

עליך לענות על ארבע מתוך חמש השאלות.
כל תשובה נכונה ומלאה תזכה אותך ב- 25 נקודות.

שאלה 1

א. חשב את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^n + 2^n + \dots + n^n)^{1/n}}{n}$.

ב. הוכח כי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ גדול או שווה ל-1.

שאלה 2

א. קבע לגבי הטור הבא אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר. נמק את קביעתך.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right)$$

ב. תהי $g(x)$ פונקציה רציפה בקטע $(0,1]$ שעבורה מתקיים:
 $x^2 g(x)$ עולה בקטע $(0,1]$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 g(x) = 0$, $g'(x)$ רציפה ב- $(0,1]$.
 הוכח כי $\int_0^1 g(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ מתכנס.

שאלה 3

א. לצורך חישוב של $\sqrt{1+x}$ משתמשים בנוסחה מקורבת $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

הוכח כי לכל $|x| < \frac{1}{2}$, שגיאת הנוסחה קטנה מ- $\frac{1}{2}|x|^3$.

ב. הסדרה (a_n) מקיימת

$$a_{2n} < a_{2n+2}, \quad a_{2n+1} < a_{2n-1}, \quad \text{לכל } n.$$

הוכח כי (a_n) מתכנסת אם ורק אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

שאלה 4

א. חשב את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x(\sin x)^{1/n} dx$.

ב. יהי $a_n > 0$ לכל n . הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + a_n$ מתכנס.

שאלה 5

א. מצא את כל הערכים של a, b עבורם מתכנס האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{ax}}{x^b} dx$$

ב. העזר בפיתוח מקלורן מסדר מתאים על מנת לחשב את גבול הסדרה הבאה. נמק היטב.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\tan \frac{1}{n}} - n^2 \right)$$

בהצלחה!...