calidad de las mediciones, mientras que σ_x sí depende de N y es menor cuanto más grande es N . Si, por ejemplo, estamos midiendo una longitud con una regla graduada en mm , resulta claro, que si aumentamos el número de mediciones, podremos disminuir el error estadístico, pero *nunca* con este instrumento podremos dar con certeza cifras del orden de los micrones, por más que realicemos muchas mediciones. Al aumentar N , σ_x disminuye, sin embargo, desde un punto de vista físico, el error en \bar{x} solo puede disminuir hasta hacerse igual o del orden de S_{nom} . La expresión (1.2) claramente indica que no es razonable esforzarse en disminuir σ_x mucho más que S_{nom} . El balance óptimo se logra cuando $\sigma_x \gg S_{nom}$. Esto nos da un criterio para decidir cual es el número óptimo de mediciones a realizar de un mesurando. Como suponemos que S_x es constante con N , la idea es hacer un número pequeño de mediciones N_{prel} , digamos 5 o 10, luego calcular S_x , de donde se obtiene:

$$N_{op} \gg \frac{\sigma_x^2}{S_{nom}^2}, \quad (1.15)$$

que resulta de imponer la condición: $\sigma_{est} \gg S_{nom}$. Si $N_{op} > N_{prel}$, se completan las mediciones para lograr N_{op} valores. Si $N_{op} < N_{prel}$, no se realizan más mediciones que las preliminares y se usan todas ellas. En todos los casos, según (1.2), el error efectivo de \bar{x} vendrá dado por:

$$\Delta x^2 = \sigma_{eff}^2 = S_{nom}^2 + \sigma_x^2 \quad (1.16)$$

Para la mayoría de los casos de interés práctico, si medimos 100 veces una magnitud x , aproximadamente, 68 de ellas caerán en el intervalo $(\bar{x} - \sigma_x, \bar{x} + \sigma_x)$, 96 de ellas en el intervalo $(\bar{x} - 2\sigma_x, \bar{x} + 2\sigma_x)$, y 99 de ellas en el intervalo $(\bar{x} - 3\sigma_x, \bar{x} + 3\sigma_x)$. Estos resultados valen estrictamente para el caso en que los errores se distribuyan "normalmente", es decir, el

histograma formado con los resultados de las mediciones tengan la forma de una campana de Gauss ^[6].

Resumiendo, los pasos a seguir para medir una magnitud física X son:

1. Se realizan unas 5 a 10 mediciones preliminares y se determina el error promedio de cada medición S_x .
2. Se determina N_{op} .
3. Se completan las N_{op} mediciones de X .
4. Se calcula el promedio \bar{X} y su incertidumbre estadística σ_x .
5. Se escribe el resultado de la forma $X = \bar{X} \pm \sigma_x$.
6. Se calcula el error relativo porcentual $\epsilon_x = 100 * \sigma_x / \bar{x}$.
7. Si se desea verificar que la distribución de valores es normal, se compara el histograma de distribución de datos con la curva normal correspondiente, es decir con una distribución normal de media \bar{x} y desviación standard σ_x .
8. Se analizan posibles fuentes de errores sistemáticos y se corrige el valor medido.
9. Se evalúa la incertidumbre absoluta de la medición combinando las incertidumbres (ec. 1.2).

1.8 – Combinación de N mediciones independientes

Una situación frecuente en ciencia es determinar el mejor valor de una misma magnitud que ha sido medida N veces en forma independiente (diferentes técnicas y/o autores) y cada una de estas mediciones tiene distintos errores. Es decir tenemos un conjunto de N mediciones, cada una caracterizada por un par (x_k, s_k) , con $k = 1, 2, \dots, N$. Nuestro objetivo es obtener el mejor valor para la magnitud en discusión. Es claro que al combinar los distintos resultados para obtener en el “mejor valor”, $\langle x \rangle$, es preciso tener en cuenta los errores de cada determinación, de tal modo que aquellos valores que tengan menos error “pesen” más en el resultado final. Es posible demostrar en este caso que el “mejor valor” $\langle x \rangle$ viene dado por^[1,8]:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{x_k}{s_k^2}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{s_k^2}} \quad (1.17)$$

Con un error dado por $s_{\langle x \rangle}$:

$$\frac{1}{\mathbf{s}_{\langle x \rangle}^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\mathbf{s}_k^2} \quad (1.18)$$

📖 Un caso especial de interés, es cuando tenemos N determinaciones del medando todos con el mismo error σ . Como puede deducirse fácilmente de (1.17) en este caso el promedio será:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N},$$

que, como es de esperar, coincide con la expresión (1.12), la incertidumbre asociada a este valor, será según (1.18):

$$\mathbf{s}_{\langle x \rangle} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{N}},$$

que coincide con la expresión (1.14) y además ilustra claramente el significado de \mathbf{s} como el error asociado a cada medición individual y $\mathbf{s}_{\langle x \rangle}$ la incertidumbre asociada al mejor valor.

1.9 – Discrepancia

Si una magnitud física se mide con dos (o más) métodos o por distintos observadores, es posible (y muy probable) que los resultados no coincidan. En este caso decimos que existe una discrepancia en los resultados. Sin embargo, lo importante es saber si la discrepancia es significativa o no. Un criterio que se aplica en el caso en especial, pero frecuente, de que las mediciones en cuestión se pueda suponer siguen una distribución normal es el siguiente: si los resultados de las dos observaciones a comparar son independientes (caso usual) y dieron como resultados:

$$\text{Medición 1:} \quad X_1 = \bar{X}_1 \pm \Delta X_1$$

$$\text{Medición 2:} \quad X_2 = \bar{X}_2 \pm \Delta X_2$$

definimos:

$$\Delta X^2 = \Delta X_1^2 + \Delta X_2^2$$

Decimos que con un límite de confianza del 68% las mediciones son distintas si:

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \geq \Delta X ,$$

y que con un límite de confianza del 96% las mediciones son distintas si:

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \geq 2 \cdot \Delta X$$

Estos criterios pueden generalizarse para intervalos de confianza mayores en forma similar. También se aplican cuando se comparan valores obtenidos en el laboratorio con valores tabulados o publicados. Nótese la diferencia entre *discrepancia* y *error*, que en algunos textos poco cuidadosos se confunde. El error está relacionado con la incertidumbre en la determinación del valor de una magnitud. La discrepancia está asociada a la falta de coincidencia de dos resultados.

1.10 – Propagación de incertidumbres

A veces, hay magnitudes que no se miden directamente, sino que se derivan de otras que sí son medidas en forma directa. Por ejemplo, para conocer el área de un rectángulo se miden las longitudes de sus lados, o para determinar el volumen de una esfera se puede medir su diámetro. La pregunta que queremos responder aquí es como los errores en las magnitudes que sí se miden directamente, se propagarán para obtener el error en la magnitud derivada. En este breve resumen solo daremos los resultados, para mayor detalle se recomienda consultar la bibliografía. Supongamos para fijar ideas que la magnitud derivada V , es una función de los parámetros, x , y , z , etc. o sea

$$V = V(x, y, z, \dots), \quad (1.19)$$

donde suponemos que x , y , z , etc. sí se midieron directamente y conocemos sus errores que designamos en el modo usual como $\mathbf{D}x$, $\mathbf{D}y$, $\mathbf{D}z$, etc. Entonces se puede demostrar^[1,3] que el error en V vendrá dado por:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \cdot \Delta z^2 + \dots} \quad (1.20)$$

En rigor las derivadas involucradas en esta ecuación son derivadas parciales respecto de las variables independientes x , y , z , etc. En el caso especial que la función $V(x,y,z,..)$ sea factorizable como potencias de x , y , z , etc., la expresión anterior puede ponerse en un modo muy simple. Supongamos para fijar idea que la función en cuestión sea:

$$V(x, y, z) = a \cdot \frac{x^n \cdot y^m}{z^l} \quad (1.21)$$

Entonces:

$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{n^2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + m^2 \cdot \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + l^2 \cdot \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \dots} \quad (1.22)$$

Para cálculos preliminares, esta expresión puede aproximarse por:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx n \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + m \cdot \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + l \cdot \left|\frac{\Delta z}{z}\right| \quad (1.23)$$

Otro caso particular de interés es cuando por ejemplo $Z = x \pm y$. Usando (I.10) obtenemos:

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad (1.24)$$



Truncación de números: Se desea determinar la densidad de un cuerpo, para ello se procedió a medir su volumen, que dio como resultado $V = 3.5 \pm 0.2 \text{ cm}^3$ ($\epsilon_V \% = 6\%$) y su masa $m = 22.7 \pm 0.1 \text{ g}$. ($\epsilon_m \% = 0.4\%$). Para calcular la densidad, ρ , debemos realizar el cociente de m/V . Si realizamos este cociente con la calculadora obtenemos:

$$\rho = 22.7/3.5 = 6.485714286 \text{ g/cm}^3.$$

Claramente, la mayoría de estas cifras **no son** significativas y debemos truncar el resultado. Para saber donde hacerlo, debemos propagar los errores del numerador y denominador, para saber en que cifra cae el error en ρ . Usando (1.22), obtenemos para $\Delta\rho/\rho \approx 0.06$ y por tanto $\Delta\rho \approx 0.4 \text{ g/cm}^3$. Esto es, en el valor de ρ solo una cifra decimal es significativa, sin embargo al truncar el número 6.4857., debemos tener en cuenta que el número más cercano a él y con una sola cifra decimal es 6.5 y no 6.4 que resultaría de una truncación automática. Por lo tanto el valor que obtenemos para ρ es:

$$r = 6.5 \pm 0.4 \text{ g/cm}^3 \quad \text{y} \quad \varepsilon_p \% = 6\%.$$

Es importante tener en cuenta este criterio de truncación toda vez que realizamos una operación usando una calculadora o computadora.

- ☺ **Midiendo p :** Sabemos que el perímetro (p) de un círculo está relacionado con su diámetro (d) por la expresión $p = \pi d$, por lo tanto midiendo el diámetro y perímetro, es posible “medir π ”. Diseñe un experimento que le permita realizar esta medición. Obtenga π con este método. Dé su incertidumbre. Compare los valores tabulados de esta constante. Consulte en la bibliografía otros métodos de obtener π experimentalmente. En particular discuta si con el experimento de [Buffon](http://members.xoom.com/cegm/curiosidades/experimentos.htm) se puede obtener mayor precisión (consulte la página de Internet: <http://members.xoom.com/cegm/curiosidades/experimentos.htm>).
-

1.11 – Elección de los instrumentos

Un aspecto importante a tener en cuenta antes de proceder a realizar una medición, es la elección de los instrumentos más apropiados para medir la magnitud en cuestión con la tolerancia o error requerido. Ignorar este paso puede acarrear importantes pérdidas de tiempo y dinero. Si se excede la tolerancia requerida, seguramente se dilapidó esfuerzo y recursos innecesariamente, por el contrario, si se realizó la medición con más error de requerido, la medición puede haber sido inútil.

 Consideremos el siguiente ejemplo, supongamos que nuestro problema es determinar el volumen de un alambre (cuyo diámetro es $d \approx 3 \text{ mm}$) y su longitud ($L \approx 50 \text{ cm}$) con un error del 1% ¿Qué instrumentos debemos usar para lograr nuestro objetivo con el menor costo? Lo que debemos lograr es $\Delta V/V \gg 0.01$, como $V = \pi d^2 L/4$, tenemos que:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta p}{p} + 2 \cdot \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L}$$

$$0.01 \approx 0.001 + 0.006 + 0.002$$

La primera expresión es una aplicación de (1.23), útil para este análisis preliminar. La asignación de la segunda línea es en cierto modo arbitraria, pero respetando que el error total no supere el 1% requerido. A π , que es un número irracional, le

asignamos un valor pequeño de error relativo, para nos permita saber cuantas cifras debemos usar en π de modo que el error de la truncación de π no afecte nuestra medición. **No medimos π !** Nótese que el error en el diámetro tiene mayor incidencia (su error relativo está multiplicado por 2) que la longitud L , esto se debe a que el volumen es proporcional al cuadrado de d y solo proporcional a L . Un pequeño error en d tiene mayor incidencia en el volumen que el mismo error relativo en L . Por esta razón hemos asignado mayor tolerancia (error relativo) a d que a L . Con esta asignación preliminar podemos decidir que instrumentos son más adecuados para realizar el experimento (los más adecuados son los que hacen la medición más fácil, en menor tiempo, con el menor costo y que cumplan los requisitos exigidos). Como:

$$\frac{\Delta d}{d} \approx 0.003 \Rightarrow \Delta d \approx 0.003 \cdot d = 0.003 \cdot 3mm \approx 0.009mm \approx 0.01mm ,$$

debemos usar un tornillo micrométrico para medir d . Similarmente, para L tenemos:

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 0.002 \Rightarrow \Delta L \approx 0.002 \cdot L = 0.002 \cdot 50cm \approx 1mm ,$$

por lo tanto podemos usar una regla común graduada en mm para medir L . Para π tenemos:

$$\frac{\Delta p}{p} \approx 0.001 \Rightarrow \Delta p \approx 0.001 \cdot p = 0.001 \cdot 3 \approx 0.003 ,$$

que indica que debemos usar π con 3 cifras decimales (el error permitido puede caer en la tercera cifra) para que el error en su truncación tenga una incidencia despreciable. Nótese que hasta ahora todo es preliminar y solo hemos elegido los instrumentos a medir, luego de su elección llevamos adelante la medición usando estos instrumentos y procedemos para la medición de d y L del modo indicado en 1.5. Nótese asimismo, que para determinar los instrumentos a usar, debemos conocer el valor aproximado de los valores a medir, esto no es una paradoja, pues para este análisis preliminar sólo es necesario tener una idea de los ordenes de magnitud y no un valor muy exacto. Este orden de magnitud se puede obtener por una inspección visual o una medición rápida y tosca. Finalmente, una vez que realicemos las mediciones de d y L debemos usar la expresión (1.22) para calcular el error ΔV y e_v .

Bibliografía

1. *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed., P. Bevington and D. K. Robinson, McGraw Hill, New York (1993).
2. *Numerical recipes in Fortran*, 2nd ed., W.,H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Veetterling and B.P. Flanner, Cambridge University Press, N.Y. (1992). ISBN 0-521-43064x.
3. *Data analysis for scientists and engineers*, Stuardt L. Meyer, John Willey & Sons, Inc., N.Y. (1975). ISBN 0-471-59995-6.
4. *Trabajos prácticos de física*, J. Fernández y E. Galloni, Centro de Estudiantes de Ing. UBA , Buenos Aires (1963).
5. *Curso superior de física práctica*, B. L. Worsnop y H. T. Flint, Eudeba, Buenos Aires (1964).
6. *Mecánica elemental*, J. G. Roederer, 8^a ed., Buenos Aires, Eudeba (1963). ISBN: 950-23-0290-7.
7. *Guide to the expression of uncertainty in measurement*, 1st ed., International Organization of Standarization (ISO), Suiza (1993). En Internet: <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html>.
8. *Statistics: Vocabulary and symbols*, International Organization of Standarization (ISO), Suiza. En Internet: <http://www.iso.ch/infoe/sitemap.htm>.
9. *Radiation detection and measurement*, Knoll Glenn F., 2^a ed., John Willey & Sons, New York (1989). ISBN 0-471-81504-7.
10. *Estadística*, Spiegel y Murray, 2^{da} ed., McGraw Hill, Schaum, Madrid (1995). ISBN 84-7615-562-X.
11. *Uncertainty in the linear regression slope*, J. Higbie, Am. J. Phys. **59**, 184 (1991); *Least squares when both variables have uncertainties*, J. Orear, *ibid.*, **50**, 912 (1982).
12. *Probability, statistics and Montecarlo*, Review of Particle Properties, Phys. Rev. D **45**, III.32, Part II, June (1992).
13. *Teoría de probabilidades y aplicaciones*, H. Cramér, Aguilar, Madrid (1968); *Mathematical method of statistics*, H. Cramér, Princeton Univ. Press, New Jersey (1958).