

עליך לענות על ארבע מתוך חמש השאלות.
כל תשובה נכונה ומלאה תזכה אותך ב- 25 נקודות.

שאלה 1

א. הוכח או הפרך :

אם $f(x)$ רציפה ב- $[0, \infty)$ והאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס אז $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x^2} f(t)dt = 0$.

ב. השתמש בפיתוח מקלורן של הפונקציה $f(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$ על מנת לחשב את

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt \quad \text{כך שהשגיאה לא תעלה על } 10^{-3}.$$

(רמז: להערכת השגיאה השתמש בתכונה של טורים המקיימים את תנאי משפט לייבניץ)

שאלה 2

א. תהיינה $(a_n), (b_n)$ שתי סדרות כך ש- $a_n \rightarrow \infty$ ו- $(a_n + b_n)$ סדרה חסומה.

חשב את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ או הסבר מדוע לא ניתן למצוא אותו מהנתון.

ב. קבע לגבי האינטגרל הבא אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.
נמק את קביעתך.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{2/3}} \sin \frac{1}{x} dx$$

שאלה 3

א. סדרה (a_n) מקיימת את התכונה הבאה: קבוצת כל הסכומים הסופיים האפשריים של

איברי (a_n) היא קבוצה חסומה (כלומר, קיים M כך ש- $\left| \sum_{k=1}^m a_{n_k} \right| < M$ לכל תת-סדרה

סופית של סדרת מספרים טבעיים, $(n_k)_{k=1, \dots, m}$).

הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. בדוק אם טור הפונקציות $\sum_{n=0}^\infty (\ln x)^n$ מתכנס במידה שווה בקטע $\left[\frac{2}{e}, 2 \right]$.

שאלה 4

א. תן דוגמה של סדרה $(f_n(x))$ מתכנסת במידה שווה בקטע I כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס

לכל $x \in I$ אך לא מתכנס במידה שווה בקטע I .

ב. מצא את כל הערכים של α עבורם מתכנס הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\alpha\right)^n$.

שאלה 5

א. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$, גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$ ומקיימת

$$f'(0) = f(0) = 0, \quad f''(0) = 3.$$

האם האינטגרל $\int_0^1 f(x)x^{-\frac{12}{5}}dx$ מתכנס? נמק את תשובתך!

ב. תהי (a_n) סדרה עבורה מתקיים $a_{n+3} = \sin a_n$ לכל n טבעי.

הוכח כי $a_n \rightarrow 0$.

בהצלחה!..