TEMA 6

Sucesiones y series numéricas

Objetivos: Los objetivos son: (1) estudiar la convergencia de las sucesiones numéricas, (2) Conocer las series numéricas y sus propiedades; (3) saber aplicar los criterios y estudiar la convergencia de las series numéricas.

Prerrequisitos: Manipulación de expresiones y propiedades de las funciones elementales. Concepto de límite de una función y cálculo de límites (regla de L'Hôpital).

Contenido:

- Lección 6.1 Sucesiones numéricas. Definición, características y convergencia. Estudio de la convergencia y cálculo de límites. Infinitésimos equivalente.
- Lección 6.2 Series numéricas. Definición, propiedades elementales y suma de series. Criterios de convergencia.
- Lección 6.3 Series funcionales. Introducción: funciones definidas mediante series. Series de potencias y series de Taylor. Aplicaciones a la suma y aproximación de series numéricas. Series trigonométricas y serie de Fourier.

LECCIÓN 6.1

Sucesiones numéricas

La palabra *sucesión* designa una colección ordenada de objetos, de modo que uno de ellos se identifica como el primero, otro como el segundo, etc. Por lo tanto, una sucesión numérica es una secuencia de números ordenados.

DEFINICIÓN 6.1 *Una* sucesión de números reales *es una aplicación* $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \dots \end{array}$$

Estas funciones se representan con notación de subíndices en lugar de con paréntesis, es decir, al 0 le hace corresponder a_0 (en lugar de $a(0)$), al 1 le hace corresponder a_1 (en lugar de $a(1)$), y así sucesivamente.

Los números reales $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ son los *términos* de la sucesión; a_n es el *término n-ésimo* de la sucesión, es decir, el término que ocupa la posición n y se denomina *término general* de la sucesión; y la sucesión completa se denota $\{a_n\}$, o simplemente a_n. En algunas ocasiones no será posible o no interesará comenzar la sucesión con a_0, sino en cualquier otro término, de modo que la sucesión será: $\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$ para algún $k > 0$.

EJEMPLO 6.1.1 Veamos algunos ejemplos de sucesiones:

- Los términos de la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ con $n \geq 1$ son

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n} \dots$$

- Los términos de la sucesión $b_n = (-1)^n$ son

$$1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

- Los términos de la sucesión $c_n = \dfrac{2^n - 1}{n^2}$ con $n \geq 1$ son

$$\frac{2^1-1}{1^2}, \frac{2^2-1}{2^2}, \frac{2^3-1}{3^2}, \frac{2^4-1}{4^2} \dots = 1, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{15}{16}, \dots$$

- Los términos de la sucesión $\mathrm{d}_n = \dfrac{1+2+3+\dots+n}{n^n}$ con $n \geq 1$ son

$$\frac{1}{1^1}, \frac{1+2}{2^2}, \frac{1+2+3}{3^3}, \frac{1+2+3+4}{4^4}, \dots = 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{9}, \frac{5}{128}, \dots$$

En los ejemplos anteriores, hemos definido la sucesión a partir de la fórmula que proporciona el término general. Sin embargo, existen otras formas de expresar o dar a conocer los términos de una sucesión. Una de ellas es utilizando una propiedad característica. Por ejemplo, la sucesión de números naturales acabados en 7 es $\{7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, \dots\}$, la sucesión de números pares es $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$, la sucesión de múltiplos de 3 es $\{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ o la sucesión de números primos es $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$.

Otra forma de definir una sucesión es mediante una ley de recurrencia o fórmula que permita calcular un término a partir de los términos que le preceden. En este caso será necesario conocer uno o varios términos iniciales. Por ejemplo, la ley de recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n + a_{n-1} \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

define la sucesión $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots\}$ donde a_n es la suma de los n primeros números naturales, que también se puede expresar así:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dependiendo de la ley de recurrencia, a veces es necesario conocer más de un término de la sucesión. Por ejemplo, la ley de recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{si} \quad n > 2 \end{cases}$$

que define la sucesión $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$, conocida como sucesión de Fibonacci. Como en el caso anterior, para calcular el término general de la sucesión será necesario resolver la ecuación de recurrencia (contenidos de la asignatura de Matemática Discreta) y, en este caso, obtenemos que:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Monotonía de una sucesión

Como vemos en la siguiente definición, el palabra *monotonía* se refiere a las propiedades de crecimiento o decrecimiento de los términos de la sucesión.

Definición 6.2 *Sea a_n una sucesión de números reales:*

1. *Decimos que a_n es* monótona creciente *o simplemente* creciente *si*

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \textit{para todo} \quad n$$

y decimos que es estrictamente creciente *si $a_n < a_{n+1}$ para todo n.*

2. *Decimos que* a_n *es* monótona decreciente *o simplemente* decreciente *si*

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \textit{para todo} \quad n$$

y decimos que es estrictamente decreciente *si* $a_n > a_{n+1}$ *para todo* n*.*

Para estudiar la monotonía de una sucesión, tendremos que probar que se cumple alguna de las desigualdades anteriores y, para ello, podemos utilizar métodos de demostración como inducción o reducción al absurdo. Otro método alternativo consiste en considerar (si tiene sentido) la función de variable real f definida en $[1, \infty)$ y tal que $f(n) = a_n$, y determinar el crecimiento de esta función estudiando el signo de la primera derivada. Si f es monótona entonces a_n también lo será.

Ejemplo 6.1.2 En el ejemplo 6.1.1, las sucesiones a_n y d_n son decrecientes, la sucesión b_n no es monótona y la sucesión c_n es creciente.

Acotación de una sucesión

Definición 6.3 *Sea* a_n *una sucesión de números reales:*

1. *Decimos que* a_n *está* acotada superiormente *si el conjunto* $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *está acotado superiormente; es decir,*

   si existe un número real M *tal que* $a_n \leq M$ *para todo* n*.*

2. *Decimos que* a_n *está* acotada inferiormente *si el conjunto* $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *está acotado inferiormente; es decir,*

   si existe un número real M *tal que* $M \leq a_n$ *para todo* n*.*

3. *Decimos que* a_n *está* acotada *si el conjunto* $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *está acotado superior e inferiormente; es decir,*

   si existe un número real positivo M *tal que* $|a_n| \leq M$ *para todo* n*.*

Ejemplo 6.1.3 En el ejemplo 6.1.1, las sucesiones a_n, b_n y d_n están acotadas, y la sucesión c_n está acotada inferior pero no superiormente.

Subsucesiones

Una subsucesión es un subconjunto de términos de la sucesión ordenados de la misma forma y que constituyen una nueva sucesión.

Definición 6.4 *Decimos que la sucesión b_n es una subsucesión de a_n si existe una aplicación $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que: $b_n = a_{f(n)}$.*

La condición de crecimiento de f asegura que el orden de los términos de la subsucesión es el mismo que el de los términos de la sucesión de origen.

Por ejemplo, para una sucesión cualquiera, a_n, los términos correspondientes a los índices pares forman una subsucesión que es

$$a_{2n} = \{a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, \dots\}$$

e igualmente, los términos correspondientes a los índices impares también forman una subsucesión que es

$$a_{2n-1} = \{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}, \dots\}$$

Ejemplo 6.1.4 La subsucesión a_{n^2-1} de la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ es

$$\frac{-1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{15}, \frac{1}{24}, \frac{-1}{35}, \frac{1}{48}, \dots$$

6.1.1. Convergencia de una sucesión

La característica más importante que se estudia en una sucesión es su comportamiento *a largo plazo*, es decir, la tendencia de los términos de la sucesión hacia un valor límite. Esta posible propiedad se denomina convergencia.

Definición 6.5 *Sea a_n una sucesión.*

1. *Decimos que $\ell \in \mathbb{R}$ es el* límite *de la sucesión a_n si* ***para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$*** *(véase la figura 6.1). En tal caso escribimos $\lim a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ y decimos que a_n es* convergente *y* converge *a ℓ. Si la sucesión no es convergente, decimos que es* divergente*.*

2. *Decimos que $+\infty$ es el* límite *de la sucesión a_n si* ***para todo $M \in \mathbb{R}$, existe un número natural N tal que $a_n > M$ para todo $n \geq N$****. En tal caso decimos que la sucesión diverge a $+\infty$ y escribimos $\lim a_n = +\infty$.*

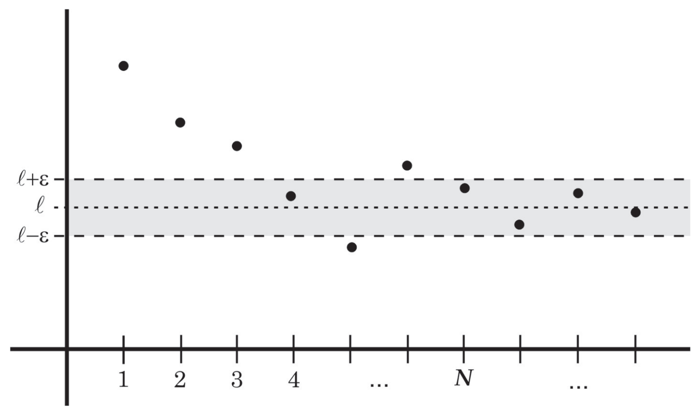

Figura 6.1: Si $\lim a_n = \ell$ entonces para $n \geq N$ los términos de la sucesión distan de ℓ menos de ε unidades.

3. *Decimos que* $-\infty$ *es el* límite *de la sucesión* a_n *si* ***para todo*** $\boldsymbol{M \in \mathbb{R}}$***, existe un número natural*** $\boldsymbol{N}$ ***tal que*** $\boldsymbol{a_n < M}$ ***para todo*** $\boldsymbol{n \geq N}$. *En tal caso decimos que la sucesión diverge a* $-\infty$ *y escribimos* $\lim a_n = -\infty$.

En adelante utilizaremos la siguiente notación: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; este conjunto se denomina $\mathbb{R}$ *ampliado*.

Veamos ahora una serie de resultados relacionados con la convergencia de sucesiones.

Proposición 6.6 *Una sucesión convergente tiene un único límite.*

Proposición 6.7 *Sean* a_n *y* b_n *dos sucesiones convergentes a* ℓ *y* m *respectivamente; entonces:*

1. $\lim(a_n + b_n) = \ell + m$
2. $\lim a_n b_n = \ell \cdot m$
3. *Si* $b_n \neq 0$ *para todo* n *y* $m \neq 0$*, entonces* $\lim \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{m}$.
4. *Si* $b_n > 0$ *para todo* $n \geq N$ *y* $m = 0$*, entonces* $\lim \dfrac{1}{b_n} = +\infty$
5. *Si* $b_n < 0$ *para todo* $n \geq N$ *y* $m = 0$*, entonces* $\lim \dfrac{1}{b_n} = -\infty$

Esta proposición se generaliza a límites infinitos con la proposición siguiente. En el enunciado de la misma vamos a utilizar varias expresiones donde se utiliza el símbolo ∞; tales expresiones deben considerarse como *abreviaturas*;

por ejemplo, $+\infty + \ell = +\infty$ debe leerse como sigue: *el límite de una sucesión que es suma de una sucesión divergente a $+\infty$ y otra convergente a ℓ, es $+\infty$.*

PROPOSICIÓN 6.8 *Las siguientes igualdades simbólicas son válidas:*

1. $\pm\infty + \ell = \pm\infty$
2. $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty), \quad (-\infty) + (-\infty) = (-\infty).$
3. $(+\infty)(+\infty) = +\infty, \quad (-\infty)(-\infty) = +\infty, \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty.$
4. $1/(\pm\infty) = 0$

Como se puede ver, las siguientes situaciones no están contempladas en la proposición anterior y, por tanto, no pueden resolverse directamente:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \qquad \left(\frac{0}{0}\right), \qquad (0 \cdot \infty), \qquad ((+\infty) - (+\infty))$$

Si, en una primera evaluación, nos encontramos con uno de estos casos, diremos que el límite está *indeterminado (a priori)*. En estos casos necesitaremos realizar transformaciones algebraicas que conviertan la expresión de la sucesión en otra que sí permita calcular el límite. Este tipo de problemas se conoce como *cálculo de límites* y en él, se estudian algunos resultados o *criterios de convergencia* que facilitan este cálculo de límites.

EJEMPLO 6.1.5 La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ del ejemplo 6.1.1 es convergente y su límite es 0 aplicando la propiedad 4 de la proposición 6.8. A partir de ella, podemos deducir el límite de cualquier expresión racional sin más que aplicar las propiedades de la proposición 6.7.

Estudio de la convergencia y cálculo de límites

En esta sección vamos a presentar algunos resultados que se utilizan para estudiar la convergencia de una sucesión y que se conocen como criterios de convergencia. También estudiaremos algunos resultados que se utilizan para determinar que una sucesión es divergente, son los llamados métodos de refutación. Y, por último, presentaremos algunas técnicas de cálculo de límites para aplicar en aquellas sucesiones que sean convergentes.

Los resultados que vamos a presentar sólo se pueden aplicar a unas determinadas sucesiones, de modo que para utilizarlos será necesario verificar que se cumplen todas las condiciones exigidas. Sin embargo, el estudio de la convergencia y el cálculo del límite de una sucesión está relacionado con el comportamiento de los términos de la sucesión *a largo plazo*; por tanto, las condiciones que se exijan en un criterio no es necesario que se verifiquen para todos los términos de la sucesión, sino a partir de un lugar. Por ejemplo, si un criterio exige que la sucesión sea de términos positivos, no importará que los primeros términos de la sucesión (un subconjunto finito de ellos) sean negativos y, por lo tanto, también podremos aplicar el criterio en este caso.

Monotonía y convergencia

Las siguientes resultados relacionan las condiciones de monotonía y de convergencia.

PROPOSICIÓN 6.9 *Toda sucesión convergente está acotada.*

PROPOSICIÓN 6.10 *Toda sucesión monótona y acotada es convergente, y en particular se verifica*

- *Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.*
- *Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.*
- *Toda sucesión creciente y no acotada superiormente diverge a $+\infty$.*
- *Toda sucesión decreciente y no acotada inferiormente diverge a $-\infty$.*

EJEMPLO 6.1.6 La sucesión $a_n = n$ es creciente y no acotada y por tanto, $\lim n = +\infty$. La sucesión $b_n = \dfrac{1}{n}$ es decreciente y acotada inferiormente y en consecuencia convergente. Por la proposición 6.8 podemos afirmar que:

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

EJEMPLO 6.1.7 La sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es una sucesión creciente y acotada y en consecuencia es convergente. El límite de esta sucesión es un número irracional y transcendente (es decir, no es raíz de ningún polinomio de coeficientes racionales) y se denota por 'e' siendo su valor aproximado 2,7182.... De hecho, de esta forma se define el número e, base del logaritmo neperiano y de la función exponencial. Además, en general, se verifica que, si x_n es una sucesión divergente a $\pm\infty$, entonces

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}$$

Algunos límites, que inicialmente responden a la indeterminación (1^∞) pueden resolverse utilizando estas sucesiones.

$$\begin{aligned}\lim\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n} &= \lim\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{2n}\\ &= \lim\left(\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right)^{2n/(3n-1)} = \mathrm{e}^{2/3}\end{aligned}$$

Ejemplo 6.1.8 La sucesión

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

es una sucesión decreciente y acotada y, en consecuencia, convergente. El límite se denomina *constante de Euler*, se denota por γ y su valor aproximado es $0{,}577\ldots$. De este número se conocen muchas menos propiedades que para el número 'e' o el número π; por ejemplo, no se sabe aún si este número es racional. También podemos utilizar este límite para estudiar otras sucesiones.

$$\lim\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log n} == \lim\frac{a_n+\log n}{\log n} = \lim\left(\frac{a_n}{\log n}+1\right) = 1$$

Acotación y convergencia

El siguiente resultado se aplica en algunos casos donde la sucesión está acotada

Teorema 6.11 (Teorema de Compresión)

1. *Sean a_n, b_n y c_n tres sucesiones tales que $a_n \le c_n \le b_n$ y $\lim a_n = \lim b_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$; entonces, $\lim c_n = \ell$.*

2. *Sea a_n una sucesión convergente a 0 y b_n una sucesión acotada; entonces, $\lim a_n b_n = 0$.*

Ejemplo 6.1.9 Para estudiar la convergencia de la sucesión

$$c_n = \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}$$

buscamos dos sucesiones convergentes y con el mismo límite que permitan acotar el término general de la sucesión c_n:

$$0 \le \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n} \le n\frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1}$$

Si observamos que las sucesiones $a_n = 0$ y $b_n = \frac{n}{n^2+1}$ son convergentes a 0, podemos deducir, aplicando el teorema 6.11 que la sucesión c_n es también convergente a 0.

Ejemplo 6.1.10 Aplicando el teorema 6.11 podemos deducir que

$$\lim \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$$

pues la sucesión $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$ se puede expresar como producto de una sucesión acotada ($\operatorname{sen} n$) por otra sucesión ($\frac{1}{n}$) convergente a 0.

Criterio de Stöltz-Cesaro

El siguiente resultado se aplica en el cálculo de límites de sucesiones y se asemeja bastante a la regla de L'Hôpital utilizada en el cálculo de límites de funciones.

Teorema 6.12 (Criterio de Stöltz-Cesaro) *Sea b_n una sucesión creciente y divergente a $+\infty$ y sea a_n otra sucesión: si el límite*

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

existe, entonces el límite $\lim \frac{a_n}{b_n}$ *también existe y ambos coinciden.*

Ejemplo 6.1.11 Consideremos la sucesión $\dfrac{1+2+\dots n}{n^2}$ que verifica las condiciones del teorema 6.12. Entonces

$$\lim \frac{1+2+\dots n}{n^2} = \lim \frac{n+1}{(n+1)^2 - n^2} = \lim \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Obsérvese en el ejemplo anterior, la conveniencia de aplicar este criterio cuando la sucesión del numerador o del denominador está constituida por una suma de términos. Sin embargo, debemos tener en cuenta que aunque este resultado se suele aplicar en forma de igualdad,

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

si al estudiar el límite del segundo miembro deducimos que no existe, entonces *no podemos concluir* que el límite del primer miembro tampoco exista; en estas situaciones debemos desestimar el uso de este criterio e intentar otro método.

Ejemplo 6.1.12 Sean $a_n = (-1)^n$ y $b_n = n$ (b_n es creciente y divergente a $+\infty$); en este caso, la sucesión $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ es la sucesión $\{-2, 2, -2, \dots\}$ que es divergente y, sin embargo, la sucesión $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente a 0.

COROLARIO 6.13 (CRITERIO DEL COCIENTE) *Sea x_n una sucesión de términos positivos tal que* $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, *entonces,* $\lim \sqrt[n]{x_n} = \ell$.

Este resultado es, efectivamente, una consecuencia del Criterio de Stoltz e igualmente se suele escribir como una igualdad:

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Sin embargo, debemos tener en cuenta que puede existir el límite del primer miembro y no existir el límite del segundo.

EJEMPLO 6.1.13 Si reescribimos la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$ utilizando la función logaritmo, observamos que una primera evaluación de su límite nos conduce a una indeterminación

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \exp\left(\frac{\log n}{n}\right) = \exp(0 \cdot \infty)$$

Sin embargo, podemos utilizar el criterio del cociente para su cálculo, ya que

$$\lim \frac{n+1}{n} = 1$$

y en consecuencia $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \dfrac{n+1}{n} = 1$

Subsucesiones y convergencia

Las subsucesiones permiten estudiar el límite de una sucesión *por casos.* El resultado fundamental es el siguiente:

TEOREMA 6.14 *Una sucesión a_n converge a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si y solo si toda subsucesión converge a ℓ.*

Sin embargo, utilizaremos una consecuencia de este resultado que enunciamos así:

PROPOSICIÓN 6.15 *Supongamos que dos subsucesiones b_n y c_n de a_n verifican que* $\lim b_n = \lim c_n = \ell$ *y* $\{a_n\} = \{b_n\} \cup \{c_n\}$*; entonces,* $\lim a_n = \ell$.

Este resultado se puede generalizar a cualquier número de subsucesiones con tal de que la unión de sus términos sea la sucesión original, como vemos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.1.14 Consideremos la sucesión $a_n = \dfrac{\cos(n\pi/2)}{n}$. Las cuatro subsucesiones a_{4n-1}, a_{4n-2}, a_{4n-3} y a_{4n} son convergentes a 0 y constituyen una partición (clasificación exhaustiva y excluyente) de los términos de la sucesión a_n. Por lo tanto, $\lim \dfrac{\cos(n\pi/2)}{n} = 0$.

Convergencia de sucesiones y funciones

Los conceptos de límite de sucesión y límite de función están estrechamente relacionados. De hecho, la convergencia de funciones se puede definir en términos de límites de sucesiones:

TEOREMA 6.16 (CARACTERIZACIÓN SECUENCIAL) *Consideremos una función $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si y solo si:* ***para toda sucesión $\{x_n\} \subset D$, con $x_n \neq a$ para todo n, y $\lim x_n = a$, se verifica que $\lim f(x_n) = \ell$.***

Si trabajamos con funciones continuas, entonces podemos sustituir ℓ por $f(a)$ en el teorema. Este resultado tiene importantes consecuencias prácticas respecto del cálculo de límites. Si recordamos que:

1. todas las funciones elementales son continuas en su dominio, y
2. si una función está determinada por operaciones algebraicas (suma, producto, cociente y composición) entre funciones elementales en un entorno de un punto a (entorno en $\mathrm{Dom}(f)$), entonces la función es continua en a.

entonces podemos utilizar la caracterización secuencial para calcular límites de sucesiones utilizando las propiedades de continuidad de las funciones.

EJEMPLO 6.1.15

$$\lim \operatorname{sen} \frac{\pi n - 1}{2 + 3n} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

haciendo uso de que $\lim\limits_{x\to\pi/3} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}$ por ser la función seno una función continua en $\mathbb{R}$.

Otras importante consecuencia de la caracterización secuencial es que podemos utilizar todos los métodos de cálculo de límites de funciones en sucesiones, por ejemplo, la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 6.1.16 Para calcular el límite de sucesiones $\lim \frac{\log n}{n}$ consideramos el correspondiente límite de funciones $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital para obtener el resultado:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

como consecuencia de la caracterización secuencial $\lim \dfrac{\log n}{n} = 0$.

Obsérvese que no se ha aplicado L'Hôpital en el límite de sucesiones sino en un nuevo límite de funciones. Es decir, cambiar la n por la x no es un simple cambio de variable, sino que implica la consideración de una función, en lugar de una sucesión.

Un tipo de expresiones que no hemos considerado hasta ahora son aquellas de la forma $a_n = {x_n}^{y_n}$; para trabajar con ellas usaremos *siempre* la siguiente igualdad:

$${x_n}^{y_n} = \mathrm{e}^{y_n \log x_n}$$

y teniendo en cuenta que la función exponencial es continua en $\mathbb{R}$, y que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, y $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, podemos escribir que:

$$\lim {x_n}^{y_n} = \mathrm{e}^{\lim(y_n \log x_n)}$$

En este tipo sucesiones, surgen tres nuevos tipos de indeterminaciones,

$$1^\infty \qquad \infty^0 \qquad 0^0$$

que se reducen, por la igualdad anterior, a la indeterminación $0 \cdot \infty$.

Métodos por refutación

Con este nombre se conocen los distintos métodos utilizados para demostrar la divergencia de una sucesión.

Un primer método consiste en utilizar la caracterización secuencial del siguiente modo: «encontrando dos sucesiones en las hipótesis del teorema, pero cuyas imágenes no tengan el mismo límite».

Ejemplo 6.1.17 Vamos a probar que la función $\operatorname{sen} x$ NO tiene límite en $+\infty$, es decir, *"$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ no existe"*. Para ello, haciendo uso de la caracterización secuencial, vamos a tomar dos sucesiones divergentes a $+\infty$:

$$x_n = 2\pi n \qquad y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Dado que:

$$\lim \operatorname{sen} x_n = \lim 0 = 0 \neq 1 = \lim 1 = \lim \operatorname{sen} y_n$$

podemos concluir que la función $\operatorname{sen} x$ no tiene límite en $+\infty$.

Otro método para demostrar la divergencia de una sucesión es utilizando las subsucesiones. Por ejemplo, si consideramos la sucesión $a_n = (-1)^n$ observamos que los términos correspondientes a los índices pares es constantemente 1, mientras que los términos correspondientes a los índices impares es constantemente -1; esto nos lleva a la conclusión de que la sucesión no puede ser convergente. El resultado fundamental es teorema 6.14 ya enunciado, sin embargo, utilizaremos la siguiente formulación equivalente:

COROLARIO 6.17 *Supongamos que dos subsucesiones b_n y c_n de a_n verifican que* $\lim b_n \neq \lim c_n$*; entonces, la sucesión a_n no es convergente.*

EJEMPLO 6.1.18 Por ejemplo, si $a_n = (-1)^n$, entonces $a_{2n} = 1$ y $a_{2n+} = -1$; dado que $\lim a_{2n} = 1 \neq -1 = \lim a_{2n+1}$, concluimos que la sucesión a_n no es convergente.

Infinitésimos e infinitos equivalentes

DEFINICIÓN 6.18 *Decimos que la función $f(x)$ es un infinitésimo en a si* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *y $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido de a.*

DEFINICIÓN 6.19 *Decimos que dos funciones f y g, son equivalentes en a si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

La equivalencia de funciones es realmente importante en los casos en que las dos funciones son infinitésimos en a o las funciones son divergentes a $\pm\infty$ en a, ya que en ellos la definición de equivalencia da indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ respectivamente.

EJEMPLO 6.1.19 Para ver que $\operatorname{sen} x$ y x son dos infinitésimos equivalentes necesitamos comprobar que

1. efectivamente son infinitésimos

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0$$

2. y que son equivalentes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

En el teorema siguiente vemos cómo se puede utilizar la equivalencia de infinitésimos en el cálculo de límites de funciones; la caracterización secuencial de límites de funciones hace que esta técnica sea igualmente útil para el cálculo de límites de sucesiones.

Teorema 6.20 *Sean f y g dos infinitésimos equivalentes en a y $h(x)$ otra función definida en un entorno de a. Entonces: $\lim_{x\to a} f(x)h(x)$ existe si y solo si $\lim_{x\to a} g(x)h(x)$ existe, y en tal caso coinciden.*

Este teorema justifica la técnica que se conoce como *sustitución de infinitésimos equivalentes* ya que, en la práctica, las equivalencias dadas en el enunciado, se convierten en igualdades, de forma que, en las condiciones del teorema, escribimos:

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}$$

Los infinitésimos también pueden sustituirse si aparecen dividiendo al resto de la función o sucesión y en general tendríamos que, en las condiciones del teorema anterior, y para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{(f(x))^\alpha} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{(g(x))^\alpha}$$

No podemos sustituir infinitésimos en otras situaciones y, en particular, no se pueden sustituir si aparecen como sumando. En el siguiente ejemplo, una incorrecta sustitución de infinitésimos nos lleva a un resultado erróneo.

Ejemplo 6.1.20 El siguiente desarrollo es incorrecto

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \neq \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

pues se han aplicado infinitésimos equivalentes($\operatorname{sen} x \equiv x$) en una suma. El límite puede calcularse correctamente utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Las equivalencias fundamentales son:

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{sen} x & \equiv & x & \text{en } 0 \\ \operatorname{tg} x & \equiv & x & \text{en } 0 \\ 1-\cos x & \equiv & \dfrac{x^2}{2} & \text{en } 0 \\ \operatorname{arc\,sen} x & \equiv & x & \text{en } 0 \\ \operatorname{arc\,tg} x & \equiv & x & \text{en } 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 & \equiv & x & \text{en } 0 \\ \log(1+x) & \equiv & x & \text{en } 0 \end{array}$$

A partir de estas se pueden obtener muchas otras con los siguientes resultados:

TEOREMA 6.21 *Sean f y g dos infinitésimos equivalentes en a y sea $h(x)$ continua en b y tal que $h(b) = a$. Entonces, $f \circ h$ y $g \circ h$ son infinitésimos equivalentes en b. (Queda implícito que las composiciones se pueden realizar en un entorno de b).*

PROPOSICIÓN 6.22 *Si f y g son infinitésimos equivalentes en a y $\lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces λf y λg también son infinitésimos equivalentes en a.*

Con estos resultados se pueden deducir otras equivalencias:

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{tg}(x^2-1) & \equiv & x^2-1 & \text{en } 1 \\ a^x - 1 & \equiv & x \log a & \text{en } 0 \\ \log x & \equiv & x-1 & \text{en } 1 \end{array}$$

De manera análoga a las funciones, podemos definir las sucesiones equivalentes y trabajar con infinitésimos.

DEFINICIÓN 6.23 *Decimos que dos sucesiones a_n y b_n, son equivalentes si*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

DEFINICIÓN 6.24 *Decimos que la sucesión a_n es un infinitésimo si $\lim a_n = 0$ y $a_n \neq 0$ para todo $n \geq N$.*

La caracterización secuencial de límite de función, permite crear equivalencias entre sucesiones infinitesimales.

PROPOSICIÓN 6.25 *Sean f y g dos infinitésimos equivalentes en a y a_n una sucesión convergente a 'a' y contenida en un entorno reducido de 'a'. Entonces, $f(a_n)$ y $g(a_n)$ son infinitésimos equivalentes.*

Ejemplo 6.1.21 La equivalencia

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} \quad \equiv \quad \frac{1}{n}$$

es válida, ya que las dos sucesiones son convergentes a cero y las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$ son infinitésimos equivalentes en 0. ——

Todo lo dicho en las secciones anteriores para infinitésimos equivalentes es válido para infinitos equivalentes. Una de las equivalencias de sucesiones divergentes a infinito más utilizada es la conocida *Fórmula de Stirling*:

$$\lim \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$$

Ejemplo 6.1.22 Para calcular el límite de la sucesión $a_n = \frac{n!}{n^n}$ utilizamos la fórmula de stirling sustituyendo $n!$ por la expresión $n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ para obtener:

$$\lim \frac{n!}{n^n} = \lim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} = 0$$

donde la última igualdad se prueba usando el criterio de Stöltz o la caracterización secuencial (Regla de L'Hôpital). ——

Ejemplo 6.1.23 El cálculo hecho en el ejemplo 6.1.8 demuestra que las sucesiones $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ y $\log n$ son infinitos equivalentes. ——

Ejercicios básicos

1. Consideremos las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

   a) Calcule los primeros términos de las sucesiones y deduzca "intuitivamente" las características de las sucesiones (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

2. Consideremos la siguiente sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los primeros términos de las sucesiones y deduzca "intuitivamente" las características de las sucesiones (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Determine el término general de la sucesión y calcule su límite.

3. Calcule los siguientes límites

$$\lim \frac{n+3}{n^3+4}, \qquad \lim \frac{n+3n^3}{n^3+4}, \qquad \lim \frac{3-n^5}{n^3+4}$$

   Deduzca la regla que determina el límite del cociente de dos expresiones racionales.

4. Consideremos la sucesión $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \end{cases}$

   a) Determine los 5 primeros términos de la sucesión.

   b) Demuestre por inducción que la sucesión es decreciente.

   c) Demuestre por inducción que $1 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   d) ¿Podemos afirmar que la sucesión es convergente? En tal caso, calcule su límite.

5. Calcule los siguientes límites utilizando las constantes 'e' y γ.

$$a)\ \lim \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{5-n}, \qquad b)\ \lim (1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1})$$

6. Utilice el teorema de compresión para calcular: $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

7. Utilice subsucesiones para calcular el límite de la sucesión

$$\{1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{8}, \dots, \frac{3}{n+2}, 0, \frac{1}{2^{n/3}}, \dots\}$$

8. Utilice el criterio de Stöltz y el del cociente para calcular los siguientes límites:

   a) $\lim \frac{\log(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)}{n \log n}$, *b*) $\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)}$

9. Consideremos la sucesión $a_n = \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{n}}$

   a) ¿Es posible utilizar el criterio del cociente para calcula su límite?

   b) Utilice subsucesiones para calcular su límite.

10. Demuestre que no existe el límite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y calcule, si es posible, el siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}}$$

11. Calcule el límite $\lim(\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n-1})$.

LECCIÓN 6.2

Series Numéricas

Estamos acostumbrados a sumar una cantidad finita de números (dos números, tres, cuatro,...) pero ¿es posible sumar un conjunto infinito de números? La intuición nos puede jugar una mala pasada, haciéndonos pensar que al sumar "infinitos" números se obtendrá "infinito". Y, aunque en algunas ocasiones sea así, también es posible que el resultado de sumar "infinitos" números sea un número real.

Por ejemplo, supongamos que nos colocamos a un metro de distancia a un determinado punto y que nos queremos acercar a él dando pasos de la siguiente forma: cada paso tiene como longitud exactamente la mitad de la distancia que nos separa del destino. Si fuéramos capaces de dar pasos "tan pequeños", esta claro que nunca llegaríamos a nuestro objetivo, es decir, por muchos pasos que demos, como mucho recorreríamos 1 metro. Si pudiésemos dar pasos indefinidamente, la distancia recorrida sería

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

y esta "suma infinita" valdría exactamente 1.

Además de formalizar la noción de suma infinita, en esta lección nos vamos a plantear dos cuestiones. Por un lado, vamos a estudiar condiciones que deben cumplir una sucesión de números para poder afirmar que puede ser sumada; por otra parte, en aquellos casos en los que podamos obtener la suma, estudiaremos si es posible hallar el valor exacto o, en caso contrario, obtendremos valores aproximados.

Para representar las sumas con las que trabajamos en este tema, vamos a utilizar el símbolo $\sum$. Esté símbolo va acompañado de una serie de parámetros que indican la expresión a sumar ($f(n)$), la variable respecto de la que se suma (n) y los valores inicial (a) y final (b) que toma la variable:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a)+f(a+1)+\cdots+f(b)$$

En muchos lenguajes de programación o en programas de cálculo simbólico, esta expresión tiene una sintaxis similar a

$$\mathrm{sum}(f(n), n, a, b)$$

DEFINICIÓN 6.26 *Sea a_n una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión S_n dada por: $S_n = a_1+\cdots+a_n$. A esta sucesión S_n se la denomina* serie numérica asociada a a_n *y se denota* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *El número* a_n *se denomina* término n-ésimo de la serie *y* S_n *es* la n-ésima suma parcial.

Denominaremos *suma de la serie* al límite, si existe, de la sucesión de sumas parciales; si este límite es ℓ, escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \ell$. Si este límite es un número real, diremos que la serie es *convergente*, en caso contrario diremos que es *divergente*; si el límite es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la serie *diverge a* $+\infty$ *o* $-\infty$ respectivamente. La convergencia o divergencia de una serie se denomina *carácter de la serie.*

En la definición anterior hemos considerado que el primer elemento de la suma es exactamente a_1. Esto lo hacemos por simplicidad, pero en la práctica podremos iniciar la suma en cualquier término de la sucesión. Si bien esto puede repercutir en el valor real de la suma, veremos a continuación que no influye en el carácter de la serie.

6.2.1. Propiedades elementales y ejemplos destacados

Proposición 6.27 *Si la sucesión* b_n *se obtiene a partir de la sucesión* a_n *añadiendo, eliminando o modificando un conjunto finito de términos, entonces las series asociadas tienen el mismo carácter.*

En particular, si $a_n = b_m$ para todo $n \geq N_1$ y para todo $m \geq N_2$, entonces las series asociadas a a_n y b_n tienen el mismo carácter. Un ejemplo inmediato donde se ve la importancia de esta propiedad es el siguiente:

$$\text{las series } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } \sum_{n=5}^{\infty} a_n \text{ tienen el mismo carácter.}$$

Esta propiedad es de gran utilidad pues nos dice que, al igual que ocurría con las sucesiones, cuando estudiamos la convergencia de una serie, podemos prescindir de los primeros términos (un conjunto finito cualquiera de ellos). Por ejemplo, si la condición de un teorema es que los términos de la serie sean positivos, también podremos aplicar este resultado a una serie cuyos primeros términos no los sean, con tal de que, a partir de un término, "todos los demás" sean positivos.

Atendiendo a esta propiedad, en adelante, cuando simplemente estemos estudiando el carácter de una serie, no será necesario indicar cuál es el primer término de la misma escribiendo simplemente: $\sum a_n$. Sin embargo, a la hora de calcular la suma de una serie sí es necesario conocer el primer término.

Teorema 6.28 *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge a 'a' y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge a 'b', entonces se verifica que*

1. *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *converge a 'a + b', y*

2. *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ *converge a 'c · a', para todo* $c \in \mathbb{R}$.

A partir de este resultado se deduce que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ es divergente.

Teorema 6.29 (Serie armónica) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *se denomina* serie armónica *y es divergente a* $+\infty$.

Dado que la serie es de términos positivos, la sucesión de sumas parciales es creciente y para demostrar el teorema basta comprobar que alguna subsucesión diverge a $+\infty$; sea S_n la sucesión de sumas parciales y consideremos la subsucesión S_{2^n}:

$$
\begin{aligned}
S_{2^n} &= (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&\geq (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + n\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Dado que la sucesión minorante diverge a $+\infty$, la sucesión S_{2^n} también.

Teorema 6.30 (Condición Necesaria) *Si una serie* $\sum a_n$ *es convergente, entonces* $\lim a_n = 0$.

La demostración de esta propiedad se basa en la siguiente relación entre el término n-ésimo de la serie y la sucesión de sumas parciales:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Como S_{n-1} es una subsucesión de S_n que, por hipótesis es convergente, entonces S_{n-1} y S_n tienen el mismo límite y, por lo tanto, $\lim a_n = 0$.

Ejemplo 6.2.1 Sabiendo que la sucesión de sumas parciales de una serie es $S_n = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n}$ podemos averiguar el término general de la serie

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n}{\mathrm{e}^{n-1}} = \frac{(1-\mathrm{e})n+1}{\mathrm{e}^n}$$

Como $\lim \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} = 0$, entonces (por definición) la serie es convergente y, aplicando la condición necesaria, se obtiene que

$$\lim \frac{(1-\mathrm{e})n+1}{\mathrm{e}^n} = 0$$

Obsérvese que este resultado se puede utilizar como criterio de convergencia para calcular el límite de una sucesión (a_n) a partir de la convergencia de la serie correspondiente $\sum a_n$.

Otra aplicación de la condición necesaria es utilizarla como método de refutación en el estudio de la convergencia de una serie, considerando el siguiente resultado equivalente:

Corolario 6.31 *Si* $\lim a_n \neq 0$*, entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*

Ejemplo 6.2.2 Aplicando la condición necesaria, la serie $\sum \dfrac{n}{n+1}$ es divergente pues la sucesión $\dfrac{n}{n+1}$ no tiende a 0.

Es importante observar que la condición necesaria no es una caracterización y que por tanto, si el término general de una serie tiende a 0, entonces este resultado no dice nada sobre la convergencia. Por ejemplo, la sucesión $\frac{1}{n}$ tiende a 0 y la condición necesaria no aporta información sobre el carácter de la serie $\sum \frac{1}{n}$; que, como sabemos, es divergente.

Teorema 6.32 (Serie telescópica) *Sea* b_n *una sucesión numérica. La serie* $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ *se denomina* serie telescópica*. Esta serie converge si y solo si la sucesión* b_n *converge y en tal caso,* $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_N - \lim b_{n+1}$.

Este resultado es una consecuencia directa de la definición de suma de serie como límite de la sucesión de sumas parciales

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) &= \lim S_n \\
&= \lim(b_N - \cancel{b_{N+1}} + \cancel{b_{N+1}} - \cancel{b_{N+2}} + \cdots + \cancel{b_n} - b_{n+1}) \\
&= b_N - \lim b_{n+1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.3 Para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\frac{n+1}{n}$ procedemos así:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \log\frac{n+1}{n} &= \sum_{n=2}^{\infty} (\log(n+1) - \log n) = \lim S_n = \\
&= \lim(\cancel{\log 3} - \log 2) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \\
&\qquad + \cdots + (\cancel{\log(n+1)} - \log n) = \\
&= -\log 2 + \lim \log(n+1) = +\infty
\end{aligned}
$$

Un error muy común es tratar las series como sumas finitas, operar de la siguiente manera:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\log(n+1) - \log n) = (\cancel{\log 3} - \log 2) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \dots$$

y simplificar los términos opuestos para obtener un resultado incorrecto ($-\log 2$). Curiosamente, con este método se hubiese obtenido un resultado correcto si la sucesión b_n, de la que nos hemos olvidado, tendiese a cero, que no es este caso.

Teorema 6.33 (Serie Geométrica) *Si $a \neq 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \dots$ se denomina serie geométrica de término inicial 'a' y razón 'r'. Esta serie verifica:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \begin{cases} \textit{converge a } \dfrac{a}{1-r} & \textit{si } |r| < 1 \\ \textit{diverge} & \textit{si } |r| \geq 1 \end{cases}$$

El resultado anterior es una consecuencia del siguiente proceso:

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \dots & + & ar^{n-1} & & \\
-rS_n & = & & - & ar & - & ar^2 & - & \dots & - & ar^{n-1} & - & ar^n \\
\hline
(1-r)S_n & = & a & & & & & & & & & & -ar^n
\end{array}
$$

y de esta última expresión se obtiene que

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

y aplicando la definición de serie (tomando límites) alcanzamos el resultado.

Corolario 6.34 *La serie $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es geométrica si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ para todo n. Y, además, esta serie converge si y solo si $|r| < 1$ y en tal caso $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \frac{a_N}{1-r}$.*

Ejemplo 6.2.4 Estudiamos las siguientes series geométricas

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+2}}$: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3^{n+2}}{3^{n+3}}=\dfrac{1}{3}=r$, entonces la serie es geométrica de razón $1/3$ y primer término $1/27$; por tanto, la serie es convergente y su suma es $1/18$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{7^n}$: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^{3n+3}7^n}{7^{n+1}2^{3n}}=\dfrac{8}{7}=r$, entonces la serie es geométrica de razón $8/7$ y en consecuencia divergente a $+\infty$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}$: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{-1}{5}=r$, entonces la serie es geométrica de razón $-1/5$ y primer término 1; por tanto, la serie es convergente y su suma es $5/6$.

Teorema 6.35 (Serie Aritmético-Geométrica) *Las series del tipo*

$$\sum_{n=N}^{\infty}(an+b)r^n$$

se denominan series aritmético-geométrica y convergen si y solo si $|r|<1$.

En el caso de que sean convergentes, las series aritmético-geométricas se suman aplicando un proceso similar al utilizado en las series geométricas.

Ejemplo 6.2.5 La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{2^n}$ es una serie aritmético geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y, por lo tanto, convergente. Su suma se calcula así:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S_n & = & 3 & + & \frac{4}{2} & + & \frac{5}{2^2} & + & \dots & + & \frac{n+3}{2^{n-1}} & & \\
-\frac{1}{2}S_n & = & & - & \frac{3}{2} & - & \frac{4}{2^2} & - & \dots & - & \frac{n+2}{2^{n-1}} & - & \frac{n+3}{2^n} \\
\hline
\frac{1}{2}S_n & = & 3 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \dots & + & \frac{1}{2^{n-1}} & - & \frac{n+3}{2^n}
\end{array}$$

que permite obtener la siguiente expresión:

$$S_n=\frac{3+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{n+3}{2^n}}{1/2}$$

y tomando límite se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{2^n}=\lim S_n=\frac{3+1+0}{1/2}=8$$

sabiendo que $\lim(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})=1$ (serie geométrica) y que $\lim\frac{n+3}{2^n}=0$ (aplicando, por ejemplo, el criterio de Stöltz).

Definición 6.36 *Se dice que la serie* $\sum a_n$ *es* hipergeométrica *si* $a_n > 0$ *para todo* n *y el término general verifica*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

Teorema 6.37 (Serie hipergeométrica) *Una serie* $\sum a_n$ *hipergeométrica con* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$ *es convergente si y sólo si* $\gamma > \alpha + \beta$*.*

En el caso de que sean convergentes, las series hipergeométricas se suman aplicando el siguiente proceso: (1) Escribimos por filas la igualdad $a_{n+1}(\alpha n + \gamma) = a_n(\alpha n + \beta)$ para $n = 1$, $n = 2, \dots,$ (2) sumamos todos los miembros derechos y todos los miembros izquierdos, y (3) operamos para obtener una expresión de S_n lo más simplificada posible para poder calcular su límite.

Ejemplo 6.2.6 Para sumar la serie hipergeométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ procedemos de la siguiente manera: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n+2}$ escribimos, por filas, la expresión "$(n+2)a_{n+1} = na_n$" para los distintos valores de n:

$$\begin{array}{rcl}
3a_2 &=& 1a_1 \\
4a_3 &=& 2a_2 \\
5a_4 &=& 3a_3 \\
\dots &=& \dots \\
(n+2)a_{n+1} &=& na_n \\
\hline
3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + \cdots + (n+2)a_{n+1} &=& a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n \\
-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + (n+2)a_{n+1} &=& 0 \\
S_n - 2a_1 + (n+2)a_{n+1} &=& 0
\end{array}$$

y de la última expresión deducimos que

$$S_n = 2a_1 - (n+2)a_{n+1} = 2\frac{1}{2} - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)}$$

y, por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} = 1$$

6.2.2. Criterios de convergencia

Estudiar la convergencia de una serie utilizando las sumas parciales no siempre será sencillo; encontrar una expresión para las sumas parciales que permita calcular su límite es, en general, un problema bastante difícil. Por esta razón, el estudio de las series se hará en dos etapas: en primer lugar, se estudiará solamente el carácter de la serie; en segundo lugar, si la serie es convergente, afrontaremos el cálculo de su suma o bien aproximaremos su valor.

En esta sección vamos a estudiar algunos resultados que establecen condiciones que permiten concluir la convergencia de una serie sea convergente. Estos resultados se conocen como *criterios de convergencia* y para aplicarlos será muy importante comprobar que se verifican todas las condiciones exigidas. Por ejemplo, los primeros resultados son aplicables solamente a series cuyos términos (a partir uno dado) son siempre positivos. Estas series verifican la siguiente propiedad, que aunque bastantes intuitiva, tiene importantes aplicaciones de cara a la evaluación aproximada de series.

PROPOSICIÓN 6.38 *Si a_n es una sucesión de términos positivos, la sucesión de sumas parciales asociada a ella es creciente y en consecuencia, la serie $\sum a_n$ es o bien convergente o bien divergente a $+\infty$.*

TEOREMA 6.39 (CRITERIO DE CONDENSACIÓN) *Sea a_n una sucesión decreciente de términos positivos. Entonces las series $\sum a_n$ y $\sum 2^k a_{2^k}$ tienen el mismo carácter.*

Este resultado generaliza el procedimiento que habíamos empleado para demostrar la divergencia de la serie armónica.

COROLARIO 6.40 (SERIES P-ARMÓNICAS) *Las series $\sum \dfrac{1}{n^p}$ para $p > 0$ se denominan p–*armónicas*; convergen si $p > 1$, y divergen si $0 < p \leq 1$.*

Por el criterio de condensación, la serie $\sum \dfrac{1}{n^p}$ tiene el mismo carácter que la serie geométrica $\sum \dfrac{2^k}{2^{kp}} = \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$ convergente si y solo si $p > 1$.

La importancia de las series p–armónicas está en que nos ayudarán a estudiar otras series si las utilizamos conjuntamente con otros criterios, como los de comparación o condensación.

EJEMPLO 6.2.7 Para estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ utilizamos el criterio de condensación (la aparición de la función logaritmo nos indica que puede ser el método adecuado). Dado que las sucesiones n y $\log n$ son crecientes, la sucesión $n(\log n)^2$ es también creciente y $\dfrac{1}{n(\log n)^2}$ es decreciente; por el criterio de condensación, la serie propuesta tiene el mismo carácter que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k(\log 2^k)^2} = \frac{1}{(\log 2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

que es convergente por ser la serie 2–armónica.

Teorema 6.41 (Criterio de comparación) *Sean* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series tales que* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Si* $\sum b_n$ *converge entonces* $\sum a_n$ *también converge.*
2. *Si* $\sum a_n$ *diverge entonces* $\sum b_n$ *también diverge.*

Ejemplo 6.2.8 La serie $\sum \dfrac{1}{n+2^n}$ es convergente ya que

$$\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

y la serie $\sum \dfrac{1}{2^n}$ es convergente (geométrica de razón 1/2).

A veces, en situaciones "parecidas" no es posible aplicar este criterio de comparación estándar. Por ejemplo, la serie $\sum \frac{1}{2^n-n}$ es "parecida" a la del ejemplo anterior e intuimos que también será convergente; sin embargo, no podemos utilizar el criterio de comparación. En estos casos, necesitamos un criterio que permita comparar las expresiones en términos relativos (cociente).

Teorema 6.42 (Comp. por paso al límite) *Sean* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos, tal que* $b_n \neq 0$ *para todo* n. *Si* $\ell = \lim \dfrac{a_n}{b_n}$ *entonces se verifica:*

1. *Si* $\ell > 0$ *ambas series tienen el mismo carácter.*
2. *Si* $\ell = 0$ *y* $\sum b_n$ *converge, entonces* $\sum a_n$ *también converge.*
3. *Si* $\ell = \infty$ *y* $\sum a_n$ *converge, entonces* $\sum b_n$ *también converge.*

Ejemplo 6.2.9 Veamos varios casos:

1. La serie $\sum \dfrac{1}{2^n-n}$ es convergente ya que $\sum \dfrac{1}{2^n}$ es convergente y

$$\lim \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n-n}} = \lim \left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = 1$$

2. La serie $\sum n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n^2}$ es divergente pues $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge y

$$\lim \frac{n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n^2}}{1/n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \dfrac{1}{n^2}}{1/n^2} = 1$$

3. La serie $\sum \dfrac{1}{n^n}$ es convergente ya que $\sum \dfrac{1}{n!}$ es convergente y

$$\lim \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

4. La serie $\sum \dfrac{1}{\log n}$ es divergente pues $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge y

$$\lim \frac{\frac{1}{\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{\log n} = \infty$$

El criterio de comparación por paso al límite se utiliza frecuentemente para eliminar "expresiones despreciables" en el término general de una serie, antes de aplicarle un criterio, con el fin de que los cálculo sean más sencillos.

Ejemplo 6.2.10 En el denominador de la expresión $\frac{3n-1}{2^n+5n+\log n}$ el término $5n + \log n$ es "despreciable" frente a 2^n para valores "grandes" de n. Por lo tanto, considero la expresión $\frac{3n-1}{2^n}$ que comparo con la original

$$\lim \frac{\frac{3n-1}{2^n}}{\frac{3n-1}{2^n+5n+\log n}} = \lim \frac{2^n + 5n + \log n}{2^n} = 1$$

Aplicando el criterio de comparación por paso al límite se deduce que el carácter de las series $\sum \frac{3n-1}{2^n+5n+\log n}$ y $\sum \frac{3n-1}{2^n}$ es el mismo; y como $\sum \frac{3n-1}{2^n}$ es convergente (series aritmético geométrica), entonces puedo afirmar que $\sum \frac{3n-1}{2^n+5n+\log n}$ es convergente.

Corolario 6.43 *Sean a_n y b_n dos sucesiones positivas e infinitésimos equivalentes; entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter.*

La siguiente propiedad se deduce fácilmente aplicando el criterio de comparación a las sucesiones a_n y $1/n$, y es útil para el cálculo de algunos límites.

Corolario 6.44 *Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces* $\lim n a_n = 0$

Teorema 6.45 (Criterio de la raíz) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y consideremos el límite $\ell = \lim \sqrt[n]{a_n}$; entonces:*

1. *Si $\ell < 1$ la serie converge.*

2. *Si $\ell > 1$ la serie diverge.*

3. *Si $\ell = 1$ no podemos deducir nada:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *verifican que el límite de la condición vale 1 para ambas series y, sin embargo, la primera es divergente y la segunda es convergente.*

Una importante característica de las series de términos positivos es que las sumas parciales permiten aproximar, por defecto, la suma de la serie. Para poder utilizar estas aproximaciones es necesario estimar el error cometido. Si determinamos la convergencia de una serie utilizando el criterio de la raíz, podemos estimar este error utilizando el siguiente resultado:

Proposición 6.46 *Sea* $\sum a_n$ *una serie convergente tal que* $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ *para todo* $n \geq N$*; si* S_n *es su sucesión de sumas parciales y* S *su suma, entonces:*

$$S - S_N \leq \frac{r^{N+1}}{1-r}$$

Si el límite $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ es estrictamente menor que 1, podemos aplicar el resultado anterior porque tenemos asegurada la existencia del número r y para cada r la existencia del número N. Lo podemos usar para acotar el error cometido al tomar una suma parcial en lugar de la suma exacta, pero en este caso necesitamos determinar el número r correspondiente; de la misma forma, si queremos saber cual es la suma parcial que estima la suma con un error máximo deseado, necesitaríamos determinar los números r y N adecuados. Los siguientes casos particulares, aunque bastante significativos, nos facilitarán la realización de este tipo de tareas:

- Si $\sqrt[n]{a_n}$ es creciente, para cada N podemos tomar $r = \lim \sqrt[n]{a_n}$.
- Si $\sqrt[n]{a_n}$ es decreciente, para cada N podemos tomar $r = \sqrt[N]{a_N}$, siempre y cuando este número sea menor estrictamente que 1.

El criterio de la raíz y el criterio del cociente para el calculo de límites permiten deducir el siguiente criterio para la convergencia de series.

Corolario 6.47 (Criterio del cociente) *Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y consideremos el límite* $\ell = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*; entonces:*

1. *Si $\ell < 1$ la serie converge.*
2. *Si $\ell > 1$ la serie diverge.*
3. *Si $\ell = 1$ no podemos deducir nada:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *verifican que el límite de la condición vale 1 para ambas series y, sin embargo, la primera es divergente y la segunda es convergente.*

Igual que el criterio de la raíz, el uso del criterio del cociente nos da información para estimar errores.

Proposición 6.48 *Sea* $\sum a_n$ *una serie convergente tal que* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ *para todo* $n \geq N$*; si* S_n *es su sucesión de sumas parciales y* S *su suma, entonces:*

$$S - S_N \leq \frac{a_{N+1}}{1-r}$$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que hicimos para el criterio de la raíz, los siguientes casos particulares nos ayudarán a aplicar este resultado en la estimación de errores.

- Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es creciente, para cada N podemos tomar $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es decreciente, para cada N podemos tomar $r = \frac{a_{N+1}}{a_N}$, siempre y cuando este número sea estrictamente menor que 1.

Ejemplo 6.2.11 Aplicamos los resultados anteriores a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ para demostrar que es convergente y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que 10^{-3}:

$$\lim \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

Entonces, por el criterio del cociente, la serie es convergente. Además, dado que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$ es decreciente y menor que 1 para cada n, si S es la suma de la serie y S_n la sucesión de sumas parciales:

$$S - S_N < \frac{1/(N+1)!}{1 - \frac{1}{N+1}} = \frac{1}{N \cdot N!}$$

Si queremos que este error sea menor que 10^{-3}, basta considerar $N = 6$:

$$\sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} = \frac{1957}{720} = 2{,}7180\widehat{5}$$

En el tema siguiente veremos que la suma de esta serie es el número e y el valor aproximado que nos da cualquier calculadora es 2,718281828.

Ejemplo 6.2.12 Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ podemos utilizar los mismos resultados:

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Entonces, por el criterio del cociente, la serie es convergente. Si $x_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{2(n+1)}$, entonces:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2(n+1)(n+1)}{2n(n+2)} = \frac{2n^2+4n+2}{2n^2+4n} > 1$$

y en consecuencia $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es creciente. Por lo tanto, si S es la suma de la serie y S_n la sucesión de sumas parciales:

$$S - S_N < \frac{1}{(N+1)2^N(1-\frac{1}{2})} = \frac{1}{(N+1)2^{N-1}}$$

Si queremos que este error sea menor que 10^{-3}, basta considerar $N = 8$:

$$\sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n2^n} = \frac{148969}{215040} = 0,69275018601\widehat{190476}$$

En el tema siguiente veremos que la suma de esta serie es $\log 2$ y la aproximación que nos da cualquier calculadora es $0,6931471805$.

Teorema 6.49 (Criterio de Raabe) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y consideremos el límite $\ell = \lim n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$; entonces:*

1. *Si $\ell > 1$ la serie converge.*
2. *Si $\ell < 1$ la serie diverge.*
3. *Si $\ell = 1$ no podemos deducir nada: para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, el límite de la condición de Raabe vale 1 y es divergente; para la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$ el límite de la condición es 1 y la serie es convergente.*

Es recomendable utilizar el criterio de Raabe después del criterio del cociente en el caso en que este no decida nada. Debemos tener en cuenta que las *simplificaciones* realizadas al aplicar el criterio del cociente pueden ser útiles al aplicar el criterio de Raabe, pero NO las posibles sustituciones de infinitésimos.

Como en los anteriores, el uso del criterio de Raabe también nos da información para estimar errores.

Proposición 6.50 *Sea* $\sum a_n$ *una serie convergente tal que* $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\geq r>1$ *para todo* $n\geq N$*; si* S_n *es su sucesión de sumas parciales y* S *su suma, entonces:*

$$S-S_N\leq\frac{Na_{N+1}}{r-1}$$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que hicimos para el criterio de la raíz, los siguientes casos particulares nos ayudarán a aplicar este resultado en la estimación de errores.

- Si la sucesión $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es decreciente, para cada N podemos tomar

$$r=\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

- Si la sucesión $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es creciente, para cada N podemos tomar

$$r=N\left(1-\frac{a_{N+1}}{a_N}\right)$$

  siempre que este número sea estrictamente mayor que 1.

Ejemplo 6.2.13 Vamos a usar el criterio de Raabe para probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente (aunque ya lo hemos hecho anteriormente) y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que 10^{-3}.

$$\lim n\left(1-\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right)=\lim\frac{2n^2+n}{(n+1)^2}=2$$

Por el criterio de Raabe, deducimos que la serie es efectivamente convergente. Por otra parte, si $x_n=\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\frac{2n^2+n}{(n+1)^2}$, tenemos que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(2(n+1)^2+n+1)(n+1)^2}{(n+2)^2(2n^2+n)}=\frac{2n^4+9n^3+15n^2+11n+3}{2n^4+9n^3+12n^2+4n}>1$$

Es decir, la sucesión $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es creciente y, por lo tanto, si S es la suma de la serie y S_n su sucesión de sumas parciales:

$$\begin{aligned}S-S_N&\leq\frac{\frac{N}{(N+1)^2}}{\frac{2N^2+N}{(N+1)^2}-1}\\&=\frac{N}{N^2-N-1}<\frac{N}{N^2-N-N}=\frac{1}{N-2}\end{aligned}$$

Si queremos que este error sea menor que 10^{-3}, basta considerar $N = 1002$. En el tema siguiente, calcularemos la suma exacta de esta serie y demostraremos que $S = \pi^2/6$; si utilizamos un ordenador para calcular la suma parcial, obtendremos que:

$$\sum_{n=1}^{1002} \frac{1}{n^2} \approx 1,643936560$$

mientras que el valor aproximado de $\pi^2/6$ que nos da cualquier calculadora es $1,644934066$.

Series alternadas

Los teoremas vistos hasta ahora son válidos solamente para series de términos positivos. En esta, vamos a ver dos resultados que permiten estudiar algunas series con términos de signo arbitrario.

Definición 6.51 *Decimos que una serie* $\sum a_n$ *es* absolutamente convergente *si la serie* $\sum |a_n|$ *es convergente.*

Teorema 6.52 *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Una serie convergente pero no absolutamente convergente se dice *condicionalmente convergente.*

Definición 6.53 *Una serie* $\sum a_n$ *se dice* alternada *si para todo n se verifica que $a_n/a_{n+1} < 0$; es decir, su término general es de la forma $(-1)^n b_n$ o $(-1)^{n+1} b_n$ donde b_n es una sucesión de términos positivos.*

Teorema 6.54 (Criterio de Leibniz) *Sea $\sum (-1)^n a_n$ una serie tal que*

1. *la sucesión a_n es decreciente y de términos positivos,*
2. $\lim a_n = 0$,

entonces, la serie es convergente. (Obsérvese que, según hemos visto, la condición $\lim a_n = 0$ es necesaria para cualquier serie.)

Proposición 6.55 *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ una serie en las condiciones del criterio de Leibniz, S_n su sucesión de sumas parciales y S su suma; entonces:*

$$|S_N - S| < a_{N+1}$$

En la acotación del error tenemos que usar el valor absoluto porque en este caso el error puede ser por exceso o por defecto.

Ejemplo 6.2.14 Vamos a usar el criterio de Leibniz para probar que la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ es convergente y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que 10^{-3}.

1. la sucesión $\frac{1}{n}$ es decreciente y de términos positivos,
2. $\lim \frac{1}{n} = 0$,

Por el criterio de Leibniz, deducimos que la serie es efectivamente convergente. Por otra parte, si S es la suma de la serie y S_n su sucesión de sumas parciales:

$$|S_N - S| < \frac{1}{n+1}$$

Si queremos que este error sea menor que 10^{-3}, basta considerar $N = 999$. En el tema siguiente, calcularemos la suma exacta de esta serie y demostraremos que $S = -\ln 2$; si utilizamos un ordenador para calcular la suma parcial, obtendremos que:

$$\sum_{n=1}^{999}\frac{(-1)^n}{n} \approx -0'6936474305$$

mientras que el valor aproximado de $-\ln 2$ que nos da cualquier calculadora es $-0'6931471805$.

6.2.3. Anexo: esquemas prácticos

En esta sección vamos a presentar algunas estrategias para abordar el estudio de la convergencia de series numéricas. Se trata de unas sencillas recomendaciones fruto de la experiencia.

Determinación del carácter

El siguiente esquema resume los criterios que hemos introducido en el orden más adecuado para su aplicación.

1. Comprobar si es una serie conocida: geométrica, armónica, cociente de polinomios, telescópica, ... (A lo largo de este tema y el siguiente, se estudian distintos tipos de series; tener en cuenta las series ya conocidas puede ahorrar mucho trabajo).

2. Condición necesaria. Esta es la primera comprobación que debe hacerse si el límite es fácil de calcular.

3. Criterios del cociente–Raabe o criterio de la raíz. El criterio del cociente o el de la raíz son los primeros que conviene utilizar; elegir uno u otro depende de la forma del término general de la serie. Optaremos preferiblemente por el criterio del cociente cuando sea posible, ya que permite utilizar posteriormente el de Raabe.

4. Criterio de condensación. Es conveniente utilizarlo, cuando sea posible, en series donde interviene la función logaritmo.

5. Comparación. Si ninguno de los criterios anteriores decide el carácter de la serie, intentaremos buscar una serie conocida con la que poder compararla; solo la práctica y la resolución de bastantes problemas facilita esta etapa.

El cociente a_{n+1}/a_n

Como ya se habrá comprobado, el estudio del cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es de gran utilidad para la determinación del carácter de una serie. En esta sección, recogemos toda la información que puede obtenerse de dicho cociente. Dentro del esquema de la sección anterior, el estudio de este cociente se incluirá en el primer paso.

1. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ entonces la serie es una serie geométrica.

2. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la serie es hipergeométrica (ver ejercicios).

3. Si $a_n > 0$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n > N$, la sucesión a_n es creciente y por tanto su límite no puede ser 0: *la serie es divergente.*

4. Si $a_n > 0$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ para todo $n > N$, la sucesión a_n es decreciente.

Sucesiones decrecientes

El criterio de condensación y el criterio de Leibniz incluyen, entre sus condiciones, el decrecimiento de una sucesión. Para demostrar que una sucesión es decreciente podemos utilizar los siguientes métodos:

1. Si $a_n - a_{n+1} > 0$, entonces a_n es decreciente.

2. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces a_n es decreciente.

3. Si $f\colon [N, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \geq N$, entonces a_n es una sucesión decreciente a partir de N (para determinar si una función es decreciente podemos utilizar su derivada).

4. Por último, podemos utilizar las propiedades algebraicas de la relación de orden para deducir algunas propiedades sobre monotonía de sucesiones y funciones como por ejemplo:

    a) Si f y g son funciones crecientes, entonces $f + g$ creciente.

    b) Si f y g son funciones crecientes y positivas, entonces $f \cdot g$ es creciente.

    c) f es creciente si y solo si $-f$ es decreciente.

    d) Si f es positiva, entonces f es creciente si y solo si $1/f$ es decreciente.

    e) Si f y g son funciones crecientes, entonces $f \circ g$ es creciente.

    f) Si f es una función creciente y d_n es una sucesión decreciente, entonces $f(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión decreciente.

    g) Si h es una función decreciente y d_n es una sucesión decreciente, entonces $f(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión creciente.

Ejercicios básicos

1. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ utilizando los siguientes métodos de la lección anterior: con la ayuda de las constante de Euler determine los límites de las subsuceciones S_{2n} y S_{2n+1} y deduzca a partir de ahí el límite de la sucesión de sumas parciales S_n.

2. Estudie la convergencia de las siguientes series analizando si son telescópicas.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$

3. Utilice las propiedades elementales para estudiar la convergencia de las siguientes series y obtenga la suma de las convergentes.

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}5\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3n^2}{5-n} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{3^{2n}}{9^{2n-1}} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}$$

4. Determine cuáles de las siguientes series son aritmético-geométricas y súmelas sin utilizar ninguna fórmula:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)\mathrm{e}^n$$

5. Determine cuáles de las siguientes series son hipergeométricas y súmelas sin utilizar ninguna fórmula.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a+1)\cdots(a+n)}{n!}, \qquad c)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

6. Las tablas de infinitésimos e infinitos equivalentes que hemos estudiado en la lección anterior nos ayudan a determinar series con el mismo carácter a través del criterio de comparación. Utilizar esta idea para estudiar el carácter de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^2}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{2n^3-1}$$

7. Consideremos la sucesión $a_n=\dfrac{x^n}{n!}$ para algún $x>0$.

   a) Estudie la convergencia de la serie $\sum a_n$.

b) ¿Podemos deducir le valor $\lim a_n$?

8. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n}$ es convergente y aproxime el valor de su suma con un error menor que 10^{-3}.

9. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$ es convergente y aproxime su suma con un error menor que 10^{-3}.

10. Estudiar el carácter de las siguientes series:

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$

    c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^a}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$

    e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(-2)^n}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

    g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^a+1}-\sqrt{n^a})$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{7n+4}\right)^{4n-2}$

    i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ *j)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(9-a^2)n^3+3n^2+1}{7n^4-1}$

    k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}, (a\geq 0)$ *l)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^n}$

LECCIÓN 6.3

Series funcionales

En la lección anterior hemos estudiado ejemplos de series numéricas cuyo término general depende de un parámetro. Incluso hemos podido sumar alguna de ellas dando su suma en función de ese parámetro:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Como hemos podido comprobar, no siempre es asequible sumar una serie, pero aun así podemos estar interesados en estudiar las propiedades de la relación de dependencia de la serie respecto de un parámetro. En definitiva, queremos estudiar las propiedades de funciones definidas mediante series, aunque estas no puedan expresarse en términos de funciones elementales.

Esta lección y la siguiente están dedicadas a estudiar dos tipos específicos de series *funcionales*. Los resultados y métodos que estudiamos aquí solo son aplicables a estos tipos específicos de series y por lo tanto debemos de tener cuidado para identificar correctamente la serie antes de aplicar lo que vamos a estudiar en estas lecciones.

6.3.1. Series de potencias

DEFINICIÓN 6.56 *Una* serie de potencias *es una función definida por una expresión de la forma:*

$$f(x) = \sum_n a_n (x-a)^n$$

El número a se denomina centro *de la serie.*

Tal y como acordamos en la lección anterior, omitimos los límites de los sumatorios por simplicidad y porque el sumando inicial de la serie no influye en sus características. Sí tendremos que explicitarlo cuando necesitemos trabajar con el valor real de la suma.

EJEMPLO 6.3.1

1. $\displaystyle\sum_n \frac{(x-1)^n}{n}$ es una serie de potencias centrada en 1; en este caso, $a_n = \dfrac{1}{n}$.
2. $\displaystyle\sum_n \operatorname{sen}^n x$ no es una serie de potencias.

TEOREMA 6.57 *Toda serie de potencias $\sum a_n (x-a)^n$ converge absolutamente para cada $x \in I$, en donde I es, o bien $\mathbb{R}$, o bien un intervalo tal que $(a-$*

$R, a+R) \subset I \subset [a-R, a+R]$. En el segundo caso, el número R se denomina radio de convergencia *de la serie.*

El intervalo I se denomina *campo de convergencia* de la serie y es el dominio de la función determinada por la serie de potencias. Por las características de la expresión de una serie de potencias, bastará con aplicar el criterio del cociente o el de la raíz para hallar el radio de convergencia, sin embargo, necesitaremos trabajar algo más para estudiar la convergencia de la serie en los dos extremos del campo.

Ejemplo 6.3.1 Para hallar el campo de convergencia de $\sum \frac{(x-1)^n}{\log n}$, aplicamos el criterio del cociente a la sucesión de valores absolutos:

$$\text{lím} \frac{|x-1|^{n+1}}{\log(n+1)} \cdot \frac{\log n}{|x-1|^n} = |x-1| \,\text{lím} \frac{\log n}{\log(n+1)} = |x-1|$$

Por lo tanto, la serie converge si $|x-1|<1$. Por el teorema anterior, solo tenemos que analizar la convergencia de la serie para $x=0$ y $x=2$ para determinar completamente el campo de convergencia. Para $x=0$ la serie resultante es $\sum \frac{(-1)^n}{\log n}$ cuya convergencia podemos deducir con el criterio de Leibniz. Para $x=2$ la serie resultante es $\sum \frac{1}{\log n}$, cuya divergencia podemos deducir con el criterio de condensación. Por lo tanto, el campo de convergencia de la serie es $[0,2)$.

El siguiente resultado establece la continuidad y derivabilidad de las funciones definidas por series de potencias y extiende la propiedades algebraicas de la derivación e integración a series.

Teorema 6.58 *Para la serie de potencias $S(x) = \sum a_n(x-a)^n$ se verifica que:*

1. *(Teorema de Abel) la función S es continua en su campo de convergencias.*
2. *S es una función derivable en el interior del campo de convergencia y su derivada se obtiene "derivando término a término la serie":*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_n a_n(x-a)^n\right) = \sum_n n a_n (x-a)^{n-1}$$

Además, el radio de convergencia de la derivada coincide con el de S.

3. *Una primitiva de la función S es:*

$$\int \left(\sum_n a_n(x-a)^n\right) \mathrm{d}x = \sum_n \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

Además, el radio de convergencia de la primitiva coincide con el de S.

En los dos último puntos del teorema anterior se afirma la coincidencia de los "radios" de convergencia, pero no de los "campos" de convergencia, es decir, la convergencia en los extremos del campo puede variar al derivar o integrar.

Ejemplo 6.3.2 El campo de convergencia de la serie de potencias $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ es $[-1,1]$, sin embargo, la serie de las derivadas, $\sum \dfrac{x^{n-1}}{n}$, no converge en $x=1$ y por lo tanto su campo de convergencia es $[-1,1)$.

Las propiedades de derivación e integración de series de potencias constituyen una herramienta fundamental para sumar series, tal y como vemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6.3.3 En el tema anterior hemos probado que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{si } |x|<1.$$

Aplicando el operador primitiva obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \log|1-x| + C = \log(1-x) + C, \qquad \text{si } |x|<1.$$

Evaluando ambas expresiones en $x=0$, deducimos que $C=0$. Además, para $x=-1$, la serie converge (criterio de Leibniz) y por el apartado 2 del teorema de Abel, la igualdad también se verifica en ese punto. Por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \log(1-x), \qquad \text{si } -1 \le x < 1.$$

6.3.2. Series de Taylor

Las funciones expresadas mediante series de potencias se comportan esencialmente como polinomios, por esta razón, nos planteamos en esta sección expresar cualquier función como serie de potencias. Vamos a ver que, en particular, todas las funciones elementales pueden representarse de esta forma.

Aunque en muchos casos, el método seguido en el ejemplo 6.3.3, permitirá expresar una función como series de potencias, en la mayoría de los casos necesitaremos construirla a partir de su polinomio de Taylor, que definimos y estudiamos en el tema 1. Recordemos que el polinomio de Taylor de orden n

de una función f en el punto x_0 es un polinomio de grado menor o igual que n tal que su valor en x_0 y el valor de las n primeras derivadas coinciden con los de f. Su expresión análitica es:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

Aunque tiene sentido determinar el polinomio de Taylor en cualquier punto, en la práctica solo es interesante en aquellos puntos para los cuales es posible hallar el valor de sus derivadas sucesivas de manera exacta y poder obtener así polinomios cuyos coeficientes sean números racionales. En la sección 3 repasamos la familia de funciones conocidas como funciones elementales y determinamos sus polinomios de Taylor en el punto más adecuado.

También aprendimos en el primer tema que la siguiente caracterización es una herramienta fundamental para demostrar que un polinomio es polinomio de Taylor: el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0 es el único polinomio tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Este resultado establece que T_n es la «mejor aproximación», en un entorno de x_0, por polinomios de grado menor o igual que n. Otra aplicación de este resultado es método mostrado en el siguiente corolario para obtener nuevos pares de infinitésimos equivalentes.

Corolario 6.59 *Sea f una función $(n+1)$-veces derivable en un entorno abierto de x_0. Entonces, $f(x) - T_n(x)$ y $\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ son infinitésimos equivalentes en x_0.*

Ejemplo 6.3.4 Para la función exponencial y para $n = 0$, obtenemos la equivalencia $e^x - 1 \equiv x$, en $x = 0$, que aprendimos en el tema anterior. Para $n = 1$ obtenemos que

$$e^x - 1 - x \equiv \frac{x^2}{2}, \text{ en } x = 0.$$

Aunque podemos demostrar fácilmente esta equivalencia usando el Teorema de L'Hôpital, el polinomio de Taylor es la herramienta para construirlos.

Como ya observamos en el tema anterior, la posibilidad de aproximar el valor de una expresión matemática, solo es útil si podemos controlar el error que se comete. El teorema siguiente nos da un método para hacerlo cuando usamos polinomios de Taylor.

TEOREMA 6.60 (DE LAGRANGE) *Sea f una función definida en un entorno abierto de x_0 y supongamos que f es $(n+1)$-veces derivable en este entorno. Sea T_n el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0 y $E_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Entonces, para cada $x \neq x_0$ existe un número c (que depende de x y de n) comprendido estrictamente entre x y x_0 y tal que:*

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

La fórmula del resto dada en este teorema se conoce como *fórmula de Lagrange*. Aunque no es la única posible, sí es la más utilizada por su simplicidad. La expresión E_n puede ser negativa, sin embargo, al trabajar con errores, no distinguimos entre errores por exceso y por defecto, y por eso entendemos que el error es su valor absoluto: $\varepsilon = |E_n|$.

EJEMPLO 6.3.5 Para calcular el número 'e' con un tres decimales exactos, debemos de evaluar la función exponencial en el punto $x = 1$ con un error $\varepsilon < 10^{-4}$. Si utilizamos el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función exponencial que calculamos en el primer tema (ver sección 3), cometeremos el siguiente error:

$$\varepsilon = \left| \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}, \quad c \in (0,1)$$

Dado que no conocemos el valor de c (y no podemos, ni pretenderemos calcularlo), no podemos conocer el error exacto. Por esta razón, lo que hacemos es «estimar» dicho error en función de n, sustituyendo el valor de c, o las subexpresiones en dónde aparece, por valores mayores. En este caso, $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} < 3$ y por lo tanto:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Si queremos que el error sea menor que 10^{-4}, *basta* con encontrar el primer número natural n tal que $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$, es decir, tal que $(n+1)! > 30000$. Con $n = 7$ lo conseguimos y por lo tanto:

$$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{685}{252} = 2{,}71\overline{825396}$$

Solo podemos estar seguros de los tres primeros decimales, aunque podemos comprobar que los cuatro primeros decimales coinciden con los que nos da cualquier calculadora.

No es difícil observar que los polinomios de Taylor no son más que la sucesión de sumas parciales de la serie asociada a la sucesión $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$; la correspondiente serie se denomina *serie de Taylor* de la función f.

DEFINICIÓN 6.61 *Dada una función f infinitamente derivable en un intervalo abierto I, denominamos* serie de Taylor de f en $x_0 \in I$ *a la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad x \in I$$

Decimos que la serie representa a f en x *si converge a $f(x)$, es decir:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$$

Evidentemente la serie de Taylor para x_0 representa a f en x_0 pero puede no hacerlo en otros puntos. La representación de la serie en otros puntos está caracterizada por la convergencia a 0 de la expresión del resto.

TEOREMA 6.62 *La serie de Taylor de f en x_0 representa a f en x si y solo si:*

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

EJEMPLO 6.3.6 La serie de Taylor de la función exponencial la representa en todo su dominio, $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Para comprobar que este límite es 0, podemos trabajar más fácilmente con su valor absoluto. Si $x < 0$, entonces $\mathrm{e}^c < 1$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $x > 0$, $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^x$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1} < \mathrm{e}^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

En los dos límite calculados, hemos utilizado la relación que aprendimos en el tema anterior entre polinomios y función exponencial. Por otra parte, obsérvese la necesidad de «eliminar» el número c antes de calcular el límite, ya que este número depende tanto de x como de n y por lo tanto también está afectado por el operador límite.

6.3.3. Funciones elementales

Repasamos en esta sección la familia de funciones conocidas como funciones elementales y determinamos para cada una de ellas la correspondiente serie de Taylor.

En particular, en las figuras de las páginas siguientes, vemos la representación simultánea de las funciones exponencial, seno y arcotangente con algunos polinomios de Taylor.

Función Exponencial. Recordemos que el dominio de la función exponencial, $\mathrm{e}^x = \exp x$, es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \qquad\qquad \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

El desarrollo de Taylor es:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{e}^{c_n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (c_n \text{ entre } 0 \text{ y } x)$$

En el ejemplo **??**, hemos deducido que la serie de Taylor representa a la función exponencial en todo su dominio:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

Función Logaritmo Neperiano. El dominio de la función logaritmo neperiano, $\log x$, es el intervalo $(0, \infty)$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x} \qquad\qquad \int \log x \,\mathrm{d}x = x\log x - x$$

Hallamos es desarrollo de Taylor en $x_0 = 1$:

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \frac{(-1)^n}{c_n^{n+1}(n+1)}(x-1)^{n+1}$$

Estando c_n entre 1 y x. Para establecer la convergencia de la serie de Taylor no hace falta estudiar la convergencia del resto de Taylor. Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge si y solo si $|x| < 1$ y en tal caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Integrando la igualdad anterior y estudiando la convergencia en los extremos de la serie obtenida, llegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\log(1-x),\qquad x\in[-1,1)$$

(En 1 la serie diverge y en -1 la serie converge por el criterio de Leibniz). Por lo tanto,

$$\log x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(1-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n\qquad x\in(0,2]$$

Alternativamente, esta serie se puede escribir como:

$$\log(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\qquad x\in(-1,1]$$

Función Seno. El dominio es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen}x=\cos x\qquad\qquad \int\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x=-\cos x$$

El desarrollo de Taylor es

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}(\operatorname{sen}c)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. Además, es fácil comprobar que la serie de Taylor representa a la función seno en todo su dominio:

$$\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En la figura de la página 264, podemos ver las gráficas de la función seno y de algunos de sus polinomios de Taylor. Vemos que, igual que ocurre con la función exponencial, la convergencia de la serie es «muy rápida», es decir, con pocos sumando conseguimos unas aproximaciones muy buenas en entornos bastante amplios de 0.

Función Coseno. El dominio de la función coseno es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x=-\operatorname{sen}x\qquad\qquad \int\cos x\,\mathrm{d}x=\operatorname{sen}x$$

El desarrollo de Taylor es

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}(\operatorname{sen}c)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. Además, la serie de Taylor representa a la función coseno en todo su dominio:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

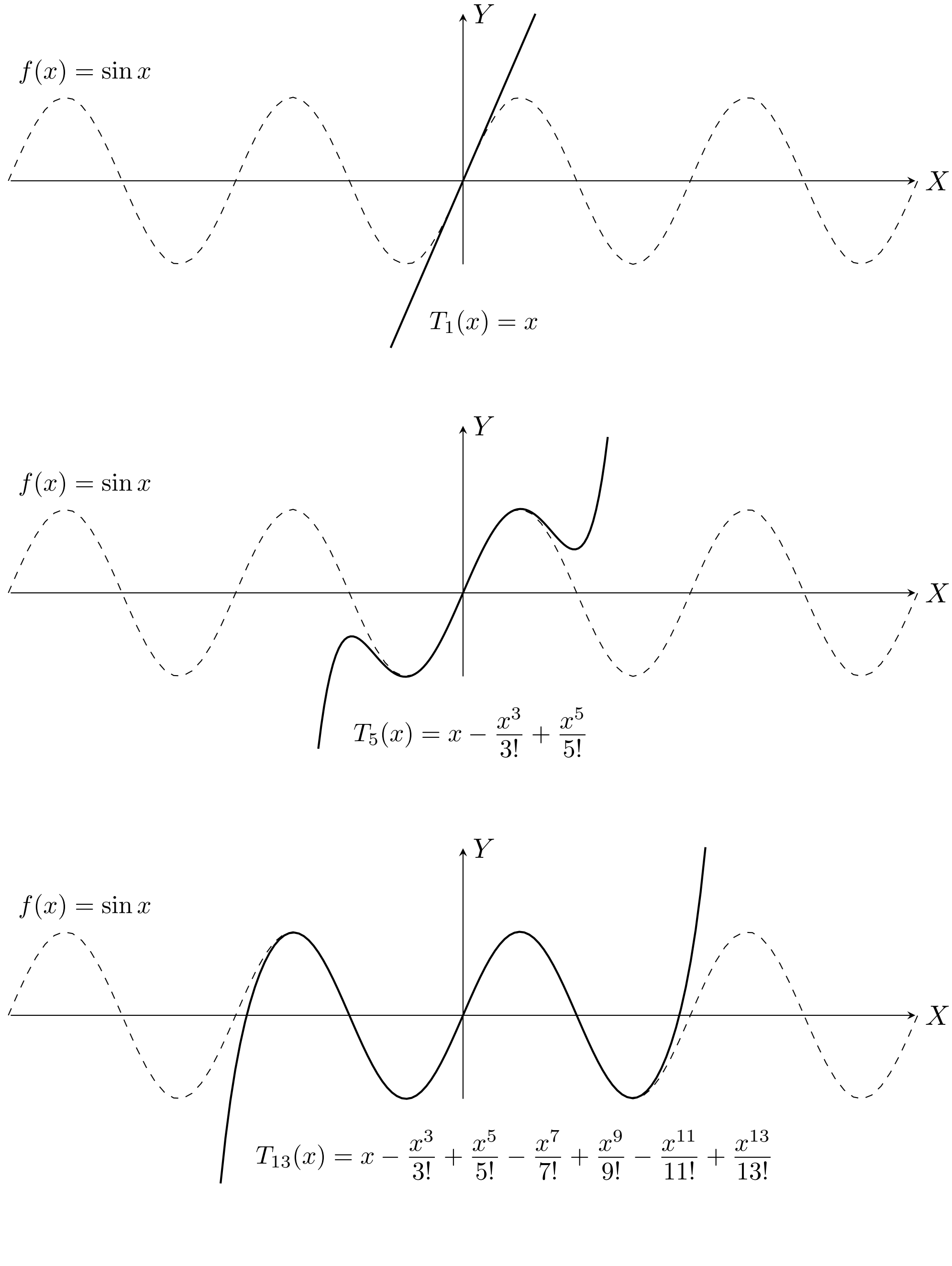

Figura 6.2: Función seno y algunos polinomios de Taylor.

Función Seno Hiperbólico. La función seno hiperbólico se define como $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, su dominio es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh} x = \cosh x \qquad\qquad \int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x$$

El desarrollo de Taylor es

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (\operatorname{senh} c)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. Además, la serie de Taylor representa a esta función en todo su dominio:

$$\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Función Coseno Hiperbólico. La función coseno hiperbólico se define como $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, su dominio es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \operatorname{senh} x \qquad\qquad \int \cosh(x) \, dx = \operatorname{senh} x$$

El desarrollo de Taylor es

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (\operatorname{senh} c)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. Además, la serie de Taylor representa a esta función en todo su dominio:

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Función Potencial. La función potencial se define como

$$p_\alpha(x) = (1+x)^\alpha \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{N}$$

El dominio de esta función depende de α: el intervalo $[-1, \infty)$ es el dominio para $\alpha > 0$ y su dominio es $(-1, \infty)$ si $\alpha < 0$. La función potencial es derivable en $(-1, \infty)$ y

$$\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

Si $\alpha > 1$, la función también es derivable en -1.

El desarrollo de Taylor es:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

Aunque no es tan simple como para el resto de las funciones elementales, podemos probar que el resto converge a 0 si $x \in (-1,1)$ y por lo tanto, para todo α:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad x \in (-1,1)$$

La convergencia en los extremos depende de α. No mostramos los detalles que nos llevan a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in [-1,1], \quad \alpha > 0\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1,1], \quad -1 < \alpha < 0\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1,1), \quad \alpha \le -1
\end{aligned}$$

Nos queda por repasar las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas. Las propiedades algebraicas de las series de potencias nos ayudarán a determinar los desarrollos de estas funciones, pero no podremos utilizar las expresiones del resto de Taylor.

Función Arco–Seno. El codominio de la función arco-seno es $[-\pi/2, \pi/2]$, es decir: $y = \operatorname{arc\,sen} x$ si y solo si $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ y $\operatorname{sen} y = x$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \operatorname{arc\,sen} x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}$$

Obtenemos la serie de Taylor a partir de la serie de Taylor de su derivada:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,sen} x = (1+(-x^2))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n}$$

para $|x| < 1$. Tras integrar y estudiar la convergencia en los extremos con el criterio de Raabe, obtenemos:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$$

para $|x| \le 1$.

Función Arco–Coseno. El codominio de la función arco-coseno es $[0, \pi]$, es decir: $y = \arccos x$ si y solo si $0 \le y \le \pi$ y $\cos y = x$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \arccos x \,\mathrm{d}x = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

El desarrollo de Taylor de la función arco-coseno se obtiene fácilmente a partir de su relación con la función arco-seno: $\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} x$. Obsérvese que, por lo tanto, para aproximar el arco-coseno de un número, tendremos que utilizar a su vez una aproximación adecuada de π.

Función Arco–tangente. El codominio de la función arco-tangente es el intervalo $[{}^{-\pi}\!/_2, {}^{\pi}\!/_2]$, es decir: $y = \operatorname{arc\,tg} x$ si y solo si ${}^{-\pi}\!/_2 \leq y \leq {}^{\pi}\!/_2$ y $\operatorname{tg} y = x$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arc\,tg} x - \log(1+x^2)$$

Nuevamente, obtenemos la serie de Taylor a partir de su derivada; por la suma de la serie geométrica sabemos que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1$$

Integrando y determinando la convergencia en los extremos con el criterio de Leibniz, obtenemos:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| \leq 1$$

Función Argumento del Seno Hiperbólico. La función inversa del seno hiperbólico se denomina *argumento del seno hiperbólico*, siendo $\mathbb{R}$ su dominio y codominio:

$$\operatorname{argsenh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{argsenh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\int \operatorname{argsenh} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{argsenh} x - \sqrt{1+x^2}$$

Obtenemos el desarrollo en serie de Taylor como sigue:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{argsenh} x = (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^{2n}$$

para $|x| < 1$. Integrando esta serie y deduciendo la convergencia en los extremos con el criterio de Raabe, obtenemos:

$$\operatorname{argsenh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$$

para $|x| \leq 1$.

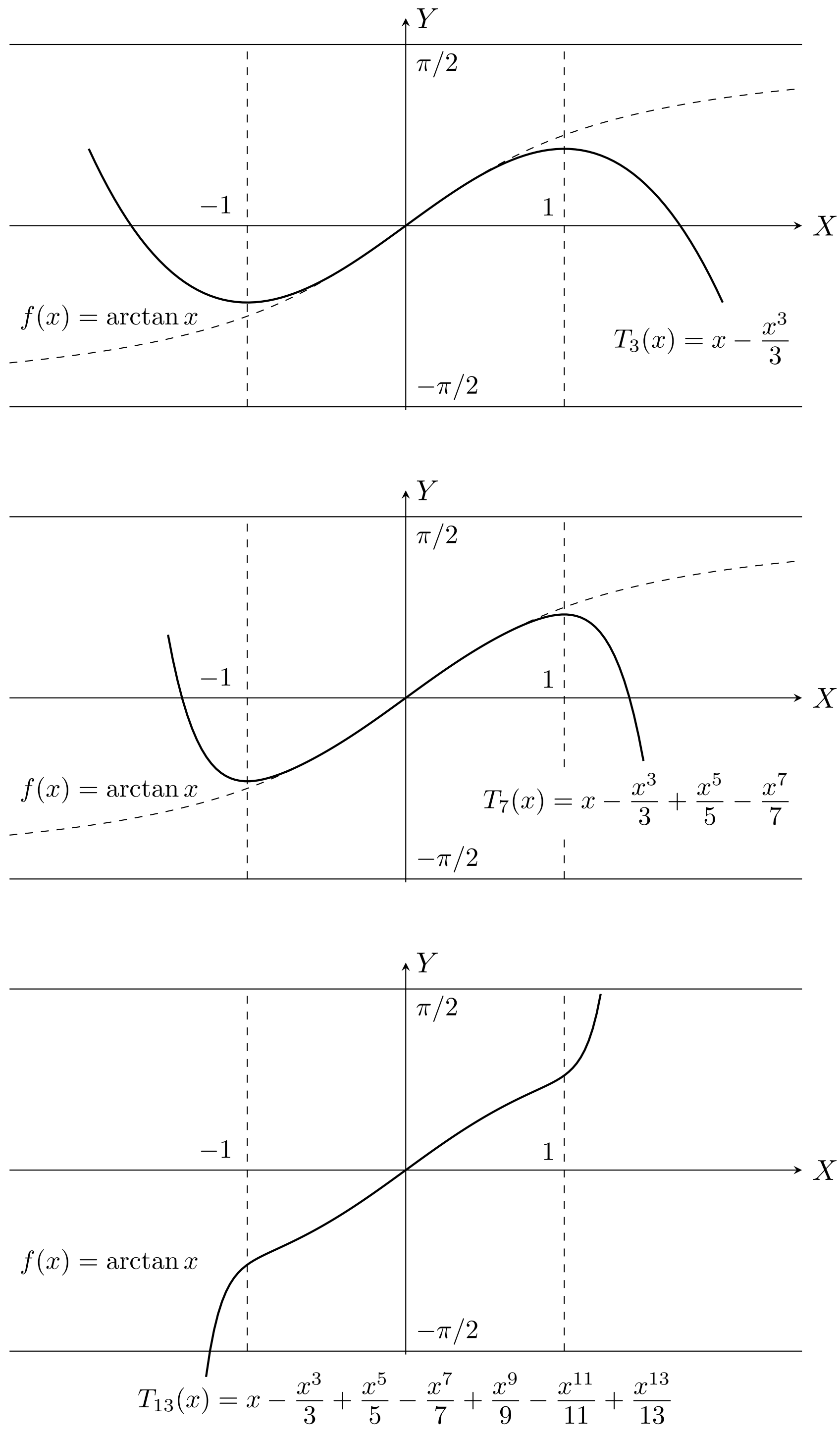

Figura 6.3: Función arcotangente y algunos polinomios de Taylor.

Función Argumento del Coseno Hiperbólico. La función inversa del coseno hiperbólico se denomina *argumento del coseno hiperbólico*, siendo $[1,\infty)$ su dominio y $[0,\infty)$ su codominio:

$$\operatorname{argcosh} x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{argcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\int \operatorname{argcosh} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{argsenh} x - \sqrt{x^2-1}$$

Función Argumento de la Tangente Hiperbólica. La función inversa de la tangente hiperbólica se denomina *argumento de la tangente hiperbólica*, siendo el intervalo $(-1,1)$ su dominio y $\mathbb{R}$ su codominio:

$$\operatorname{argtgh} x = \log\frac{1+y}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\int \operatorname{argtgh} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{argtgh} x + \log(1-x^2)$$

Por la suma de la serie geométrica sabemos que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

para $|x|<1$. Integrando esta serie obtenemos:

$$\operatorname{argtgh} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x|<1$$

La serie no converge en ninguno de los dos extremos.

Evaluación aproximada de Funciones

Como ya sabemos, la principal aplicación del desarrollo de Taylor es la evaluación aproximada de funciones mediante los desarrollos deducidos en la sección anterior. Debemos tener en cuenta que la evaluación aproximada no tiene ninguna utilidad si no se acompaña de una estimación del error cometido. Para esto, podemos utilizar el resto de Taylor o, cuando se posible, las fórmulas de estimación asociadas a los criterios de convergencia de Leibniz, raíz, cociente y Raabe; en estos casos, tras escribir el valor de la función en un punto como una serie numérica y aplicar el criterio adecuado.

Sabemos que algunos desarrollos de Taylor son válidos solamente en una parte del dominio, en estos casos, tendremos que utilizar algunas manipulaciones algebraicas para evaluar las funciones en el resto de los puntos:

- Función logaritmo. El desarrollo de Taylor de la función logaritmo permite evaluar $\log x$ para $x \in (0,2]$; para $a \in (2,\infty)$ podemos utilizar la siguiente igualdad:
$$\log a = -\log\frac{1}{a}$$
- Función potencial. Para evaluar una función potencial fuera del intervalo $(-1,1)$ podemos utilizar el método que se muestra en el siguiente ejemplo: si queremos aproximar $\sqrt[3]{10}$, multiplicamos y dividimos dentro de la raiz por 2^3:
$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10}{8}8} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{4}} = 2p_{1/3}(1/4)$$
- Función arcocoseno. No disponemos de serie de Taylor para la función arcocoseno, pero la igualdad:
$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} x$$
ayuda a evaluar de forma aproximada esta función utilizando la función arcoseno y una aproximación de π.
- Función arcotangente. Fuera del intervalo $[-1,1]$ podemos utilizar la siguiente igualdad para aproximar la función arcotangente:
$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$$

6.3.4. Suma de series numéricas

Las series de potencias, y las series trigonométricas que estudiamos en la sección siguientes, permiten sumar muchas series numéricas. En la siguiente tabla resumimos las series de Taylor que hemos deducido anteriormente para las funciones elementales:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x, \qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\log(1-x), \qquad x\in[-1,1)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} x, \qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\operatorname{senh} x, \qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cosh x, \qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^{\alpha}, \qquad x\in(-1,1)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}=0, \qquad \alpha>0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}=2^{\alpha}, \qquad \alpha>-1,\alpha\neq 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1}=\operatorname{arc\,sen} x, \qquad |x|\leq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}=\operatorname{arc\,sen} x, \qquad |x|\leq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arc\,tg} x, \qquad |x|\leq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1}=\operatorname{argsenh} x, \qquad |x|<1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}=\operatorname{argsenh} x, |x|<1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{argtgh} x, \qquad |x|<1$$

Series del tipo $P(n)/n!$

A partir de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$ podemos sumar todas las series del tipo $\displaystyle\sum\frac{P(n)}{(n+q)!}$, en donde P es un polinomio de grado p y $q\in\mathbb{Z}$. El criterio del cociente permite demostrar que todas ellas son convergentes y el método que presentamos a continuación permite calcular su suma. Partimos de la siguiente descomposición del polinomio P:

$$P(n)=a_p(n+q)(n+q-1)\cdots(n+q-p+1)+P_1(n)$$

donde P_1 es un polinomio de grado menor o igual que $p-1$ (y que puede ser descompuesto de la misma forma) y a_p es el coeficiente de n^p en P. Tal descomposición se obtiene fácilmente imponiendo la igualdad y *acumulando en P_1, los términos que no estén en el primer sumando*. A partir de esta descomposición se obtiene que:

$$\sum \frac{P(n)}{(n+q)!} = a_p \sum \frac{1}{(n+q-p)!} + \sum \frac{P_1(n)}{(n+q)!}$$

La primera serie se suma utilizando la serie de Taylor de la función exponencial, como veremos a continuación, y la segunda es una serie del mismo tipo inicial pero de tal forma que el polinomio del numerador tiene grado estrictamente menor. Si aplicamos la descomposición hasta conseguir que el polinomio del numerador se reduzca a una constante, habremos reducido el problema a sumar varias series del tipo $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!}$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} = \sum_{n=N+k}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{N+k-1} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - \sum_{n=0}^{N+k-1} \frac{1}{n!}$$

6.3.5. Series de Fourier

Si a_n y b_n son dos sucesiones numéricas, la siguiente serie funcional se denomina *serie trigonométrica*:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Es evidente que las funciones definidas por esta series son periódicas. Más complicado es determinar en qué condiciones estas funciones son continuas o derivables. Por ejemplo, sabemos que si las series asociadas a a_n y b_n son absolutamente convergentes, la serie trigonométrica determina una función continua y derivable.

Así como las series de Taylor permiten aproximar cualquier función mediante polinomios, queremos que las series trigonométricas nos ayuden a aproximar funciones periódicas mediante combinaciones lineales de funciones del tipo $\operatorname{sen} nx$ y $\cos nx$.

Supongamos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

y que las propiedades de f permiten permutar los operados de integración y de serie. En este caso, podríamos realizar el siguiente desarrollo:

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \operatorname{sen} nx \cos mx)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx \,\mathrm{d}x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x + \\ + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \,\mathrm{d}x\Big) = a_m \pi\end{aligned}$$

Repitiendo el mismo proceso multiplicando f por $\operatorname{sen} mx$, conseguimos expresar todos los coeficientes a_m en función de f:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx \,\mathrm{d}x$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} mx \,\mathrm{d}x$$

Debe quedar claro que la el paso en el que permutamos la integral con la serie no es en general válido. Como hemos visto anteriormente, sí lo podemos hacer en las series de potencias y lo podremos hacer en algunas series trigonométricas, pero no es válido para cualquier serie de función. El estudio de las condiciones que debe verificar una serie general para que tales transformaciones sean posibles, queda fuera de los objetivos de este curso.

En cualquier caso, el desarrollo anterior justifica la definición que vemos a continuación; si existiera una serie trigonométrica que represente una función f, sus coeficientes deberían de verificar las igualdades obtenidas arriba.

Definición 6.63 *Sea f una función periódica de periodo 2π e integrable y consideremos las sucesiones a_n y b_n definidas por*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx \,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1$$

Llamamos serie de Fourier asociada a f *a la serie trigonométrica*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

y escribimos $f(x) \sim S(x)$.

Ejemplo 6.3.7 Vamos a determinar la serie de Fourier asociada a la función periódica de periodo 2π tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, -\pi/2) \\ 1 & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \text{si } x \in [\pi/2, -\pi) \end{cases}$$

Hallamos los coeficientes como sigue:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{\pi}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n\pi}\cos nx\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0 \end{aligned}$$

Podemos simplificar los coeficientes a_n teniendo en cuenta que, si $n = 2k$, entonces $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = \operatorname{sen} k\pi = 0$ y si $n = 2k+1$, entonces $\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$. Por lo tanto, la serie de Fouries es:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2}{2k+1}\cos(2k+1)x$$

Notación compleja

Una representación alternativa para las series de Fourier, y en muchas ocasiones más sencilla de manejar, es la que se obtiene al utilizar la definición de las funciones trigonométricas utilizando la exponencial compleja:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}) - ib_n(\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx})) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((a_n - ib_n)\mathrm{e}^{inx} + (a_n + ib_n)\mathrm{e}^{-inx}) \\ &\left[\begin{array}{l} \text{Definimos:} \\ c_0 = \tfrac{1}{2}a_0, c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{array}\right. \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}) \end{aligned}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx})$$

$$\Big[\text{Extendiendo la notación } \sum\text{:}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$$

Los coeficientes c_n introducidos pueden describirse más facilmente como sigue:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\operatorname{sen} nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x \\
c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\operatorname{sen} nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{inx}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Es decir, la serie de Fourier de la función f es:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$$

en donde:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Simplificación del cálculo

Las posibles propiedades de simetría de la función f facilitan el cálculo de los coeficientes, como en los casos que recoge el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 6.64 *Sea f una función periódica de periodo 2π.*

1. *Si f es una función par, es decir, $f(-x) = f(x)$ para todo x, entonces*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

en donde: $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$

2. *Si f es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$ para todo x, entonces,*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

en donde: $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, \mathrm{d}x$

También será útil tener en cuenta que el intervalo de integración $[-\pi, \pi]$ utilizado en la definición de los coeficientes puede ser sustituido por cualquier otro de amplitud 2π, ya que si una función es periódica de periodo 2π, las integrales en cualquier intervalo de periodo 2π son iguales:

$$\int_a^{a+2\pi} H(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} H(x)\mathrm{d}x$$

En particular, es frecuente utilizar indistintamente los intervalos $[-\pi, \pi]$ y $[0, 2\pi]$.

Propiedades

Tal y como hemos advertido antes, la igualdad entre la función y su serie de Fourier no es válida en general, aunque sí se verifica en determinadas condiciones, según establece el teorema de Dirichlet que vemos a continuación. Antes de ver este resultado recordamos algunos conceptos y notaciones.

- $f(a^+)$ denota el límite por la derecha de f en a si este existe: $f(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
- $f(a^-)$ denota el límite por la izquierda de f en a si este existe: $f(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.
- $f'(a^+)$ denota la derivada por la derecha de f en a si esta existe: $f'(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x) - f(a^+)}{x - a}$.
- $f'(a^-)$ denota la derivada por la izquierda de f en a si esta existe $f'(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x) - f(a^-)}{x - a}$.
- Una función f definida en el intervalo $[a, b]$ se dice que es *derivable a trozos* si existe una partición $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ del intervalo, de tal forma que la función es derivable en cada subintervalo (x_i, x_{1+1}) y existen las derivadas laterales en cada x_i.

TEOREMA 6.65 (DE DIRICHLET) *Sea f una función periódica de periodo 2π y derivable a trozos en el intervalo $[-\pi,\pi)$; consideremos la serie de Fourier asociada a f, S. Entonces, se verifica que para cada $x \in \mathbb{R}$,*

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)];$$

en particular, si f es continua en x, $S(x) = f(x)$.

Es decir, en los intervalos de continuidad la serie coincide con la función y en los puntos de discontinuidad, la serie converge al punto intermedio entre los límites laterales. Para el ejemplo 6.3.7, lo vemos gráficamente en la figura 6.4

También hemos advertido varias veces que el operador serie no permuta, en general, con los de derivación e integración. Para las series trigonométricas, en determinadas condiciones sí podremos hacerlo.

TEOREMA 6.66 *Sea f una función periódica de periodo 2π, derivable en $[-\pi,\pi]$ y verificando:*

1. $f(-\pi^+) = f(\pi^-)$;
2. f' *es derivable a trozos en* $[-\pi,\pi]$;
3. $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$.

Entonces,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

Si una serie de Fourier tiene termino independiente, su integral, término a término no es una serie trigonométrica. Por lo tanto, no sería cierto afirmar que "la integral de la serie de Fourier es la serie de Fourier de la integral". Sin embargo, sí podremos realizar este operación para generar nuevas series de Fourier. Antes de ver el correspondiente resultado, vamos a observar que, aunque en general la primitiva

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

de una función periódica f, no tiene que ser periódica, la siguiente función sí lo es:

$$g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x$$

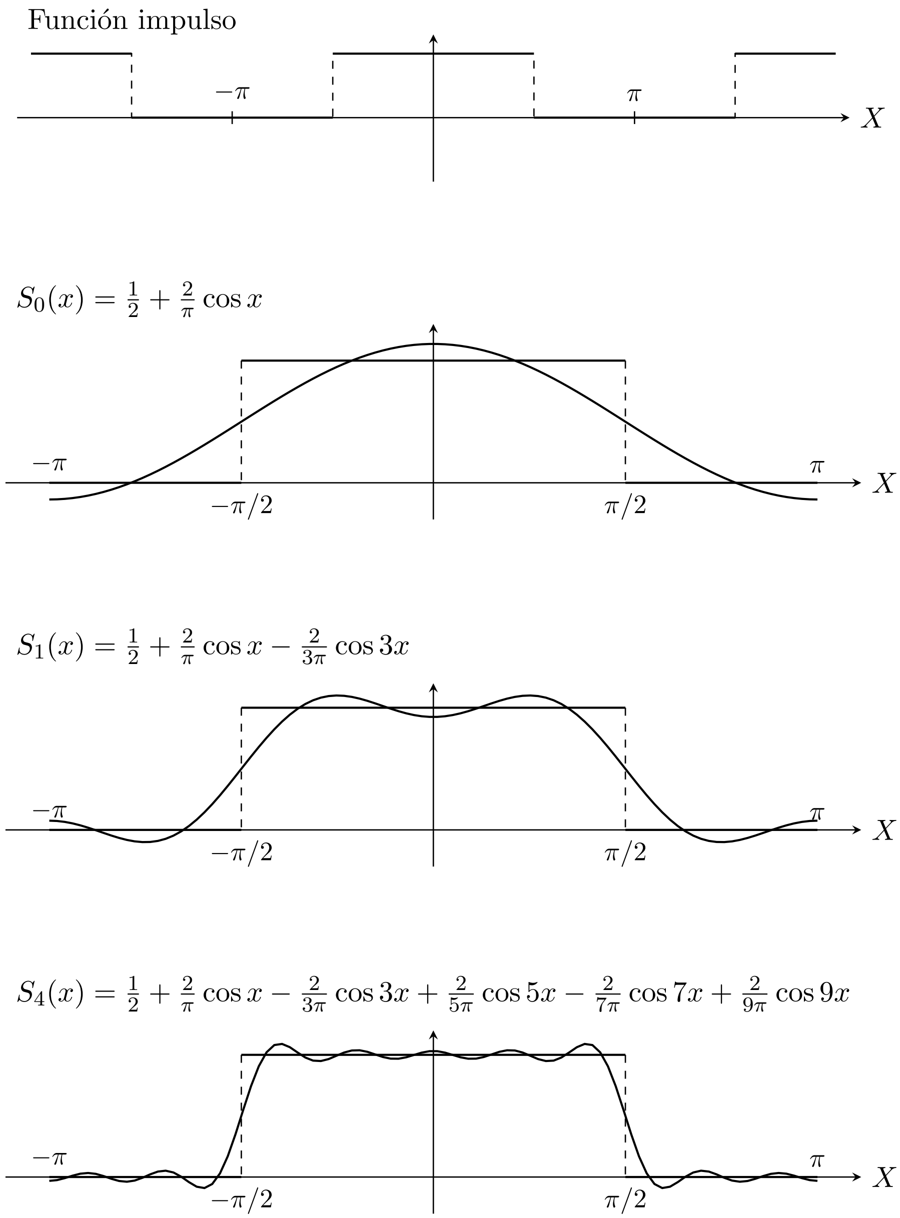

Figura 6.4: Función impulso, definida en el ejemplo 6.3.7, y varias sumas parciales de su serie de Fourier.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}(x+2\pi) \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x - a_0\pi \\
&\qquad = a_0\pi + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x - a_0\pi \\
&\qquad = \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x = \int_0^{x} f(t+2\pi)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x = \int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x
\end{aligned}$$

De hecho, el teorema de integración de series de Fourier que vemos a continuación nos dice si integramos término a término la serie de Fourier de f, obtenemos la serie de Fourier de g.

Teorema 6.67 *Sea f una función periódica de periodo 2π y derivable a trozos en $[-\pi,\pi]$ con el siguiente desarrollo en serie de Fourier:*

$$\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$$

Entonces, para cada x se verifica que

$$g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right),$$

en donde, $A_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x.$

Naturalmente, la función g puede expresarse con cualquier primitiva de f; el coeficiente A_0 dependerá de la primitiva elegida, pero en cualquier caso los resultados solo diferirán en una constante.

Ejemplo 6.3.8 Vamos a aplicar el resultado anterior a la serie del ejemplo 6.3.7. Dado que ya hemos demostrado que la función $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x$ es periódica de periodo 2π, solo necesitamos calcularla explícitamente en el intervalo $[-\pi,\pi]$:

- Si $x \in [-\pi, -\pi/2]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{-\pi}\mathrm{d}t = \Big[t\Big]_{-\pi/2}^{-\pi} = -\dfrac{\pi}{2}.$
- Si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = \Big[t\Big]_0^x = x.$
- Si $x \in [\pi/2, \pi]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}t = \Big[t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}.$

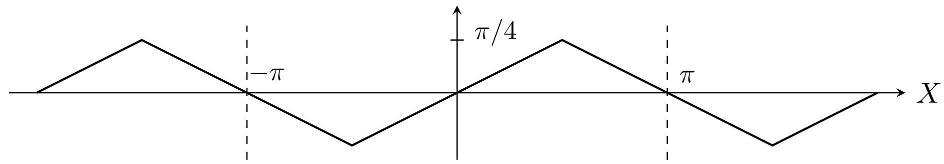

Figura 6.5: Función g del ejemplo 6.3.8.

Por lo tanto, la función $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{2}$ coincide con

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-\pi-x}{2} & \text{si } x \in [-\pi, -\pi/2) \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2) \\ \frac{\pi-x}{2} & \text{si } x \in [\pi/2, -\pi) \end{cases}$$

En la figura 6.5, podemos ver la gráfica de la función g, y tal y como establece el teorema anterior, observamos que es continua en $\mathbb{R}$. Su coeficiente A_0 lo tenemos que calcular explícitamente, sin embargo, por la simetría impar de g podemos afirmar que dicho coeficiente es nulo, sin necesidad de hacer el cálculo. Finalmente, integramos la serie de f para obtener la de g según establece el teorema:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}(2k+1)x$$

Ejemplo 6.3.9 Podemos utilizar las series de Fourier para sumar series numéricas. Vamos a obtener la suma de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ usando el desarrollo del ejemplo anterior. Si tomamos $x = \pi/2$, tenemos que

$$\frac{\pi}{4} = g(\pi/2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{(2k+1)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi(2k+1)}{2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{(2k+1)^2} (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{8}$.

Extensiones periódicas de funciones

En muchas ocasiones estaremos interesados en el desarrollo en serie trigonométrica de funciones definidas en un dominio restringido. La forma de hacerlo será extender el dominio de forma periódica y utilizar los métodos anteriores para encontrar el desarrollo buscado. Haremos este estudio para el dominio restringido $[-\pi, \pi]$, la extensión a un dominio más general es inmediata teniendo en cuenta la sección anterior.

Consideremos una función f arbitraria; se pueden presentar dos situaciones:

1. El dominio que nos interesa es $[-\pi, \pi]$ (o cualquier otro intervalo de amplitud 2π); en este caso, desarrollamos la función g definida como extensión periódica de f.

2. Solo nos interesa el dominio $[0, \pi]$. En este caso tenemos dos posibilidades, las dadas al considerar las funciones f_1 y f_2 definidas como extensión periódica de:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ f(-x) & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$
$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

que coinciden con f en $[0, \pi]$. La función f_1 es par y por tanto su serie de Fourier es una *serie de cosenos*; la función f_2 es impar y por lo tanto su serie de Fourier es una *serie de senos*. Considerando una u otra función como extensión de f tenemos las siguientes series de Fourier asociadas a f:

Serie de cosenos. Si f está definida en $[0, \pi]$, su serie de cosenos es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in [0, \pi]$$

en donde: $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x$

Serie de senos. Si f está definida en $[0, \pi]$, su serie de senos es

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad x \in [0, \pi].$$

en donde $b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, \mathrm{d}x.$

Funciones de periodo arbitrario

Es posible definir la serie de Fourier asociada a cualquier función periódica aunque el periodo sea distinto de 2π. Tal definición se hace a partir de la dada en la sección anterior y mediante una simple cambio de variable.

Si $f(x)$ es periódica de periodo $2T$, entonces $g(t) = f(\frac{T}{\pi}t)$ es periódica de periodo 2π; a esta función le podemos hallar su serie de Fourier, $g(t) \sim S(t)$; una vez hecho esto, y teniendo en cuenta que $f(x) = g(\frac{\pi}{T}x)$, obtenemos la serie de Fourier de f, $f(x) \sim S(\frac{\pi}{T}x)$. Los resultados obtenidos nos llevan a la serie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi}{T}x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{T}x),$$

en donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Utilizando la notación con la exponencial compleja, si f es una función de periodo $2T$, su serie de Fourier es:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{in\pi x/T}$$

en donde:

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\mathrm{e}^{-in\pi x/T}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

De la misma forma que para las funciones de periodo 2π, en las funciones de periodo $2T$ podemos utilizar cualquier intervalo con esta amplitud, en las integrales que definen los coeficientes de Fourier.

Ejercicios básicos

1. Hallar los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x-5)^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n!}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^2}(x-1)^n$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

2. Queremos aproximar el valor de $\sqrt{\mathrm{e}}$, ¿qué función considera más adecuada para este objetivo, la función exponencial o la función raíz cuadrada? Razone la respuesta y utilice la función elegida para aproximar dicho número con un error menor que 10^{-3} (dos decimales exactos).

3. Lea la parte de la sección dedicada a las funciones potenciales y posteriormente conteste los siguientes apartados

   a) Evalúe y simplifique el número combinatorio $\binom{1/2}{n}$ para $n = 0, \dots, 4$.

   b) Simplifique la expresión $\binom{1/2}{n}$

   c) Utilice la expresión obtenida en el apartado anterior para excribir el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.

   d) Siguiendo las indicaciones de la sección 6.3.3, construya una serie cuya suma sea $\sqrt{5}$ y elija el método más adecuado para aproximar su valor con un error menor que 10^{-3}.

4. Considere la función $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

   a) Utilice el polinomio de Taylor de la función exponencial, su expresión del resto de Lagrange y las propiedades algebraicas para obtener el polinomio de Taylor de f y una expresión de su resto.

   b) ¿El resto obtenido en el apartado anterior es el resto de Lagrange de la función f? En cualquier caso, utilícelo para hallar $f(1/4)$ con un error menor que 10^{-4}.

5. Utilice el resultado para determinar un infinitésimo equivalente $x^2 - \cos x^2 + 1$ en 0. Úselo para calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\cos x^2+1}{x^3\mathrm{e}^x}$$

6. Determine la serie de Taylor de la función $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ usando el siguiente proceso.

a) A partir de la serie de $\frac{1}{1-x}$, obtenga por derivación la de $\frac{1}{(1-x)^2}$.

b) Exprese la función g como suma de fracciones simples.

c) Utilice las propiedades algebraicas y los apartados anteriores para construir la serie de Taylor de f.

7. Obtenga la suma de la serie $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^{n+1}}$ usando el siguiente proceso:

   a) Sume la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ usando las propiedades de derivación y las propiedades algebraicas de las series de potencias que permitan reducirla a una serie más simple.

   b) Evalúe la serie del apartado anterior en un valor de x adecuado para poder sumar la serie propuesta.

8. Lea la sección 6.3.4 y utilícela para sumar la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2}{n!}$.

9. Halle la serie de Fourier de la función f, periódica de periodo 2π y tal que $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{en } (-\pi, 0] \\ x & \text{en } (0, \pi] \end{cases}$.

   Utilice esta serie para calcular la suma de la serie numérica $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

10. *a*) Justifique la igualdad: $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

    b) Deduzca que: $x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\operatorname{sen} nx, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

    c) Deduzca que: $x(x^2-\pi^2) = 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}, \quad x \in [-\pi, \pi]$

    d) Calcule las sumas de las series: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

11. Lea la sección 6.3.5 y aplique su contenido para desarrollar en serie de cosenos la función $\operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$.

12. Lea la sección 6.3.5 y aplique su contenido para obtener la serie de Fourier la función de periodo 3 definida en $[-1, 2)$ por $f(x) = E[x]$.

13. Exprese como suma de funciones racionales simples la sucesión racional $a_n = (-1)^n\frac{n}{(n+1)^2}$. Entre las series que ha aprendido a sumar en esta lección encontrará aquellas que le permiten evualuar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Relación de ejercicios (I)

1. Responder las siguientes preguntas razonando las respuestas con «precisión»:

   a) Dadas dos sucesiones a_n y b_n consideramos los conjuntos de sus elementos: $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$. Si $A = B$, ¿podemos afirmar que $\lim a_n = \lim b_n$?

   b) Es cierto que ¿toda sucesión acotada es convergente?

   c) ¿Es correcto escribir la igualdad simbólica $\frac{\infty}{0} = \infty$?

   d) Si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \operatorname{sen} n$, ¿podemos afirmar que el límite $\lim \sqrt[n]{a_n}$ no existe?

   e) Las sucesiones $a_n = \operatorname{sen} n$ y b_n ¿son infinitésimos equivalentes?

2. Determine el término general de la siguiente sucesión y calcule su límite

$$0, 0'9, 0'99, 0'999, 0'9999, \ldots$$

3. Consideremos las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{-3n+5}{n} \quad , \quad b_n = (-3)^n \quad , \quad c_n = \frac{n^2-3n}{n!} \quad , \quad \mathrm{d}_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

   Para cada una de ellas, calcule los primeros términos, analice intuitivamente sus propiedades (monotonía, acotación y convergencia) y finalmente estúdielas formalmente.

4. Calcule y exprese de la forma más simplificada posible los primeros términos de las siguientes sucesiones

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}, \qquad b_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdot(n+n}{2n(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+n)}$$

5. Consideramos la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} - 3 \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los diez primeros términos de la sucesión y analice intuitivamente sus características (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

   c) Deduzca el término general de la sucesión.

6. Consideramos la sucesión a_n definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n} \qquad \text{si} \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

   a) Utilice inducción para demostrar que la sucesión es decreciente.

   b) Del punto anterior se deduce que $a_n \leq 2$; utilice inducción para demostrar que además $a_n \geq 1$

   c) Podemos concluir entonces que a_n es convergente; demuestre que su límite ℓ verifica que $\ell^2 = 2$.

   Todo número real se puede construir como límite de una sucesión de números racionales. Con este ejercicio, hemos construido una sucesión cuyo límite es $\sqrt{2}$.

7. Demuestre que si kn^p es el término de grado mayor en el polinomio $P(n)$, entonces $a_n = P(n)$ y $b_n = kn^p$ son infinitos equivalentes.

8. Demuestre que $a_n = \log(n+k)$, $b_n = \log(kn)$ y $c_n = \log n$ son infinitos equivalentes y utilícelo para calcular el límite

$$\text{lím} \frac{3\log(n-7)}{2\log(5n)}$$

9. Demuestre que $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ y $b_n = \alpha n^{\alpha-1}$ son infinitos equivalentes.

10. Calcule el límite $\text{lím} \dfrac{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{\mathrm{e}}\dots\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}$

11. Escribiendo el cociente $\dfrac{1}{m(m+1)}$ como suma de fracciones simples, simplifique la expresión de la sucesión en siguiente límite para calcularlo:

$$\text{lím}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

12. Resuelva los siguientes límites:

   a) $\text{lím}\left(n - \sqrt{(n+a)(n+b)}\right)$ *b*) $\text{lím}\, n\,(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n-1]{a})$

13. Los siguientes límites se resuelven utilizando el criterio de Stöltz o el criterio del cociente:

   a) $\text{lím} \dfrac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, (p \in \mathbb{N})$

   b) $\text{lím} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$

14. Sea a_n una sucesión tal que $\lim a_n = a$; utilice el criterio de Stöltz para calcular

$$\lim \frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}}{\log n}$$

15. Utilice el teorema de compresión para calcular el límite de las sucesiones:

$$a)\ \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})} \qquad b)\ \frac{(-1)^n}{n}$$

16. Utilice la constante de Euler para calcular el siguiente límite

$$\lim \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

17. Utilice la caracterización secuencial y el teorema de L'Hôpital para calcular $\lim \dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^n}$.

18. Razonar con «exactitud» sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:
    - *a*) Si a una serie le quitamos un conjunto finito de términos, la suma de la serie no varía.
    - *b*) Si una serie es convergente, el límite de su término general es 0.
    - *c*) Si el límite de una sucesión es 0, la serie asociada es convergente.
    - *d*) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum a_n^2$ también es convergente.
    - *e*) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum \sqrt{a_n}$ también es convergente.
    - *f*) Consideremos la serie $\sum (-1)^n/n$; por el criterio de condensación, el carácter de esta serie coincide con el de la serie $\sum 2^k \dfrac{(-1)^{2^k}}{2^k} = \sum 1$ que es divergente. Por tanto, la serie $\sum (-1)^n/n$ es divergente.

19. Demuestre que la siguiente serie es *telescópica*, estudie su convergencia y súmela si es posible.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$$

20. Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)}$ y súmela aplicando el siguiente procedimiento:
    - *a*) Escriba el término general como suma de fracciones simples.

b) Simplifique la expresión de la sucesión de sumas parciales utilizando la constante de Euler.

c) Calcule el límite de la expresión de la sucesión de sumas parciales obtenida en el apartado anterior.

21. Estudie el carácter y sume si es posible las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{3^n} \qquad\qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$$

22. Sume la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2+4+8+\cdots+2^n}{3^n}$

23. Sume las siguientes series aritmético-geométricas:

$$c)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1-n}{5^n} \qquad\qquad d)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n-2}{2^n}$$

24. Teniendo en cuenta que es una serie hipergeométrica, sume la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

25. *Criterio del logaritmo. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si*

$$k = \lim \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n}$$

entonces se verifica que

- *Si $k < 1$ la serie diverge.*
- *Si $k > 1$ la serie converge.*

a) Estudie el criterio del logaritmo para estudiar la convergencia de series p-armónicas (corolario 6.40).

b) Si es posible, aplique el criterio del logaritmo para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n} \qquad c)\ \sum_{n=3}^{\infty}n \qquad d)\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n}$$

26. Aplique infinitos equivalentes para encontrar series p-armónicas con el mismo carácter que las siguientes y deduzca su carácter:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-5n+8}{n-2} \qquad\qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n^2+5n-3}{2-3n^5}$$

27. Repita el ejercicio anterior para una serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$, en donde P y Q son dos polinomios de grados p y q respectivamente para deducir que:

a) Si $q-p\le 1$ la serie diverge.

b) Si $q-p>1$ la serie converge

28. Sean f y g dos funciones crecientes y estrictamente positivas en su dominio, h una función decreciente, c_n una sucesión creciente y d_n una sucesión decreciente. Utilice las propiedades algebraicas de la relación de orden para demostrar que:

    a) $f+g$ es una función creciente.

    b) $f\cdot g$ es una función creciente.

    c) $1/f$ es una función decreciente.

    d) $-f$ es una función decreciente.

    e) $f\circ g$ es una función creciente y $f\circ h$ es una función decreciente.

    f) $f(c_n)$ es una sucesión creciente y $f(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión decreciente.

    g) $h(c_n)$ es una sucesión decreciente y $h(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión creciente.

29. Estudie el carácter de las siguientes series:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^r} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(3n+2)\cdot n^{4/3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)\cdots(a+n)}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\frac{2n}{n-1}\right]^{-n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos^2\frac{\pi n}{3}}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^1+\cdots+2^n}{4^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos^2 n}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2n+\cdots+n^2}{n^5} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n!}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ (a>0) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n^2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^c}{(3n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^a(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(an)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\ldots n}{n^n}$$

30. Halle los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ *d*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$ *f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{1+2n}} x^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ *h*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} (x+2)^n$ *j*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n} (x+3)^n$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (x+1)^n$ *l*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+n)} (x-1)^n$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n} (x-2)^n$ *n*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\log n) x^n$

ñ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n$ *o*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-\sqrt{n}}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \log\frac{2n+1}{n}$ *q*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} (x+1)^n$ *s*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$

t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n$ *u*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$

31. *a*) Calcule e con un error menor que 10^{-8}. ¿Cuántas cifras decimales de esta aproximación son exactas?

    b) Calcule $\operatorname{sen} 1$ con un error menor que 10^{-4}.

    c) Calcule $\log 1'5$ con un error menor que 10^{-4}.

32. Lea la sección 6.3.3 y utilícela para construir una serie cuya suma sea $\log 5$. Aproxime la suma de dicha serie, es decir, el valor de $\log 5$, con un error menor que 10^{-3}.

33. Para $n = 1$ y $n = 2$, exprese la función $\sqrt{1+x}$ como suma de su polinomio de Taylor de orden n más el correspondiente resto. Deduzca, para $x > 0$, las siguientes desigualdades:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

34. Para $x > 0$, pruebe que: $\displaystyle\left|(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9})\right| \leq \frac{5x^3}{81}$

35. Utilizando series de Taylor para determinar los infinitésimos adecuados para calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\log(1-x^2)}{2\cos x + \mathrm{e}^{x^2} - 3}$$

36. Represente mediante serie de potencias de x las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{senh} x$ *b*) $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$

37. Sume la siguiente serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=\infty}^{\infty} (n+1)x^n$

38. Sume las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$

39. Considere las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{en } (-\pi, 0] \\ 1 & \text{en } (0, \pi] \end{cases}; \qquad g(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

a) Use la definición para calcular la serie de Fourier de f y deducir a partir de ella la serie de Fourier de g.

b) Use la definición para calcular la serie de Fourier de g y deducir a partir de ella la serie de Fourier de f.

40. Desarrolle en serie de Fourier las funciones de periodo 2π:

a) $f(x) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } x \in (0, \pi] \\ -\pi/4 & \text{si } x \in (-\pi, 0] \end{cases}$;

b) $g(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in (0, \pi] \\ \pi + x & \text{si } x \in (-\pi, 0] \end{cases}$

Aplique dichos desarrollos para calcular las sumas de las siguientes series: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

41. Desarrolle en serie de Fourier la función de periodo 4 definida en $[-2, 2)$ por $f(x) = x$.

Relación de ejercicios (II)

1. Consideramos la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = b_{n-1} + n \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los diez primeros términos de la sucesión y analice intuitivamente sus características (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

   c) Deduzca el término general de la sucesión.

2. Justifique que las siguientes sucesiones son convergentes y calcule sus límites

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{2} \\ c_n = 2\sqrt{c_{n-1}} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \mathrm{d}_1 = a > 0 \\ \mathrm{d}_n = a + (\mathrm{d}_{n-1})^2 \end{cases}$$

3. Resolver los siguientes límites:

$$a)\ \lim \frac{\log n}{\log 5n} \qquad\qquad b)\ \lim \frac{\log(n+3)}{\log n}$$

4. Los siguientes límites se resuelven utilizando el criterio de Stöltz o el criterio del cociente:

$$a)\ \lim \sqrt[n]{n^2+n} \qquad b)\ \lim \frac{1}{n^2}\Big(2 + \frac{3^2}{2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\Big)$$

$$c)\ \lim \frac{(\log n)^2}{n} \qquad d)\ \lim \frac{2+4+\cdots+2^n}{3+9+\cdots+3^n}$$

5. Utilice el criterio de Stöltz y la equivalencia $(n+1)^\alpha - n^\alpha \equiv \alpha n^{\alpha-1}$ para calcular el límite $\lim a_n = \dfrac{n^{8/3}}{\mathrm{e}^n}$.
   Razone que, aplicando sucesivamente el criterio de Stöltz, se puede llegar a la misma conclusión para el límite $\lim a_n = \dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^n}$, para cada α

6. Calcule el límite $\lim \dfrac{n!}{n^n}$ utilizando el teorema de compresión.

7. Utilice el teorema de acotación para calcular los siguientes límites:

   a) $\lim \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}$

8. Calcule el siguiente límite

$$\lim \frac{\log(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})}{\log(\log n)}$$

9. Para la siguiente sucesión, determine el término general de la sucesión y calcule su límite.

$$0'3, 0'33, 0'333, 0'3333, \ldots$$

10. Para la siguiente sucesión, determine una forma recursiva de su término general y calcule su límite.

$$\sqrt[5]{4}, \sqrt[5]{4\sqrt[5]{4}}, \sqrt[5]{4\sqrt[5]{4\sqrt[5]{4}}}, \ldots$$

11. Supongamos que $\lim a_n = a$; halle los siguientes límites:

    a) $\lim \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}$

    b) $\lim \dfrac{e^{a_1} + e^{a_2/2} + \cdots + e^{a_n/n} - n}{\log(n+1)}$

12. Demuestre que las siguientes series son telescópicas, estudie su carácter y súmelas si es posible.

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n(n+1)}{2^{n+1}n(n+1)}$

13. Estudie el carácter y sume si es posible la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$.

14. Sume las siguientes series aritmético-geométricas:

    e) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} (n+3)\frac{(-1)^n}{2^n}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n}$

15. Deduzca la fórmula general de la suma de la serie aritmético geométrica:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (an+b)r^n \qquad \text{si} \quad |r| < 1$$

16. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, a^n}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}$ es hipergeométrica y súmela si es posible.

17. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}$ es hipergeométrica y súmela si es posible.

18. Deduzca una fórmula general para la suma de una serie hipergeométrica.

19. Deduzca el criterio de Pringsheim como corolario del criterio de comparación por paso al límite.
Criterio de Pringsheim. Sea a_n una sucesión de términos positivos y supongamos que $\lim n^c a_n \neq 0$. Probar que: (1) si $c > 1$ entonces, $\sum a_n$ converge; (2) si $c \leq 1$ entonces, $\sum a_n$ no converge.

20. *Series numéricas e integrales impropias: Si f es positiva, continua y decreciente en $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$, entonces*
$$\sum a_n \qquad y \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
tienen el mismo carácter.
Estudie el carácter de las siguientes series utilizando este resultado cuando sea posible.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1},\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2+1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{n^2}$$

21. Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}R(n)r^n$, en donde R es una función racional.
    a) Si $|r| \neq 1$, utilice el criterio del cociente para demostrar que la serie converge si y solo si $|r| < 1$.
    b) Si $r = 1$, en la relación anterior hemos analizado el carácter de la serie resultante. Para $r = -1$, demuestre que:
        1) Si $q - p > 1$ la serie converge absolutamente.
        2) Si $q - p = 1$ la serie converge condicionalmente.
        3) Si $q - p < 1$ la serie diverge.

    en donde p es el grado del polinomio del numerador y q es el grado del polinomio del denominador

22. *Progresiones aritméticas.* Son sucesiones en las que cada término se obtiene a partir del anterior sumándole una cantidad fija que llamamos *diferencia*. Una progresión aritmética queda determinada cuando conocemos uno de sus términos y la diferencia; en particular, si a_0 es el primer término y d es la diferencia, entonces el término general es
$$a_n = a_0 + n\mathrm{d} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

a) Si $a_1 = 0$ y d $= 3$ ¿cuánto vale a_{18}?

b) Si $a_{10} = 14$ y d $= -2$ ¿cuánto vale a_0?

c) Determine el término general de una progresión aritmética de la que conocemos su término k-ésimo (a_k) y la diferencia (d).

d) Si $2a-1$, $2a+1$ y $3a-2$ son términos consecutivos de una progresión aritmética, ¿cuánto vale a?, ¿cuál es el término general de la progresión?

e) Interpole cinco números en progresión aritmética entre los números 20 y 44.

f) Calcule la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética $a_n = 2n-1$.

g) Encuentre la suma de los 100 primeros números pares. ¿Y los 500 primeros?

h) Deduzca la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

i) Demuestre que la siguiente fórmula de la suma de los n primeros números naturales:

$$1+2+3+4+5+\cdot+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

23. *Progresiones geométricas.* Son sucesiones en las que cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por una cantidad fija que llamamos *razón.* Por lo tanto, una progresión geométrica queda determinada cuando conocemos uno de sus términos y la razón. En particular, si a_1 es el primer término y r es la razón, el término general es

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \text{para todo } n$$

a) Demuestre que el cociente entre dos términos consecutivos de una progresión geométrica es constante.

b) Deduzca las condiciones que debe cumplir la razón de una progresión geométrica creciente. ¿Y decreciente? ¿Y constante?

c) Encuentre la razón y el vigésimo término de las progresiones:

$$\begin{array}{ll} 2, 6, 18, 54, 162, ... & 5, -5, 5, -5, 5, -5, ... \\ 8, 4, 2, 1, ... & 1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots \end{array}$$

d) Calcule el valor de a para que los números representados por a, $a+2$, $a+8$ sean términos consecutivos de una progresión geométrica.

e) Interpole cuatro números en progresión geométrica entre los números $\frac{4}{5}$ y $\frac{243}{40}$.

f) Deduzca la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica y aplique la fórmula para demostrar que:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdot + \frac{|}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

g) Si $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots\ldots + 2^n = 4095$, ¿cuánto vale n?

h) Una persona comunica un secreto a otras tres. Diez minutos después cada una de ellas lo ha comunicado a otras tres, y cada una de estas a otras tres nuevas en los diez minutos siguientes, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas conocen el secreto después de dos horas?

i) Según una leyenda india, el inventor del ajedrez solicitó como recompensa que se pusiera 1 grano de trigo en la primera casilla del tablero, 2 en la segunda, 4 en la tercera, y así sucesivamente; en cada una el doble que en la anterior. El rey aceptó, pero su sorpresa fue grande cuando vio no sólo que no cabían los granos en las casillas, sino que no había suficiente trigo en todo el reino para cumplir el compromiso. Suponiendo que 10 granos de trigo pesan aproximadamente 1 gr. ¿podrías averiguar cuántos Kg. de trigo solicitó el inventor?

24. *a*) Calcule $\sqrt{\mathrm{e}}$ con error menor que 10^{-5}.

    b) Calcule e^2 con error menor que 10^{-5}.

    c) Calcule $\operatorname{sen} 2$ con un error menor que 10^{-4}.

25. Para $f(x) = x^2 \cos x$, hallar $f(7\pi/8)$ con un error menor que 10^{-4}.

26. Para $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$, pruebe que:

$$\left| \log(1 + x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

27. Utilizando series de Taylor para determinar los infinitésimos adecuados para calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1 - \cos x)\operatorname{sen} x - x^3\sqrt[4]{1 - x^2}}{x^5 - \operatorname{sen}^5 x} \quad (= \frac{57}{400})$$

28. Sume la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{n!}$

29. Desarrolle en serie de Fourier la función de periodo 2π dada por $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$. Deducir de dicho desarrollo la función suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

30. *a)* Si f es una función de periodo 2π y continua, entonces se verifica la *identidad de Parseval*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right],$$

en donde a_n y b_n son los coeficientes de la serie de Fourier de f.

b) Aplique la identidad de Parseval a la función de periodo 2π dada por $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

c) Desarrolle en serie de cosenos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$; a la serie resultante aplíquele la identidad de Parseval para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 (2n+3)^2}$.

31. Para cada una de las siguientes funciones dé su representación gráfica y su desarrollo en serie de Fourier como funciones periódicas definidas a partir del intervalo indicado por periodicidad:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ x - 6 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{si } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

c) $f(x) = x$, $x \in [-2, 2)$ *d)* $f(x) = 1 - x$, $x \in [0, 2\pi)$

32. Desarrolle en serie de Fourier $y = \cosh \alpha x$, $x \in [0, \pi]$ y deducir de dicho desarrollo la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$