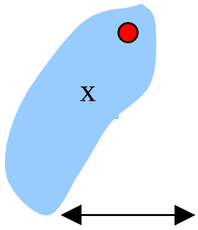
Péndulo físico



Consideraciones generales

En la Figura 1 está representado un péndulo físico, que consiste de un cuerpo de masa m_T suspendido de un punto de suspensión que dista una distancia d_{cm} de su centro de masa.

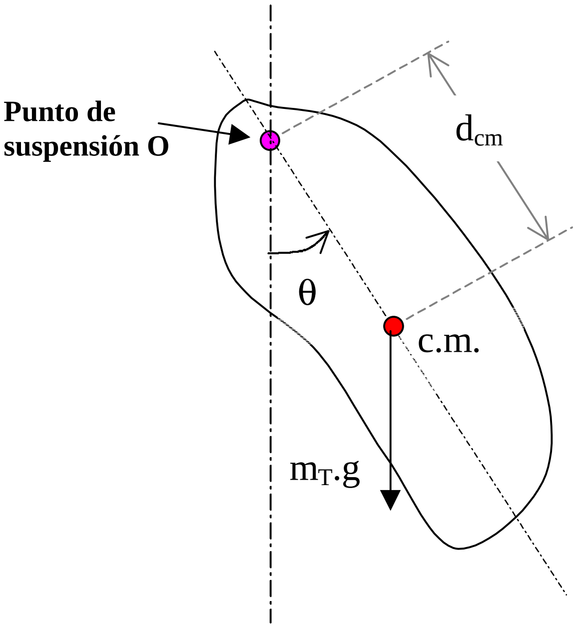


Figura 1: Péndulo físico. c.m. = centro de masa del sistema. d_{cm}= distancia del punto de suspensión al centro de masa.

Período para amplitudes de oscilación pequeñas

El período del péndulo físico para pequeñas amplitudes de oscilación está dado por la ecuación (1):

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m_T \cdot g \cdot d_{cm}}} \qquad (1)$$

donde I es el momento de inercia de péndulo respecto del centro de rotación (punto de suspensión), m_T la masa del mismo, g la aceleración de la gravedad del lugar y d_{cm} la distancia del centro demasa del péndulo al centro de rotación.

Período dependiente de la amplitud de oscilación

Si se tiene en cuenta la variación del período con la amplitud de oscilación, hay que calcularlo según la ecuación (2):

$$T(\theta_0) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\int_{\phi=0}^{\theta_0} \frac{d\phi}{\sqrt{k^2 - \text{sen}^2(\phi/2)}} \right) \qquad (2)$$

donde $k = \text{sen}(\theta_0 / 2)$. Para el caso $\text{sen}(\theta_0/2) = k < 1$, o sea $\theta_0 \leq \pi$, la ecuación (2) tiene la expansión en serie (3):

$$T(\theta_0) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9 \cdot k^4}{64} + \frac{25 \cdot k^6}{256} + \frac{1225 \cdot k^8}{16384} \cdots) \; . \qquad (3)$$

$$T(\theta_0) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{k^2}{2^2} + \frac{3^2 \cdot k^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{5^2 \cdot k^6}{2^2 \cdot 8^2} + \frac{35^2 \cdot k^8}{2^2 \cdot 64^2} \cdots) \; . \qquad (4)$$

También es posible escribir dos expresiones aproximadas para describir la variación del período con la amplitud, que son casi idénticas a la expresión (2) si la amplitud es menor de 90^0.

$$T(\theta_0) = T_0 \cdot \left(\frac{\theta_0}{sin\theta_0} \right)^{3/8} , \quad \text{con} \qquad T_0 = T(\theta = 0^o) \qquad (5)$$

o bien:

$$T(\theta_0) \approx T_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{\theta_0}{\pi_0} \right)^2 \right)^{-\frac{\pi^2}{16}} \approx T_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{\theta_0}{4} \right)^2 \right] \qquad (6)$$

Determinación del momento de inercia de un cuerpo usando un péndulo física.

Según el teorema de los ejes paralelos (teorema de Steiner), el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje paralelo a otro que pasa por su centro de masa a una distancia *y* de sus centro de masa, están relacionados por:

$$I(y) = I_{cm} + M \cdot y^2 \tag{7}$$

donde I_{cm} es el momento de inercia respecto de su centro de masa, I(y) el momento de inercia respecto del nuevo eje (paralelo al primero) y separado aquel por la distancia y (ver figuras 1 y 2). M es la masa del cuerpo. Si ponemos a nuestro objeto a oscilar alrededor del punto ***O***, su período será:

$$T(y) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_{cm} + M \cdot y^2}{M \cdot g \cdot y}} \,. \tag{8}$$

Dado que el centro de gravedad de un cuerpo puede determinarse con relativa facilidad. Para un objeto plano, basta suspenderlo de dos puntos cualesquiera y marcar sobre el mismo las direcciones de las verticales que pasan por los puntos de suspención. La intersección de dichas rectas determina el centro de masa. Esto significa que para un objeto plano el valor de *y* puede determinarse por medición directa. Lo mismo ocurre con un objeto simétrico. la simetría indica la ubicación del centro de masa.

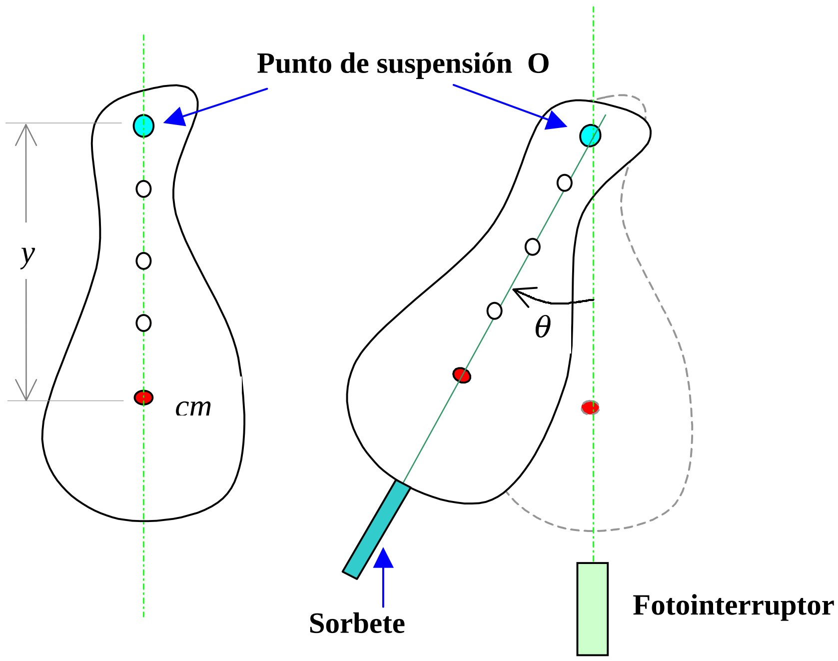


Figura 2: Oscilación de un cuerpo, formando un péndulo físico. Puntos de suspención realizados en el propio cuerpo.

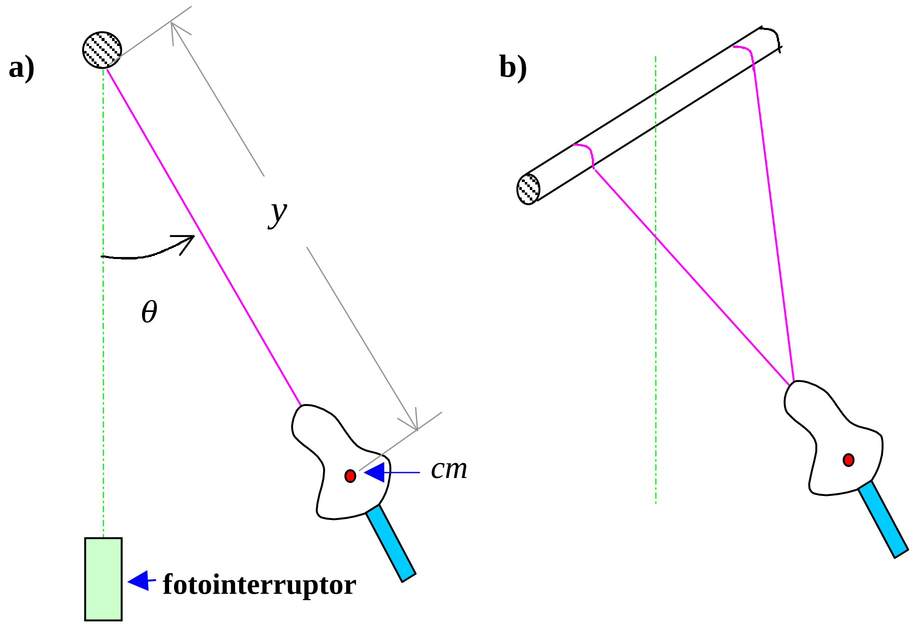


Figura 3: Oscilación de un cuerpo, formando un péndulo físico. Puntos de suspención fuera del cuerpo. a) Vista de frente, b) perspectiva del sistema bifiliar de suspención.

De este modo, si se cuelga el cuerpo de un hilo bifiliar como se indica en la figura 3, midiendo el período del péndulo construido con el cuerpo en cuestión y la distancia *y*, usando la expresión (2) podemos determinar el momento de inercia del cuerpo respecto de su centro de masa. Más específicamente, si definimos las variables:

$$\xi = \frac{T^2}{4 \cdot \pi} \cdot M \cdot g \cdot y \qquad (3)$$

y

$$\lambda = M \cdot y^2 \qquad (4)$$

Según (2) tenemos que la relación entre ξ y λ está dada por:

$$\xi = \lambda + I_{cm}. \qquad (5)$$

Por lo tanto midiendo *T(y)* versus *y*, del gráfico de puede determinarse I_{cm}.

Actividad 1

- Usando un disco metálico o de madera de diámetro entre 20 a 40 cm, con aproximadamente 5 a 10 agujeros de unos 4mm de diámetro (puntos de suspensión), construir un péndulo similar al indicado en las figuras 2 y 3.

Medir el período T para por lo menos 7 distancias y. Graficar $T(y)$ versus y y entre ξ versus λ. A partir de estos gráficos determinar I_{cm}. Estime el error en este parámetro por este método.

- Comparar el valor obtenido de I_{cm} con el obtenido de las mediciones directas de la masa del disco y su diámetro. Estime los errores en esta última determinación.
- Compare los valores de I_{cm} obtenido por los dos métodos anteriores y discuta las ventajas y desventajas de cada método.
-

Actividad 2

- Determine el momento de inercia de un engranaje u otro objeto de forma irregular construyendo un péndulo físico con el mismo. Determine I_{cm} y estime sus errores.

Ejercicios complementarios.

- Usando las leyes de la dinámica deducir la expresión (1).

- Analice las aproximaciones que realiza para obtener la expresión (1).

- Usando las expresiones (2) a (6) discuta cuáles serán los valores de la amplitud (θ_{max}) para que la expresión sea válida al 1% de precisión. ¿Cuál debería ser la amplitud para que (1) sea válida dentro del 0.1%?

- ¿Con qué precisión debe medirse el período de oscilación para distinguir entre $T(\theta=20º)$ y $T(\theta \rightarrow 0º)$?

Bibliografía

1. *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería*, Halliday, Resnick y Krane, 4ta. Ed., Vol. II, Cía. Editorial Continental, S.A. México, (1985).

2. *Simple linearization of the simple pendulum for any amplitude,* M. I. Molina, Phys. Teach. 35, 489 (1997).

3. *The pendulum - rich physics from a simple system*, R. A. Nelson y M. G. Olson, Am. J. Phys. 54, 112 (1986).

4. *Trabajos Prácticos de Física* - J.E. Fernández y E. Galloni - Editorial Nigar - Buenos Aires 1968.

5.