

עליך לענות על ארבע מתוך חמש השאלות.
כל תשובה נכונה ומלאה תזכה אותך ב- 25 נקודות.

שאלה 1

א. הוכח כי אם $0 < a_n < 1$ לכל n אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$

מתכנס.

ב. קבע לגבי האינטגרל הבא אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.
נמק את קביעתך.

$$\int_0^{\infty} \cos x \frac{\sin x}{\ln(x+1)} dx$$

שאלה 2

א. תהי (r_n) סדרה של כל המספרים הרציונליים (כלומר, קבוצה של כל המספרים הרציונליים המסודרת בסדרה באופן כלשהו). נגדיר פונקציות $f_n(x)$ על-ידי

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_n \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

הוכח כי סדרת הפונקציות $(f_n(x))$ מתכנסת לכל $x \in \mathbf{R}$ אך לא מתכנסת במידה שווה באף קטע $[a, b]$.

ב. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(i) אם $a_n > 0$ לכל n ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, אז $\sum a_n$ מתכנס.

(ii) אם $a_n \neq 0$ לכל n ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$, אז $\sum a_n$ מתבדר.

שאלה 3

א. תהי $f(x)$ רציפה ומונוטונית ב- $[a, \infty)$.

הוכח: אם האינטגרל $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס אז $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0$.

(הדרכה: השתמש במשפט קושי VIII.15)

ב. העזר בפיתוח מקלורן מסדר מתאים על מנת למצוא את כל הערכים d, c, b, a עבורם

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(e^x - 1)(1 - \cos x) + b + cx + dx^2}{\tan x - x} = 1$$

שאלה 4

א. הסדרה (a_n) מוגדרת באינדוקציה על-ידי $a_1 = 0$, $a_{n+1} = f(a_n)$ לכל n

$$. \text{כאשר } f(x) = \frac{1}{4} + x - x^2$$

הוכח כי (a_n) מתכנסת וחשב את גבולה.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה בעלת נגזרת שנייה רציפה בקטע $[-a, a]$, ויהיו M_0 ו- M_2 חסמים

כלהלן: $|f(x)| \leq M_0$, $|f''(x)| \leq M_2$ לכל x בקטע.

הבע את $f(a)$ ו- $f(-a)$ בעזרת פיתוח טיילור מסדר 1 של $f(x)$ סביב $t \in (-a, a)$ כלשהו

והוכח כי לכל $t \in (-a, a)$ מתקיים:

$$. |f'(t)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{t^2 + a^2}{2a} M_2$$

שאלה 5

א. בדוק האם טור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-3)^n}{n^2} x^n$$

מתכנס במידה שווה בתחום ההתכנסות הרגילה שלו.

ב. הוכח או הפרך את הטענה:

אם (a_n) סדרה מתכנסת אז בהכרח יש לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ מינימום או מקסימום.

בהצלחה!...