

Co nového v problému N - dam

(What's new in N-queens problem)

(Václav Kotěšovec)

1) K Lačného článku

Článek Ludovíta Lačného mě velmi zaujal, protože jsem se sám touto problematikou zabýval a problém patří k těm, které se snadno formulují a jejichž řešení se těžko hledá. Rád bych shrnul Lačného výsledky a doplnil je o nové. Nejprve k rozmístění s dam na šachovnici $s \times n$. Pro $s=2$ až 7 jsou známé následující polynomy vyjadřující počty možných rozmístění nenapadajících se dam pro danou šachovnici:

$$P_2 = n^2 - 3n + 2$$

$$P_3 = n^3 - 9n^2 + 30n - 36$$

$$P_4 = n^4 - 18n^3 + 139n^2 - 534n + 840, n \geq 7 \text{ (Gustav Tarry, 1890)}$$

$$P_5 = n^5 - 30n^4 + 407n^3 - 3098n^2 + 13104n - 24332, n \geq 11 \text{ (V.Kotěšovec, Rex Multiplex 38/1992)}$$

$$P_6 = n^6 - 45n^5 + 943n^4 - 11755n^3 + 91480n^2 - 418390n + 870920, n \geq 17 \text{ (V.Kotěšovec, 1992)}$$

$$P_7 = n^7 - 63n^6 + 1879n^5 - 34411n^4 + 417178n^3 - 3336014n^2 + 16209916n - 36693996, n \geq 23 \text{ (V.Kotěšovec, 1992)}$$

Výsledky z Lačného článku specifikují vektory (sloupce) koeficientů polynomu

$$3 \binom{s}{2} = [3, 9, 18, 30, 45, 63, 84, 108, \dots] \quad (\text{tento jsem odhadl již já v roce 1992})$$

$$15 \binom{s}{4} + 12 \binom{s}{3} + 2 \binom{s}{2}^2 + 2 \binom{s-1}{3} + \binom{s-2}{2} + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor - 1 = [2, 30, 139, 407, 943, 1879, 3378, 5626, \dots]$$

(Lačného výsledek, numericky jsem ověřil jeho platnost)

Je zajímavé, že toto jsou vlastně také polynomy, ale pro s :
 $3s^2/2 - 3s/2, 9s^4/8 - 29s^3/12 - s^2/8 + 23s/12$ (pro s liché ještě $-1/2$)

Z Lačného článku speciálně vyplývá, že další polynomy (pro šachovnice $8 \times n, 9 \times n, \dots$) mají tvar

$$P_8 = n^8 - 84n^7 + 3378n^6 - \dots$$

$$P_9 = n^9 - 108n^8 + 5626n^7 - \dots$$

Oceňuji též vysvětlení proč vzorce platí až od poměrně velkého n .

2) Nové výsledky

Zrychlení počítačů umožnilo stanovit počty řešení klasického problému n -dam na šachovnici $n \times n$ až do $n=23$! **Sylvain Pion** a **Joel-Yann Fourre** získali v roce 1996 hodnoty pro $n=21$ až 23 programem pro několik desítek paralelních procesorů, ale přes tento výkonný hardware si výpočty vyžádaly několik týdnů.

Zajímavý je též vývoj odhadu průběhu této funkce. **I.Rivin**, **I.Vardi** a **P.Zimmermann** publikovali v roce 1994 v časopise Amer.Math.Monthly článek "The n-queens problem", ve kterém analyzují problém n -dam a počet různých pozic označují $Q(n)$. Pro mnohé bude překvapující, že neohrožující se dámy je možné rozestavit také na prstencové šachovnici (toroidal board) pro některá lichá N . Tuto funkci označují $T(n)$. Vyslovují zde hypotézu o průběhu těchto funkcí. Obě funkce jsou podle nich řádu n^a , kde obě konstanty a jsou < 1 (hodnoty jsem doplnil o aktuální výsledky, tehdy jen do $n=20$).

Jak se zdá, byla tato hypotéza nyní vyvrácena. **Birger Nielsen** vyslovil v roce 2000 na svoji internetové stránce hypotézu založenou na pravděpodobnosti p pro umístění dámy na dalším slupci. Předpokládá, že $Q(n) \sim n! p^{n-1}$, kde $p \sim 0.3885\dots$. Dokládá to výpočty pro n až do 23 a hodnota p je překvapivě

stabilní (na rozdíl od konstant ve výše citovaném článku), z čehož lze usuzovat, že řada je možná konvergentní (*hodnoty jsou v posledním sloupci tabulky*). Nalezení řádu funkce $Q(n)$ nebo dokonce přímého vzorce bylo snem řady generací matematiků a určitě sám Gauss by byl nadšen z těchto výsledků. Obě hypotézy můžete porovnat v tabulce.

Pokud přijmeme druhou hypotézu, pak s použitím Stirlingova vzorce $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ dostaneme

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Q(n)}{n \log n} = 1$ a tím pádem konstanta **a** z první hypotézy $\rightarrow 1$, což tuto hypotézu znehodnocuje.

n	T(n)	$\frac{\log T(n)}{n \log n}$	Q(n)	$\frac{\log Q(n)}{n \log n}$	$\left(\frac{Q(n)}{n!}\right)^{\frac{1}{n-1}}$
1	1	-	1	-	-
2	0	-	0	-	-
3	0	-	0	-	-
4	0	-	2	0.12500	0.436790
5	10	0.28613	10	0.28613	0.537285
6	0	-	4	0.12895	0.353953
7	28	0.24463	40	0.27081	0.446620
8	0	-	92	0.27181	0.419382
9	0	-	352	0.29651	0.420095
10	0	-	724	0.28597	0.388049
11	88	0.16974	2680	0.29926	0.382559
12	0	-	14200	0.32063	0.387578
13	4524	0.25243	73712	0.33612	0.388542
14	0	-	365596	0.34669	0.385792
15	0	-	2279184	0.36039	0.387849
16	0	-	14772512	0.37213	0.388976
17	140692	0.24612	95815104	0.38156	0.388506
18	0	-	666090624	0.39050	0.388371
19	820496	0.24341	4968057848	0.39908	0.388602
20	0	-	39029188884	0.40703	0.388822
21	0	-	314666222712	0.41408	0.388575
22	0	-	2691008701644	0.42087	0.388583
23	128850048	0.25894	24233937684440	0.42734	0.388717
24	0	-	?	?	?
25	1957725000	0.26586	?	?	?
.					
∞		$\rightarrow 1 ?$		$\rightarrow 1 ?$	$\rightarrow 0.3885... ?$