

עליך לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.
כל תשובה נכונה ומלאה תזכה אותך ב- 25 נקודות.

שאלה 1

א. מצא את כל הערכים של α ו- β עבורם מתכנס האינטגרל:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^{\alpha}(1+x)}{x^{\beta}} dx$$

ב. הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

$$\text{אם } a_n \not\rightarrow 0 \text{ ו- } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ קיים אז } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1.$$

שאלה 2

א. האם קיים טור מתכנס $\sum a_n$ כך שהטור $\sum a_n(a_n + 1)$ מתבדר?

נמק את תשובתך היטב!

ב. יהי $P(x)$ פולינום ממעלה n ותהי $a \in \mathbb{R}$ נקודה שרירותית. נסמן ב- $R_n(x, a)$ את השארית

מסדר n של פיתוח טיילור עבור $P(x)$ סביב הנקודה a .

הוכח או הפרך: $R_n(x, a) = 0$ לכל x .

שאלה 3

א. קבע האם סדרת הפונקציות $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)^4$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[0, 1]$.

ב. תהי פונקציה $f(x)$ חיובית, רציפה ומונוטונית בקטע $(0, 1]$ והאינטגרל $\int_0^1 f(x) dx$ מתכנס.

$$\text{הוכח כי } \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0.$$

שאלה 4

א. נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x|^{\sqrt{n}}$.

מצא את תחום הגדרתה של f והוכח כי f רציפה בתחום זה.

ב. הוכח ללא שימוש בכלל לופיטל שאם $f^{(3)}(x)$ קיימת אז

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} = f^{(3)}(x).$$

שאלה 5

א. תהי (a_n) מוגדרת באינדוקציה באופן הבא:

$$a_1 = 1, \quad a_{2n} = 7a_{2n-1}, \quad a_{2n+1} = \sqrt{a_{2n}} \quad \text{לכל } n \geq 1.$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של (a_n) .

ב. הוכח שאם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס והסדרה (na_n) מתכנסת אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

מתכנס.

בהצלחה!..