

עליך לענות על ארבע מתוך חמש השאלות.
כל תשובה נכונה ומלאה תזכה אותך ב- 25 נקודות.

שאלה 1

א. מצא את כל הערכים של α עבורם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\alpha - 1)^n}{\sqrt{n}}$

(i) מתכנס.

(ii) מתכנס בהחלט.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[0, +\infty)$ ומקיימת $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \ln^2 x = 3$.

הוכח: האינטגרל $\int_0^{\infty} f(e^x) dx$ מתכנס.

שאלה 2

א. חשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ כאשר

$$a_n = \frac{e^{\frac{1}{n^2}} + 2e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + (n-1)e^{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} + ne}{n^2}$$

ב. נניח כי קיימים מספרים ממשיים $\beta > 0$, $L > 0$ כך ש- $|a_n \beta^n| \rightarrow L$ כאשר $n \rightarrow \infty$.

מצא את תחום ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

שאלה 3

א. תן דוגמה לטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע $[a, b]$ כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$

לא מתכנס במידה שווה ב- $[a, b]$.

ב. תהי $f(x)$ גזירה פעמיים ב- $\mathbf{R}$, $|f(x)| \leq 1$, $|f''(x)| \leq 1$ לכל x .

רשום פיתוחי טיילור עבור $f(x + \sqrt{2})$ ו- $f(x - \sqrt{2})$ סביב נקודה x שרירותית

והוכח בעזרת פיתוחים אלה כי $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$ לכל x .

שאלה 4

א. קבע לגבי האינטגרל הבא אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר. נמק את קביעתך.

$$\int_0^{\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot \sin x \, dx$$

ב. הוכח או הפרך על-ידי דוגמה נגדית:

(i) אם לסדרה מונוטונית (a_n) יש סדרה חלקית המתכנסת לגבול סופי a , אז $a_n \rightarrow a$.

(ii) אם לסדרה יש שני גבולות חלקיים שונים אז היא לא מונוטונית.

שאלה 5

א. לצורך חישוב $\sqrt{1+x}$ עבור x בקטע $[0,1]$ משתמשים בפולינום מקלורן ממעלה n של פונקציה $f(x) = \sqrt{1+x}$. מצא n שעבורו השגיאה לא תעלה על 0.1 (לכל x בקטע $[0,1]$).

ב. תהי (u_n) סדרת מספרים חיוביים כך שלכל n מתקיים $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$ כאשר $\alpha > 1$.

הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס.

בהצלחה!...