

PROCESOS NO ESTACIONARIOS: TEST DE RAICES UNITARIAS Y COINTEGRACION

I INTRODUCCION

Una serie temporal que presenta una tendencia **determinística** puede ser aproximada por un proceso del tipo:

$$Y_t = \alpha + \beta t + u_t \quad t=1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

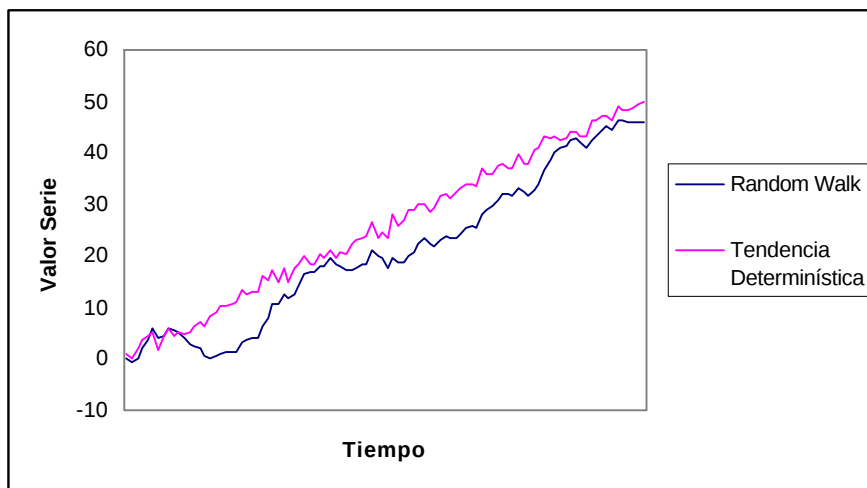
donde 't' captura la tendencia de la serie y u_t es ruido blanco.

En la práctica, sin embargo, muchas veces las series económicas no caen dentro de la categoría anterior. Un ejemplo claro es un camino aleatorio o *random walk* (por ejemplo, el precio de un *commodity* o de una acción):

$$Y_t = \alpha + Y_{t-1} + u_t \quad (2)$$

En este último caso, Y_t presenta una tendencia **estocástica**. Desafortunadamente, a simple vista no es fácil distinguir entre procesos del tipo (1) y (2). Ello es evidente del Gráfico 1.

Gráfico 1 Tendencia Determinística versus Estocástica



En estos apuntes nos abocaremos a estudiar la detección de tendencias estocásticas. Asimismo, analizaremos cómo detectar relaciones estacionarias o

de largo plazo entre series con tendencias estocásticas: las llamadas relaciones de **cointegración**.

II RAICES UNITARIAS

2.1 Conceptos Preliminares

Consideremos el *random walk* con tendencia de la ecuación (2). Este se puede re-escribir como:

$$(1-L) Y_t = \alpha + u_t \quad (3)$$

En este caso se dice que Y_t presenta una raíz unitaria o es integrada de orden 1, $I(1)$. Ello se debe a que la ecuación característica $C(z)=1-z=0$ presenta una sola raíz igual a 1.

Si una variable es $I(1)$, entonces cualquier *shock* (innovación) sobre ella tendrá un efecto permanente. En verdad, si $Y_t = \alpha + Y_{t-1} + u_t$, entonces:

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha + u_{t-i}) \quad (4)$$

Claramente, el efecto de las innovaciones pasadas (u 's) no se desvanecen en el tiempo, aún cuando ellas hayan tenido lugar en un pasado muy distante. Contrastemos esto con un proceso $AR(1)$:

$$Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + u_t \quad |\gamma| < 1$$

Sabemos que Y_t se puede representar como un proceso $MA(\infty)$:

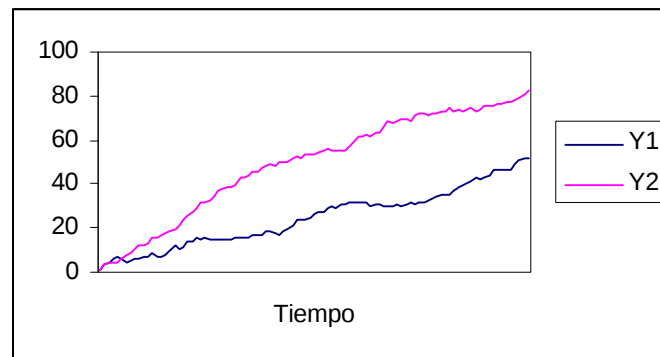
$$Y_t = \frac{\alpha}{1-\gamma} + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i u_{t-i} \quad (5)$$

Para un i suficientemente grande, el efecto de u_{t-i} sobre Y_t es despreciable.

Como señalamos, la mayoría de las series temporales presentan fuertes tendencias. Si corremos una regresión entre dos o más variables $I(1)$, podemos concluir que existe una fuerte relación estadística entre ellas, aún cuando en verdad éste no sea el caso. Tal fenómeno se denomina **regresión espuria**. Para ilustrar este punto, supongamos el siguiente caso:

$$Y_{1t} = 0.5 + Y_{1t-1} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = 0.7 + Y_{2t-1} + u_{2t}$$



Al correr una regresión de Y_2 en una constante e Y_1 obtenemos lo siguiente:

Regresor	Coefficiente	Estadístico t	Probabilidad
Intercepto	7.939	4.883	4.057 E-06
Y_1	1.683	28.709	1.669 E-49

$$R^2=0.95$$

Aun cuando NO existe una relación entre ambas series, la pendiente estimada (=1.68) tiene un valor p aproximadamente igual a cero. Asimismo, el R^2 de la regresión es muy alto, 0.95. Las tendencias crecientes de ambas variables parecen indicar una fuerte relación estadística entre ambas series, pero tal correlación es **espuria**.

Formalmente, consideremos un vector $\mathbf{y}_t$ ($n \times 1$) de variables $I(1)$. Sea $g=n-1$. Entonces $\mathbf{y}_t$ puede ser particionado como $\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ \mathbf{y}_{2t} \end{pmatrix}$, donde y_{1t} es 1×1 y $\mathbf{y}_{2t}$ es $g \times 1$.

Si corremos una regresión de y_{1t} en una constante y el vector $\mathbf{y}_{2t}$:

$$y_{1t} = \alpha + \gamma y_{2t} + u_t \quad (6)$$

para una muestra de tamaño T, los estimadores MICO estarán dados por:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^T y_{2t}' \\ \sum_{t=1}^T y_{2t} & \sum_{t=1}^T y_{2t} y_{2t}' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T y_{1t} \\ \sum_{t=1}^T y_{2t} y_{1t} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Aun cuando y_{1t} esté completamente no relacionada con y_{2t} , $\hat{\gamma}$ aparecerá como estadísticamente significativo. En efecto, para un T grande, el test F para contrastar la hipótesis de que $\gamma=0$ siempre superará el valor crítico, favoreciendo entonces la hipótesis alternativa de que $\gamma \neq 0$. Ello, aun cuando $\hat{\gamma}$ **no** proporcione ningún estimador consistente de algún vector de parámetros poblacionales.

2.2 Test de Raíces Unitarias

Consideremos el siguiente proceso AR(1) con esperanza cero e innovaciones que son ruido blanco:

$$Y_t = \gamma Y_{t-1} + u_t$$

El estimador de mínimos cuadrados ordinarios de γ está dado por:

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{t=2}^T Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^T Y_{t-1}^2}$$

Cuando $|\gamma| < 1$,

$$\boxed{\sqrt{T}(\hat{\gamma} - \gamma) \xrightarrow{d} N(0, 1 - \gamma^2)} \quad (8)$$

Para $\gamma=1$, Dickey y Fuller demostraron que:

$$\boxed{T(\hat{\gamma} - \gamma) \xrightarrow{d} v} \quad (9)$$

donde v es una variable aleatoria (no normal) con varianza finita. En muestras pequeñas, $\hat{\gamma}$ estará sesgado a la baja. Notemos que en este caso $\hat{\gamma}$ converge a su probabilidad límite más rápido que los estimadores comunes. En verdad, su varianza se va a cero a la razón $1/T^2$.

Dado que $\hat{\gamma}$ está sesgado a la baja y su varianza se va a cero a la razón $1/T^2$, el test t convencional va a tender a rechazar $H_0: \gamma=1$. Debido a ello, Dickey y Fuller construyeron valores críticos apropiados mediante simulaciones de Monte Carlo.

Los tests de raíces unitarias diseñados por Dickey-Fuller son los siguientes:

1) Si u_t es **ruido blanco** el test toma la forma:

$$\Delta Y_t = \mu + \gamma^* Y_{t-1} + u_t \quad (10)$$

donde $H_0: \gamma^*=0$ (raíz unitaria) $H_1: \gamma^*<0$

El test t estándar $\frac{\hat{\gamma}^*}{\hat{ee}(\hat{\gamma}^*)}$ se compara con las tablas de Dickey-Fuller.

2) Si se sospecha de la presencia de correlación serial en los errores, se lleva a cabo un **test de Dickey-Fuller aumentado**¹:

$$\Delta Y_t = \mu + \gamma^* Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \phi_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (11)$$

donde $H_0: \gamma^*=0$ $H_1: \gamma^*<0$.

Si no rechazamos H_0 , tenemos un proceso $AR(p-1)$ en la primera diferencia de Y_t (variable estacionaria).

¹ A fin de corregir la correlación serial, se asume que Y_t sigue un proceso $AR(p)$ en vez de un $AR(1)$.

- 3) Si la variable Y_t presenta también una **tendencia determinística**, entonces el test de Dickey-Fuller toma la forma:

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \gamma^* Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \phi_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (12)$$

Bajo H_0 : $\beta = \gamma^* = 0$

La hipótesis conjunta se lleva a cabo con un test F. Los valores críticos son aquellos proporcionados por Dickey-Fuller.

III COINTEGRACION

3.1 Definición

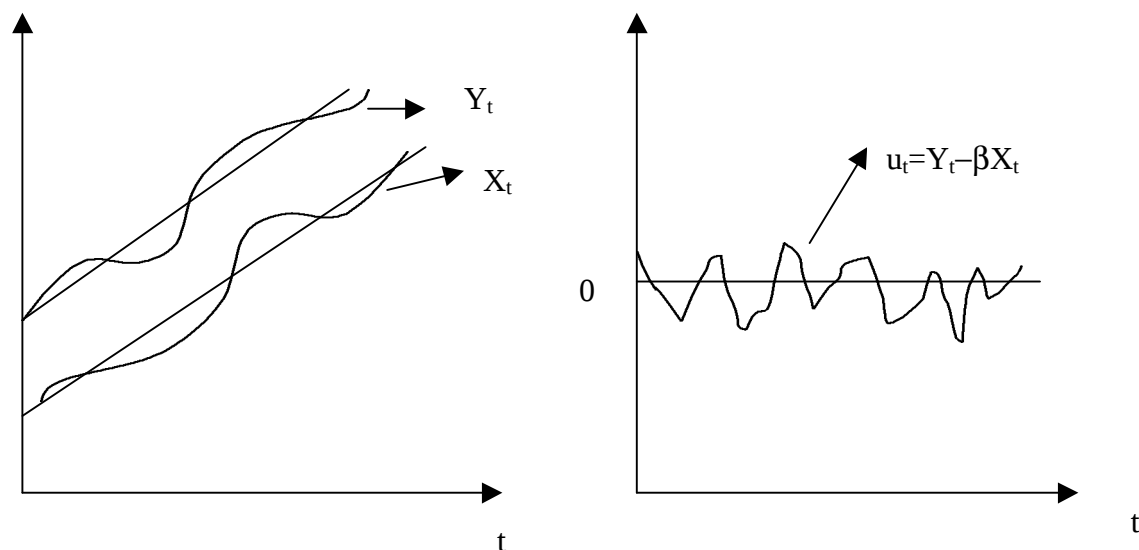
Consideremos el modelo:

$$Y_t = \beta X_t + u_t$$

Si dos series son integradas de distintos órdenes, entonces combinaciones lineales de ellas serán integradas al orden mayor de las dos. Por ejemplo, si Y_t es $I(2)$ y X_t es $I(1)$, entonces $u_t = Y_t - \beta X_t$ es $I(2)$.

Supongamos que Y_t y X_t son $I(1)$. Entonces, esperaríamos que u_t también fuera $I(1)$. Esto es, si Y_t y X_t están creciendo (disminuyendo) en el tiempo con sus propias tendencias, la diferencia entre ellas dos también debe estar creciendo con su propia tendencia.

Sin embargo, es posible que exista algún β para el cual $u_t = Y_t - \beta X_t$ sea $I(0)$. Esto quiere decir que la diferencia entre las dos series puede ser estable alrededor de una media fija. Esto es, Y_t e X_t están aumentando (disminuyendo) a una tasa aproximadamente igual. Si ello se cumple, se dice que Y_t y X_t están **cointegradas**. El vector $(1, -\beta)$ se denomina **vector de cointegración**. Gráficamente, ello se puede visualizar como sigue:



En general, supongamos un modelo con M variables $y_t = [Y_{1t}, \dots, Y_{Mt}]$, las cuales individualmente pueden ser $I(0)$ o $I(1)$. Además, supongamos que tenemos una relación de equilibrio de largo plazo:

$$y_t' \gamma - x_t' \beta = 0$$

El vector de regresores x_t puede incluir una constante, variables exógenas $I(0)$ y/o una tendencia. El vector γ es el vector de cointegración.

En la senda hacia el largo plazo, el sistema puede desviarse de su equilibrio. Por lo tanto, la relación puede ser reescrita como:

$$y_t' \gamma - x_t' \beta = u_t \quad (13)$$

donde u_t es el **error de equilibrio**, el cual es estacionario.

Si hay M variables en el sistema, puede haber a lo más $M-1$ vectores de cointegración **linealmente independientes**².

3.2 Corto Plazo: Modelo de Corrección de Errores

Supongamos que tenemos dos variables Y_t y Z_t $I(1)$ cuyo vector de cointegración es $(1, -\theta)$. Esto implica que ΔY_t , ΔZ_t e $Y_t - \theta Z_t$ son todas $I(0)$. El modelo de corrección de errores describe la variación de Y_t alrededor de su

² Si existiesen M relaciones de cointegración, entonces las M variables serían $I(0)$.

tendencia de largo plazo, en términos de un conjunto de variables $I(0)$ exógenas $\mathbf{x}_t$, la variación de Z_t alrededor de su tendencia de largo plazo, y del error de equilibrio, rezagado un período, $Y_{t-1} - \theta Z_{t-1}$:

$$\Delta Y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \gamma \Delta Z_t + \lambda (Y_{t-1} - \theta Z_{t-1}) + \omega_t \quad (14)$$

3.3 Test de Cointegración

3.3.1 Engle y Granger

Sea $\mathbf{y}_t$ un vector que reúne M variables. Supongamos que existen r vectores de cointegración linealmente independientes, con $\boldsymbol{\gamma}_i = (1, -\boldsymbol{\theta}_i)$, $i=1, \dots, r$, donde cada vector se distingue por estar normalizado en una variable distinta. Si suponemos que tenemos un conjunto de variables exógenas $I(0)$, incluyendo una constante, cada vector de cointegración produce una relación de equilibrio:

$$\mathbf{y}_t' \boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t$$

esto es,

$$Y_{it} = \mathbf{y}_{it}' \boldsymbol{\theta}_i + \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_{it} \quad i=1, 2, \dots, r \quad (15)$$

donde el vector $\mathbf{y}_{it}$ reúne a todas las variables restantes en la i -ava relación de cointegración.

Podemos obtener un estimador del vector $\boldsymbol{\theta}_i$ por mínimos cuadrados ordinarios (MICO). A fin de contrastar que u_t es $I(0)$, aplicamos un test del tipo Dickey-Fuller (aumentado) sobre el vector de residuos de MICO, $\hat{\mathbf{u}}_i$:

$$\Delta \hat{u}_{it} = \delta \hat{u}_{it-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \phi_j \Delta \hat{u}_{i,t-j} + \varpi_{it} \quad i=1, 2, \dots, r \quad (16)$$

donde $H_0: \delta=0$, $H_1: \delta<0$.

Si no rechazamos H_0 , entonces concluimos que las variables NO están cointegradas (esto es, u_{it} es $I(1)$). Los valores críticos no son aquellos de Dickey-Fuller porque $\hat{\mathbf{u}}_i$ es un vector de variables estimado en un paso

anterior. Valores críticos apropiados han sido tabulados por Engle-Yoo, MacKinnon y otros.

3.3.2 Test de Durbin y Watson de Cointegración

Bajo este test, se compara el estadígrafo de Durbin-Watson con los valores críticos tabulados por Sargan y Bhargava. La hipótesis nula es:

$$H_0: d=0$$

¿Por qué? Si $d \approx 0$, entonces $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_{t-1} \hat{u}_t}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \approx 1$. Esto implica que el error, u_t , es

aproximadamente un camino aleatorio. Por lo tanto, bajo H_0 u_t es $I(1)$ y, en consecuencia, NO existe una relación de cointegración.

Para una muestra de 100 observaciones, Sargan y Bhargava determinaron que los valores críticos al 1%, 5% y 10% son, respectivamente, 0.511, 0.386 y 0.322. La regla de decisión es: si d calculado es menor que el valor crítico, NO rechace H_0 .

3.3.3 Johansen

Consideremos un modelo de vectores autorregresivos (VAR), donde el vector $\mathbf{y}_t$, $n \times 1$, sigue un proceso autorregresivo de orden p , no estacionario:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t \quad (17)$$

$$\text{o} \quad \boldsymbol{\Phi}(L)\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{u}_t$$

donde $\boldsymbol{\Phi}(L) = \mathbf{I}_n - \boldsymbol{\Phi}_1 L - \boldsymbol{\Phi}_2 L^2 - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p L^p$.

El VAR anterior se puede reescribir como³:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \rho \mathbf{y}_{t-1} + \xi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \xi_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{u}_t$$

³ Véase J. Hamilton, *Time Series Analysis*, para una demostración.

donde $\rho = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_p$, $\xi_s = -(\Phi_{s+1} + \Phi_{s+2} + \dots + \Phi_p)$ $s=1, 2, \dots, p-1$.

Al substraer $\mathbf{y}_{t-1}$ de ambos lados, obtenemos:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + (\rho - \mathbf{I})\mathbf{y}_{t-1} + \xi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \xi_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{u}_t$$

donde $\rho - \mathbf{I} = -\Phi(1)$.

Si existen h vectores de cointegración linealmente independientes, la matriz $\Phi(1)$, $n \times n$, tiene rango h . Entonces, ésta se puede escribir como:

$$\Phi(1) = \mathbf{B}\mathbf{A}'$$

con $\mathbf{B}_{n \times h}$ y $\mathbf{A}'_{h \times n}$.

Con lo cual

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{B}\mathbf{z}_{t-1} + \xi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \xi_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{u}_t$$

donde $\mathbf{z}_{t-1} = \mathbf{A}'\mathbf{y}_{t-1}$, vector $h \times 1$ de variables $I(0)$.

El test de Johansen corresponde a un test de multiplicador de Lagrange basado en el rango de la matriz $\Pi = -\Phi(1)$ en el VAR:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \Pi \mathbf{y}_{t-1} + \xi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \xi_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{u}_t \quad (18)$$

La hipótesis nula es que el rango de Π es h , esto es:

$$H_0: \text{rango}(\Pi) = h \quad H_1: \text{rango}(\Pi) = n$$

donde h representa el número de vectores de cointegración. Bajo la hipótesis alternativa, el rango de Π es n . Ello sólo puede ocurrir si las n variables contenidas en el vector $\mathbf{y}_t$ son $I(0)$.

El test de Johansen sigue el siguiente algoritmo, el cual permite estimar los valores propios de la matriz Π :

- (1) Estime un VAR de orden $(p-1)$ para $\Delta \mathbf{y}_t$. Esto es, corra una regresión de $\Delta \mathbf{y}_{it}$ en una constante y todos los elementos de los vectores $\Delta \mathbf{y}_{t-1}$, $\Delta \mathbf{y}_{t-2}$, ..., $\Delta \mathbf{y}_{t-p+1}$ por MICO, para $i=1, 2, \dots, n$.

Reúna estas n regresiones MICO en forma vectorial:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \hat{\Gamma}_0 + \hat{\Gamma}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \hat{\Gamma}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \hat{\Gamma}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \hat{\mathbf{u}}_t$$

donde $\hat{\Gamma}_i$ es una matriz $n \times n$.

- (2) Estime una segunda batería de regresiones, corriendo una regresión de $y_{i,t-1}$ en una constante, y todos los elementos de los vectores $\Delta \mathbf{y}_{t-1}$, $\Delta \mathbf{y}_{t-2}$, ..., $\Delta \mathbf{y}_{t-p+1}$ por MICO, para $i=1, 2, \dots, n$. Escriba este segundo conjunto de regresiones como:

$$\mathbf{y}_{t-1} = \hat{\eta}_0 + \hat{\eta}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \hat{\eta}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \hat{\eta}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \hat{\mathbf{v}}_t$$

donde $\hat{\eta}_i$ es una matriz $n \times n$.

$$(3) \text{ Sea } \hat{\Sigma}_{vv} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\mathbf{v}}_t \hat{\mathbf{v}}_t', \hat{\Sigma}_{uu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\mathbf{u}}_t \hat{\mathbf{u}}_t', \hat{\Sigma}_{uv} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\mathbf{u}}_t \hat{\mathbf{v}}_t', \hat{\Sigma}_{uv} = \hat{\Sigma}_{vu}'.$$

Encuentre los valores propios de la matriz:

$$\hat{\Sigma}_{vv}^{-1} \hat{\Sigma}_{vu} \hat{\Sigma}_{uu}^{-1} \hat{\Sigma}_{uv}$$

y ordénelos de manera **descendente**:

$$\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_n.$$

El test de multiplicador de Lagrange —también conocido como **test de la traza**—toma la forma:

$$\boxed{-T \sum_{i=h+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i)} \quad (19)$$

Uno rechaza H_0 en favor de H_1 si el estadígrafo en (19) supera al valor crítico tabulado por Johansen.

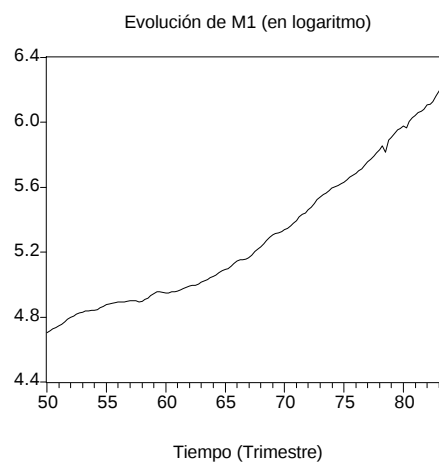
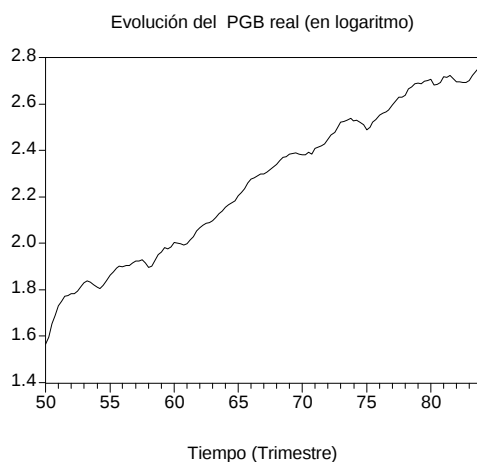
Intuitivamente, si no hay ninguna relación de cointegración, todos los valores propios de la matriz Π son iguales a cero. Si existe sólo una relación de cointegración, $0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. En el caso general en que hay h relaciones de cointegración, habrá h valores propios $\in (0,1)$ y los $n-h$ vectores restantes serán iguales a cero:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_h \quad 0 < \lambda_i < 1 \quad i=1, 2, \dots, h$$

$$\lambda_{h+1} = \lambda_{h+2} = \dots = \lambda_n = 0$$

3.3 Una Aplicación: Cantidad de Dinero y Producto Real

Se cuenta con información trimestral del PGB real y de M1 para Estados Unidos para el período 1950:1-1984:4. La evolución de las series se describe gráficamente a continuación:



Claramente, ambas series presentan tendencias que sugieren la ausencia de estacionariedad. Debemos, sin embargo, averiguar si se trata de tendencias estocásticas o simplemente determinísticas. Antes de realizar los test de raíz de unitaria, es conveniente inspeccionar los correlogramas de las series. Los siguientes cuadros presentan las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial para $\ln(\text{PGB})$ y $\ln(\text{M1})$. Como se aprecia, en ambos casos, las autocorrelaciones caen muy lentamente en el tiempo (el estadígrafo de Ljung-Box es siempre altamente significativo). Por otra parte, para ambas

series, el primer coeficiente de autocorrelación parcial es cercano a 1, siendo los coeficientes restantes cercanos a cero. Ello es indicativo de la potencial presencia de una raíz unitaria.

Correlograma de ln (PGB real)

Rezago (Trimestre)	Autocorrelación	Autocorrelación Parcial	Q-Stat (Ljung-Box)	Prob
1	0.975	0.975	132.04	0.000
2	0.950	0.000	258.38	0.000
3	0.927	0.032	379.69	0.000
4	0.906	0.022	496.47	0.000
5	0.887	0.027	609.22	0.000
6	0.869	0.005	718.12	0.000
7	0.850	0.002	823.32	0.000
8	0.832	-0.018	924.70	0.000
9	0.812	-0.019	1022.2	0.000
10	0.792	-0.031	1115.5	0.000
11	0.771	-0.011	1204.9	0.000
12	0.752	-0.004	1290.4	0.000
13	0.733	0.009	1372.4	0.000
14	0.715	-0.004	1451.0	0.000
15	0.696	-0.022	1526.1	0.000

Correlograma de ln(M1)

Rezago (Trimestre)	Autocorrelación	Autocorrelación Parcial	Q-Stat (Ljung-Box)	Prob
1	0.975	0.975	132.26	0.000
2	0.951	-0.012	258.87	0.000
3	0.926	-0.007	379.99	0.000
4	0.903	-0.003	495.82	0.000
5	0.879	0.001	606.62	0.000
6	0.857	0.005	712.66	0.000
7	0.835	-0.008	814.06	0.000
8	0.812	-0.015	910.85	0.000
9	0.791	-0.001	1003.2	0.000
10	0.769	-0.013	1091.2	0.000
11	0.747	-0.016	1174.9	0.000
12	0.725	-0.008	1254.4	0.000
13	0.703	-0.016	1329.7	0.000
14	0.681	-0.005	1401.0	0.000
15	0.660	0.003	1468.6	0.000

El próximo paso consiste en llevar a cabo test de raíces unitarias para cada serie, a fin de verificar rigurosamente nuestras conjeturas anteriores. De acuerdo a tests de Dickey-Fuller aumentados (ADF), en ambos casos NO rechazamos H_0 (presencia de una raíz unitaria) al 99 por ciento de confianza:

Test de Raíz Unitaria para ln (PGB real)

Test ADF	-1.971	1% Valor crítico*	-4.030
		5% Valor crítico	-3.445
		10% Valor crítico	-3.147

*Valores críticos de MacKinnon para el rechazo de la hipótesis de raíz unitaria

Variable Dependiente: $\Delta(\text{LOG_PGBREAL})$

Variable	Coficiente	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOG_PGBREAL(-1)	-0.051	0.026	-1.971	0.051
$\Delta(\text{LOG_PGBREAL}(-1))$	0.396	0.0867	4.568	0.000
$\Delta(\text{LOG_PGBREAL}(-2))$	0.120	0.093	1.299	0.196
$\Delta(\text{LOG_PGBREAL}(-3))$	-0.083	0.089	-0.926	0.356
$\Delta(\text{LOG_PGBREAL}(-4))$	-0.042	0.0842	-0.494	0.621
Constante	0.093	0.0438	2.121	0.036
Tendencia(1950:1)	0.0004	0.0002	1.886	0.061

Test de Raíz Unitaria para ln(M1)

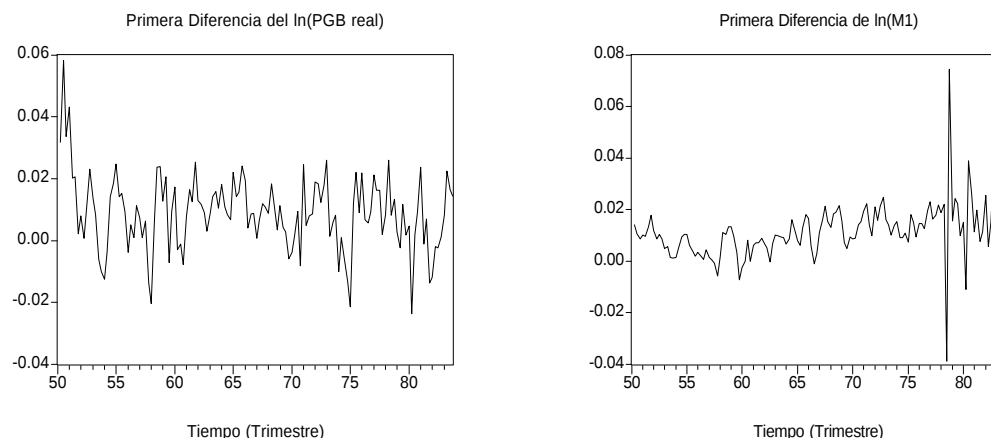
Test ADF	0.559	1% Valor crítico *	-4.030
		5% Valor crítico	-3.445
		10% Valor crítico	-3.147

* Valores críticos de MacKinnon para el rechazo de la hipótesis de raíz unitaria

Variable Dependiente: $\Delta(\text{LOG_M1})$

Variable	Coficiente	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOG_M1(-1)	0.0051	0.009	0.559	0.577
$\Delta(\text{LOG_M1}(-1))$	-0.133	0.090	-1.474	0.143
$\Delta(\text{LOG_M1}(-2))$	0.090	0.091	0.991	0.323
$\Delta(\text{LOG_M1}(-3))$	0.005	0.091	0.053	0.956
$\Delta(\text{LOG_M1}(-4))$	-0.116	0.090	-1.281	0.202
Constante	-0.019	0.041	-0.484	0.629
Tendencia (1950:1)	8.89E-05	9.92E-05	0.896	0.372

A fin de verificar que las series en **primeras diferencias** no presentan raíces unitarias, llevamos a cabo nuevamente el test de Dickey-Fuller aumentado. Para el caso de la primera diferencia de $\ln(\text{PGB})$, rechazamos H_0 al 99% de confianza (el test ADF es igual a -5.92), mientras que para la primera diferencia de $\ln(\text{M1})$ rechazamos H_0 al 90% de confianza (test ADF es igual a -2.84). Cabe señalar que el test de Dickey-Fuller aumentado es sensible a quiebres estructurales en las series. Específicamente, en tales casos el test ADF está sesgado en favor de la hipótesis nula. Si miramos la primera diferencia de $\ln(\text{M1})$, vemos que un cambio brusco tuvo lugar a finales de los 1970's. Ello podría sesgar el test ADF a favor de una raíz unitaria. Por ello, somos más 'tolerantes' y utilizamos un nivel de significancia del 10 por ciento.



De nuestro análisis concluimos que ambas series son $I(1)$. La pregunta que cabe hacerse ahora es si ambas series están o no cointegradas. Esto es, si existe o no una combinación lineal de ambas variables que sea $I(0)$. Para contrastar esta hipótesis, seguimos dos procedimientos: Engle-Granger, Durbin-Watson y Johansen.

El test de Engle-Granger exige que escojamos una variable 'dependiente' en la relación de cointegración. Los resultados del test no son inmunes a tal elección. Sin embargo, fundamentos teóricos pueden avalar la elección de una determinada relación de causalidad. En este caso, podríamos desear contrastar si efectivamente el nivel de producto real es neutral a aumentos en la cantidad de dinero (M1) en el largo plazo.

Por lo anterior, para estimar la (posible) relación de cointegración simplemente corremos una regresión de $\ln(\text{PGB})$ en una constante y $\ln(\text{M1})$:

Variable Dependiente: Ln (PGB REAL)

Muestra: 1950:1 1983:4

Variable	Coefficiente	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Constante	-1.548	0.099	-15.594	0.000
Ln(M1)	0.717	0.019	38.419	0.000
R^2	0.916	Media variable dep.		2.253
R^2 ajustado	0.916	S.D. variable dep		0.332
S.E. regresión	0.096	Criterio info Akaike		-1.830
Suma cuadrados resid	1.239	Criterio info Schwarz		-1.788
Log likelihood	126.476	F-statistic		1476.067
Durbin-Watson stat	0.0182	Prob(F-statistic)		0.000

Si miramos el estadígrafo de Durbin-Watson de la regresión anterior, vemos que éste es cercano a cero ($d=0.018$). Ello, como vimos, es indicativo

de que no existe cointegración. Para contar con mayor evidencia, realizamos un test de Dickey-Fuller para los residuos de la regresión anterior:

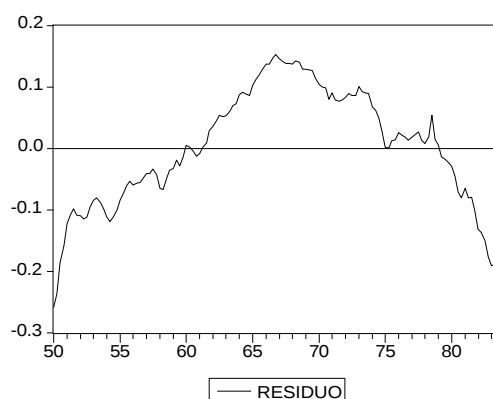
Test ADF	-0.441	1% Valor crítico	-3.73
		5% Valor crítico	-3.17
		10% Valor crítico	-2.91

Valores Críticos de Engle-Yoo (K=2, N=100)

Variable dependiente: Δ (RESIDUO)

Variable	Coefficiente	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RESIDUO(-1)	-0.0049	0.011	-0.441	0.659
Δ (RESIDUO(-1))	0.277	0.087	3.159	0.002
Δ (RESIDUO(-2))	0.072	0.091	0.791	0.430
Δ (RESIDUO(-3))	-0.0134	0.087	-0.153	0.879
Δ (RESIDUO(-4))	0.038	0.083	0.457	0.648

Claramente, no rechazamos H_0 . Esto es, que el error es $I(1)$. Tal como muestra el gráfico de más abajo, el residuo muestra una dinámica no estacionaria. Por lo tanto, concluimos, en base a los tests anteriores, que $\ln(\text{PGB})$ y $\ln(\text{M1})$ NO están cointegradas.



Para complementar la evidencia anterior, llevamos a cabo el test de la traza de Johansen⁴:

⁴ Este se encuentra implementado en *E-Views*

Valor propio	Test Razón de Verosimilitud (Traza)	Valor crítico al 5%	Valor crítico al 1%	Número de relaciones de cointegración bajo H_0
0.236902	36.052	15.41	20.04	Ninguna **
0.000698	0.092	3.76	6.65	A lo más 1
Coeficiente de Cointegración No Normalizados				
Ln(PGB REAL)	Ln(M1)			
0.183	0.149			
-0.946	0.723			
Coeficientes Normalizados. Una relación de cointegración				
Ln(PGB REAL)	Ln (M1)	Constante		
1.000	0.816 (1.269)	-6.591		
Log likelihood	871.662			

Notas: (1) El test asume la presencia de tendencias determinísticas en las series Ln(PGB REAL), Ln(M1), (2) Se utilizaron dos rezagos en el VAR. (3) *(**) indica rechazo de H_0 al 5%(1%) de significancia. El test indica 1 relación de cointegración al 5% de significancia

De acuerdo del test de Johansen, existiría una relación de cointegración: no rechazamos H_0 : a lo más existe una relación de cointegración versus la alternativa H_1 : existen dos relaciones de cointegración (esto es, ln(PGB) y ln(M1) son ambas $I(0)$). Esta estaría dada por:

$$\ln(\text{PGB}) = -6.591 + 0.816 \ln(\text{M1}) + u_t$$

Por lo tanto, el modelo de corrección de errores vendría dado por⁵:

⁵ Este también está implementado en *E-Views*. Incluimos un número mayor de rezagos en el VAR, pero no resultaron estadísticamente significativos.

MODELO DE CORRECCION DE ERRORES		
Relación de cointegración:		
LOG_PGBREAL(-1)	1.000	
LOG_M1(-1)	0.816	
	(1.269)	
Constante	-6.591	
Modelo de Corrección Errores:	$\Delta (\text{Ln_PGBREAL})$	$\Delta (\text{Ln_M1})$
$\hat{u}_{t-1}$	-0.004	0.008
	(-2.223)	(4.696)
$\Delta(\text{Ln_PGBREAL}(-1))$	0.315	0.0006
	(3.559)	(0.0070)
$\Delta(\text{Ln_PGBREAL}(-2))$	0.063	0.104
	(0.758)	(1.257)
$\Delta(\text{Ln_M1}(-1))$	0.197	-0.145
	(2.039)	(-1.517)
$\Delta(\text{Ln_M1}(-2))$	0.174	0.037
	(1.80640)	(0.384)
Constante	0.0007	0.012
	(0.418)	(6.697)
R^2	0.271	0.229
Adj. R^2	0.242	0.199
Suma cuadrados residuales	0.011	0.011
S.E. ecuación	0.009	0.009
Estadígrafo F	9.463	7.552

Nótese que el modelo de corrección de errores describe la dinámica de corto plazo de cada variable del sistema: $\ln(\text{PGB})$ y $\ln(\text{M1})$. El coeficiente asociado a $\hat{u}_{t-1}$ en la ecuación del $\ln(\text{PGB})$ indica que alrededor de 0.004 de la discrepancia entre el logaritmo del producto presente y de largo plazo (equilibrio) se elimina cada trimestre. En el caso del dinero, la discrepancia entre el logaritmo del producto presente y de largo plazo conduciría a un aumento en la cantidad de dinero presente. En tanto, incrementos en la cantidad de dinero tienen un impacto positivo sobre el producto y viceversa.

Los resultados de los test de Engle-Granger, Durbin Watson y Johansen son contradictorios. ¿Qué concluimos entonces? Si existe en verdad una relación de cointegración, el error de equilibrio debiera ser estacionario. Entonces el próximo paso consiste en examinar el residuo proveniente de la relación de cointegración obtenida con el test de Johansen. De nuestros cálculos, el test ADF aplicado al residuo de dicha relación de cointegración es

0.853. De ello, concluimos que no existe cointegración entre el dinero y el producto real.

4 TEST DE CAUSALIDAD A LA GRANGER

4.1 Caso Bivariado

Supongamos que tenemos dos variables estacionarias, X e Y . La pregunta que intentamos responder es si la información contenida en los valores pasados de la variable X ayuda a predecir el valor contemporáneo de Y , y viceversa. Es importante señalar que la afirmación “ X causa a Y a la Granger” no implica que Y sea el efecto o resultado de X . La causalidad a la Granger, en verdad, mide **precedencia y contenido informativo**, pero no tiene la implicancia que generalmente se le da al término causalidad.

Asumamos un proceso autorregresivo de orden p para Y y estimemos el siguiente modelo por MICO:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_p X_{t-p} + u_t \quad (20)$$

Para contrastar la hipótesis nula, H_0 : X NO causa a Y a la Granger, llevamos a cabo un test F para la hipótesis conjunta:

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

Esto es, calculamos la suma de cuadrados residuales (SCR) del modelo no restringido (20), $SCR_{nr} = \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2$, y la comparamos con la SCR del modelo restringido, $SCR_r = \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$:

$$Y_t = \delta_0 + \delta_1 Y_{t-1} + \dots + \delta_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Entonces, si se satisfacen los supuestos del modelo lineal clásico,

$$\frac{(SCR_r - SCR_{nr})/p}{SCR_{nr}/(T-2p-1)} \sim F(p, T-2p-1) \quad (21)$$

Si el estadígrafo (21) supera el valor crítico de la tabla $F(p, T-2p-1)$, para un nivel de significancia dado, rechazamos H_0 . Un procedimiento análogo se puede seguir para contrastar la hipótesis de que Y NO causa a X a la Granger.

El siguiente ejemplo ilustra el uso del test de causalidad a la Granger para variaciones porcentuales en el Índice de Actividad Económica Mensual del Banco Central de Chile (IMACEC) y los *spread* de tasas de depósitos bancarios y de documentos del Banco Central de Chile:

Test de Causalidad a la Granger para Variaciones Porcentuales Mensuales en el IMACEC y el *Spread* de Tasas en Unidad de Fomento (U. F).

Hipótesis Nula	Probabilidad (3 rezagos)	Probabilidad (6 rezagos)
SPREADB no causa a VIMAC a la Granger	0.063	0.397
VIMAC no causa a SPREADB a la Granger	0.609	0.872
SPREADBC no causa a VIMAC a la Granger	0.057	0.062
VIMAC no causa a SPREADBC a la Granger	0.783	0.731

Notas: VIMAC es la variación porcentual mensual en el IMACEC (desestacionalizado); SPREADB es el *spread* de tasas pagadas por los bancos sobre las operaciones reajustables de 1-3 años y 90-365 días, en promedios mensuales (base anual), y SPREADBC es la diferencia entre las tasas de los Pagarés Reajustables del Banco Central de Chile a 8 años y 90 días, en promedios mensuales (base anual).

4.2 Caso Multivariado

Supongamos el siguiente VAR:

$$\mathbf{y}_{1t} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{A}_1' \mathbf{x}_{1t} + \mathbf{A}_2' \mathbf{x}_{2t} + \varepsilon_{1t} \quad (22)$$

$$\mathbf{y}_{2t} = \mathbf{c}_2 + \mathbf{B}_1' \mathbf{x}_{1t} + \mathbf{B}_2' \mathbf{x}_{2t} + \varepsilon_{2t}$$

donde $\mathbf{y}_{1t}$ e $\mathbf{y}_{2t}$ son vectores $n_1 \times 1$ y $n_2 \times 1$, respectivamente, $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ con vectores $n_1 \times 1$ y $n_2 \times 1$, respectivamente, que reúnen las constantes del VAR, $\mathbf{x}_{1t}$ es un vector $n_1 p \times 1$ que contiene p rezagos de cada uno de los n_1 elementos del vector $\mathbf{y}_{1t}$, y $\mathbf{x}_{2t}$ contiene p rezagos de cada de las n_2 variables en $\mathbf{y}_{2t}$:

$$\mathbf{x}_{1t} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{1,t-1} \\ \mathbf{y}_{1,t-2} \\ \dots \\ \mathbf{y}_{1,t-p} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{2t} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{2,t-1} \\ \mathbf{y}_{2,t-2} \\ \dots \\ \mathbf{y}_{2,t-p} \end{pmatrix}$$

Se dice que y_1 es "exógena en bloque" en un sentido temporal con respecto a y_2 si $A_2=0$. Para contrastar esta hipótesis, seguimos el siguiente procedimiento:

(1) Corra una regresión de cada uno de los elementos de y_1 en una constante, p rezagos de todos los elementos de y_1 y p rezagos de todos los elementos de y_2 . Sea $\hat{\varepsilon}_{1t}$ el vector $n_1 \times 1$ de residuos estimados y

$$\hat{\Omega}_{11} = \frac{1}{T} \sum_t \hat{\varepsilon}_{1t} \hat{\varepsilon}_{1t}'.$$

(2) Corra una regresión de cada uno de los elementos de y_1 en una constante y p rezagos de todos los elementos de y_1 . Sea $\hat{\varepsilon}_{2t}$ el vector $n_1 \times 1$

residuos estimados y $\hat{\Omega}_{22} = \frac{1}{T} \sum_t \hat{\varepsilon}_{2t} \hat{\varepsilon}_{2t}'.$

Se tiene que:

$$T \left(\ln |\hat{\Omega}_{22}| - \ln |\hat{\Omega}_{11}| \right) \xrightarrow{d} \chi^2(n_1 n_2 p) \quad (23)$$

Si el estadígrafo en (23) supera al valor crítico de la chi-cuadrado con $n_1 n_2 p$ grados de libertad, para un nivel de significancia dado, concluimos que los rezagos de y_2 pueden ayudar a predecir el comportamiento presente de y_1 .

Ejemplo

Se cuenta con datos mensuales de la tasa de inflación (en 12 meses), del *spread* de tasas para operaciones no reajustables (captación) de entre 1-3 años y 90-365 días y de la tasa de interés de los Pagarés Reajustables del Banco Central (PRBC) a 90 días para la economía chilena entre los años 1993-1998. Se desea investigar si el nivel de la 'real' (TASREAL) causa conjuntamente 'a la Granger' a las variables nominales *spread* de tasas (SPNOM) e inflación (INFL).

La tabla siguiente muestra el modelo no restringido: un VAR para las 3 variables, en el cual se han incluido 6 rezagos de cada variable (estadígrafos t entre paréntesis).

	SPNOM	INFL	TASREAL
SPNOM(-1)	0.272 (1.716)	0.024 (1.152)	-0.005 (-0.454)
SPNOM(-2)	-0.404 (-2.648)	0.003 (0.141)	0.014 (1.452)
SPNOM(-3)	0.411 (2.498)	-0.017 (-0.768)	-0.022 (-2.064)
SPNOM(-4)	0.175 (1.089)	-0.003 (-0.127)	-0.022 (-2.088)
SPNOM(-5)	0.102 (0.700)	-0.005 (-0.234)	0.008 (0.811)
SPNOM(-6)	-0.024 (-0.190)	-0.007 (-0.417)	-0.008 (-0.976)
INFL(-1)	-1.523 (-1.392)	0.215 (1.467)	-0.191 (-2.704)
INFL(-2)	2.177 (1.742)	0.134 (0.803)	-0.008 (-0.105)
INFL(-3)	-1.314 (-1.048)	0.008 (0.049)	0.293 (3.619)
INFL(-4)	2.232 (1.653)	-0.214 (-1.183)	-0.116 (-1.335)
INFL(-5)	3.301 (2.452)	0.389 (2.163)	-0.210 (-2.419)
INFL(-6)	-2.459 (-1.714)	-0.135 (-0.70291)	0.212 (2.296)
TASREAL(-1)	-2.851 (-1.209)	-0.138 (-0.437)	1.374 (9.044)
TASREAL(-2)	1.206 (0.309)	-0.397 (-0.759)	-0.404 (-1.603)
TASREAL(-3)	3.867 (0.976)	1.069 (2.016)	-0.318 (-1.244)
TASREAL(-4)	-7.133 (-1.446)	-1.233 (-1.868)	0.303 (0.952)
TASREAL(-5)	4.208 (0.757)	1.568 (2.109)	0.125 (0.349)
TASREAL(-6)	0.291 (0.088)	-1.048 (-2.379)	-0.312 (-1.471)
Constante	1.369 (0.143)	1.526 (1.194)	1.546 (2.510)
R^2	0.582	0.407	0.919

Bajo la hipótesis nula, ‘TASREAL no causa a la Granger a SPNOM e INFL’, los doce coeficientes asociados a TASREAL en las ecuaciones de SPNOM e INFL son simultáneamente iguales a cero. Si construimos el estadígrafo de la ecuación (23), encontramos que éste toma el valor de 19.6. El valor crítico de la $\chi^2(12)$ al 95% de confianza es 21.03. Por lo tanto, no rechazamos H_0 .