CONTRASTES DE ESTABILIDAD: CUSUM, CUSUM^2

I Residuos Recursivos

Los tests de CUSUM y CUSUM^2 se basan en los llamados **residuos recursivos**. El residuo recursivo correspondiente a la observación t se define como el error de predicción o pronóstico de y_t (véase apéndice), utilizando el estimador de mínimos cuadrados ordinarios obtenido con las t−1 primeras observaciones:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1} = (\mathbf{X}_{t-1}'\mathbf{X}_{t-1})^{-1}\mathbf{X}_{t-1}'\mathbf{Y}_{t-1} \tag{1}$$

$$\boxed{\hat{u}_t = y_t - \mathbf{x}_t'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1}} \qquad \text{Error de Predicción} \tag{2}$$

donde $\mathbf{x}_t' = (1\ x_{t2}\ x_{t3}\ ...x_{tk})$, vector correspondiente a la t-ava observación de los k regresores del modelo.

Se tiene que el valor esperado y la varianza del error de predicción en t (condicional en $\mathbf{X}_t$) vienen dados, respectivamente, por:

$$E(\hat{u}_t \mid \mathbf{X}_t) = E(y_t \mid \mathbf{X}_t) - \mathbf{x}_t'E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1} \mid \mathbf{X}_t) = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} - \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} = 0$$

$$Var(\hat{u}_t \mid \mathbf{X}_t) = \sigma_u^2 + \mathbf{x}_t'Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1})\,\mathbf{x}_t = \sigma_u^2(1 + \mathbf{x}_t'(\mathbf{X}_t'\mathbf{X}_t)^{-1}\mathbf{x}_t)$$

Por lo tanto, el llamado **residuo normalizado** viene dado por:

$$\boxed{w_t = \frac{\hat{u}_t}{\sqrt{1 + \mathbf{x}_t'(\mathbf{X}_{t-1}'\mathbf{X}_{t-1})^{-1}\mathbf{x}_t}} \sim N(0, \sigma_u^2)} \tag{3}$$

Si los valores de w_t cambian de manera sistemática, se tomará como evidencia de inestabilidad en los parámetros del modelo. Hay dos estadígrafos que permiten contrastar esta hipótesis: test de CUSUM y de CUSUM^2.

II Test de CUSUM y CUSUM²

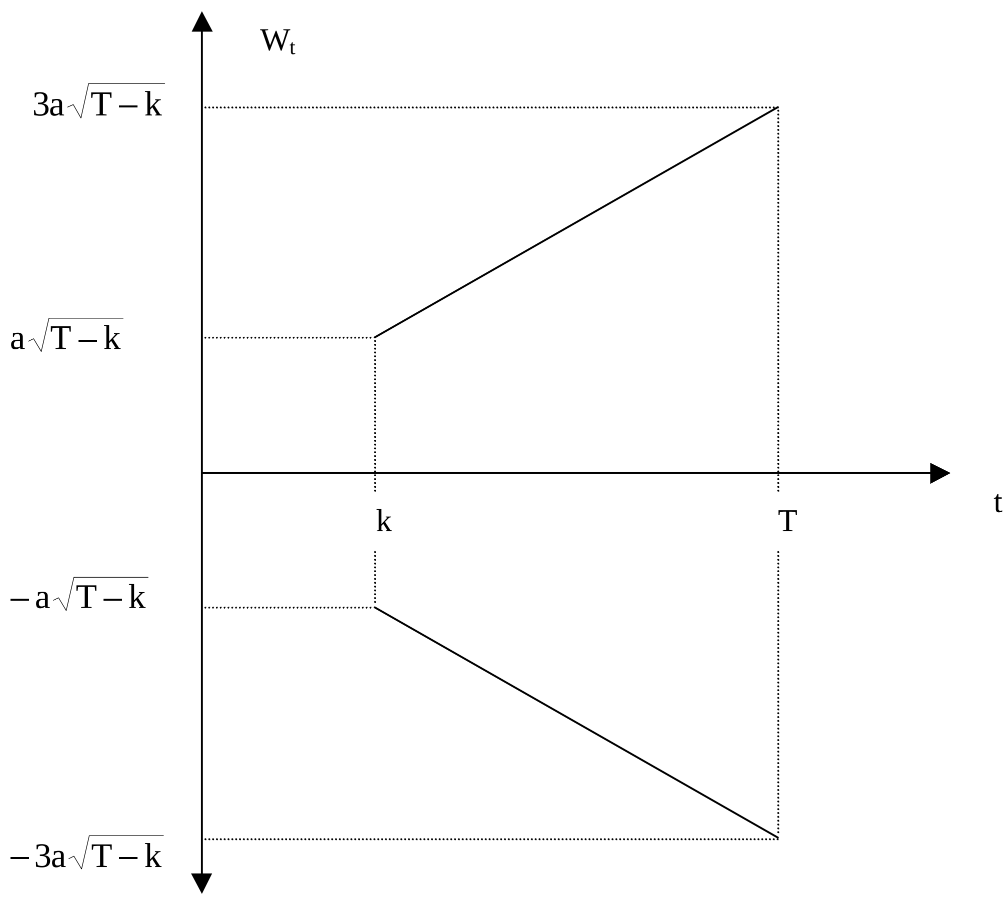
Se basa en la suma acumulada de los residuos normalizados:

$$\boxed{W_t = \sum_{r=k+1}^{t} \frac{w_r}{\hat{\sigma}}} \tag{4}$$

donde $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{T-k}\sum_{r=k+1}^{T}(w_r - \overline{w})^2 \qquad \overline{w} = \dfrac{1}{T-k}\sum_{r=k+1}^{T} w_r$

Bajo la hipótesis nula (ausencia de cambio estructural), $E(W_t)=0$, $Var(W_t) \approx t-k$. Por lo tanto, el contraste se lleva a cabo mediante el análisis gráfico de la evolución de W_t. Las bandas de confianza de W_t vienen dadas por las rectas que unen los puntos:

$$(k \pm a\sqrt{T-k}); (T \pm 3a\sqrt{T-k})$$



El valor de la constante 'a' depende del nivel de significancia escogido:

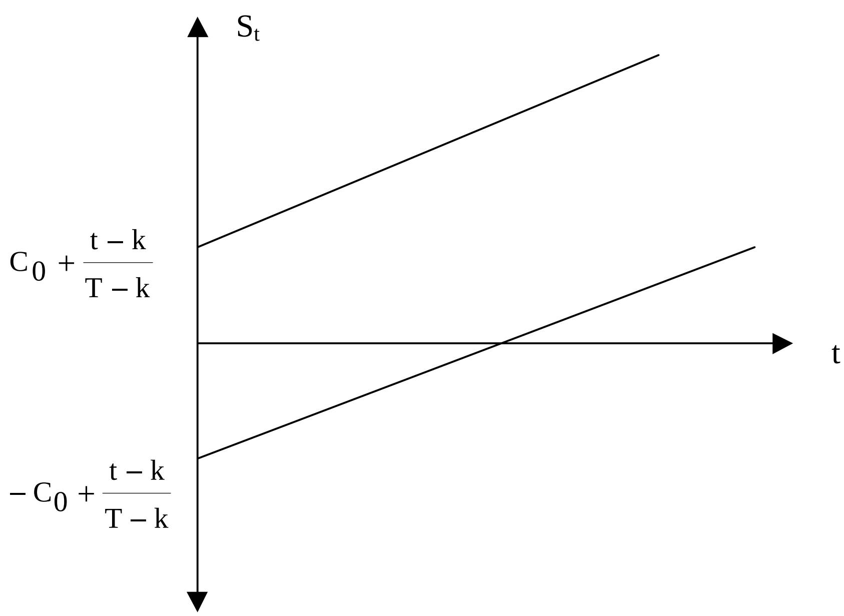
a	Nivel de Significancia
1.143	1 por ciento
0.948	5 por ciento
0.85	10 por ciento

Si W_t no se sale de las bandas de confianza, entonces no hay evidencia para rechazar H_0.

El test de CUSUM^2 se basa en el siguiente estadígrafo:

$$\boxed{S_t = \frac{\sum_{r=k}^{t} w_r}{\sum_{r=k}^{T} w_r^2}} \qquad (5)$$

Bajo H_0, $E(S_t) \approx \dfrac{t-k}{T-k}$. El contraste consiste en dibujar la serie S_t con sus correspondientes bandas de confianza, $E(S_t) \pm C_0$, donde C_0 es una constante que depende de T y k:



Si S_t no se sale de las bandas, no rechazamos H_0.

Apéndice: Predicción Individual en Lenguaje Matricial

Supongamos que deseamos predecir el valor de y, dada una nueva observación del vector de regresores, $\mathbf{x}_0$:

$$y_0 = \mathbf{x}_0'\boldsymbol{\beta} + u_0 \tag{1}$$

Por ejemplo, si tuviésemos un modelo de crecimiento para la economía chilena para los años 1980-1999, estaríamos interesados, en principio, en hacer un pronóstico de la tasa de crecimiento en el año 2000.

Por el teorema de Gauss-Markov, $\hat{y}_0 = \mathbf{x}_0'\hat{\boldsymbol{\beta}}$, con $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$, es el estimador lineal insesgado de mínima varianza de $E(y_0|\ \mathbf{x}_0, \mathbf{X})$. El error de predicción o pronóstico es:

$$\hat{u}_0 = y_0 - \hat{y}_0 = \mathbf{x}_0'(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) + u_0 \tag{2}$$

con $E(\hat{u}_0 \mid \mathbf{x}_0, \mathbf{X}) = 0$ y $Var(\hat{u}_0 \mid \mathbf{x}_0, \mathbf{X}) = \sigma_u^2(1 + \mathbf{x}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0)$.

Se puede demostrar que un intervalo de confianza para y_0 es:

$$\boxed{\hat{y}_0 \ \pm\ t_{n-k}^{\varepsilon/2\%}\sqrt{\hat{\sigma}^2(1 + \mathbf{x}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0)}} \tag{3}$$

donde $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \mathbf{x}_t'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2$, ε es el nivel de significancia escogido.

Análogamente, se puede demostrar que un intervalo de confianza para la predicción media (o predicción del **valor esperado** de y_0) es:

$$\boxed{\hat{y}_0 \ \pm\ t_{n-k}^{\varepsilon/2\%}\sqrt{\hat{\sigma}^2\mathbf{x}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0}} \tag{4}$$

Véase para mayores referencias, Gujarati, “Econometría”, capítulo 9 (tercera edición), por ejemplo.