

Klausur Analysis I (PhT 98)
9. Februar 1999, Dauer: 120 Min.

1. Gegeben sei die Folge $\{a_m\}$ mit $a_m = (5 + (-1)^m)/m$, $m = 1, 2, \dots$

- 1.1 Bestimmen Sie die ersten 6 Glieder der Folge.
 1.2 Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie.
 1.3 Weisen Sie nach, daß die Folge konvergiert und/bzw. bestimmen Sie den Grenzwert.

2. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert :

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^2 / (2k^2 + 102)$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} 5k/3^{2k+1}$

3. Berechnen Sie, soweit möglich, zwei der folgenden Grenzwerte :

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 3x^4 - 1}{(3 + 2x)(x^6 + 2x)}$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 + \cos \pi x}$,
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + x^2) e^{-x}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 + x^2) \cos(1/x)$

Was würde sich bei a) für $x \rightarrow 0$ ergeben ?

Wie würde z.B. a) mit Computeralgebra - Pr. berechnet werden ?

4. Gegeben sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{3 + x^2}$
 4.1. Bestimmen Sie den mittleren Anstieg des Graphen der Funktion f im Intervall $[1, 5]$.
 4.2. Welche Aussage liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?
 4.3. Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, 2)$.
 4.4. Approximieren Sie f durch das Taylorpolynom für $n = 2$ um $x_0 = 1$.
 4.5.. Veranschaulichen Sie 4.1., 4.2., 4.3., 4.4. graphisch.
5. Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = (x - 2) |x - 1|$ auf dem Intervall $[0, 4]$ auf Extremwerte. Wie verhält sich $f(x)$ für $x \rightarrow \pm \infty$?
6. Stellen Sie Zusammenhänge dar von Differentialquotient (Ableitung), Differenzenquotient, Differential und Stammfunktion .

Klausur Analysis I (Inf 99)
9. Februar 2000, Dauer: 120 Min.

1. Gegeben sei die Folge $\{ a_m \}$ mit $a_m = (m (-1)^m + 3)/m$, $m = 1, 2, \dots$
 - 1.1 Bestimmen Sie die ersten 6 Glieder der Folge.
 - 1.2 Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie.
 - 1.3 Untersuchen Sie auf Grenzwert, Häufungspunkte.
 - 1.4 Wie ist das Verhältnis zwischen Grenzwert und Häufungspunkt ?

2. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^3}{k(k^2+37)}, \quad \text{b) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{3^{2k+3}}$$

3. Berechnen Sie, soweit möglich (wenn nicht: Begründung!), den Grenzwert :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 + 5x^4 - x}{(3+2x)(x^6+2x)}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} (2+x^2) \sin(1/(x-2))$$

Was würde sich bei a) für $x \rightarrow \pm \infty$ ergeben ? Sind die Funktionen stetig ergänzbar auf \mathbb{R} ?

4. Gegeben sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin 2x$
 - 4.1. Bestimmen Sie den mittleren Anstieg des Graphen der Funktion f im Intervall $[\pi/4, \pi/2]$.
 - 4.2. Bestimmen Sie die Tangente $g(x)$ an den Graphen von f im Punkt $(\pi/2, 0)$.
 - 4.3. Veranschaulichen Sie 4.1., 4.2. graphisch.
 - 4.4. Zeigen Sie, daß gilt: $f(x) - g(x) = O((x-\pi/2)^2)$ für $x \rightarrow \pi/2$!
5. Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = e^{-3x} |(x-2)^2 - 1|$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ auf Extremwerte. Wie verhält sich $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$?
6. Es werde Skat gespielt. Der "Skat" enthält zwei zufällig aus den 32 verschiedenen Skatkarten gezogene Karten.
 - 6.1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Skat keinen Buben enthält?
 - 6.2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Skat bei 5 Spielen
 - a) keinen Buben, b) höchstens einmal keinen Buben und
 - c) niemals keinen Buben enthält ?
 - 6.3. Charakterisieren Sie die Zufallsvariable zu 6.2. . Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt sie?