

עליך לענות על ארבע מתוך חמש השאלות.
כל תשובה נכונה ומלאה תזכה אותך ב- 25 נקודות.

שאלה 1

א. מצא את כל הערכים של β, α עבורם מתכנס האינטגרל

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\frac{\pi}{2} - x)^\alpha x^\beta}{(\cos^2 x)^\beta} dx$$

ב. הוכח את המקרה הפרטי של משפט רימן X.27 :

יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי, אז קיים טור המתקבל על-ידי שינוי סדר איברים של $\sum a_n$ שסכומו $+\infty$.

(שים לב: משפט X.27 לא הוכח בספר ולכן לא ניתן להסתפק בציטוט שלו)

שאלה 2

א. העזר בפיתוח מקלורן מסדר מתאים על מנת לחשב את הגבול הבא. נמק כל שלב.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{e^{x^2} \tan x - x}$$

ב. תהי $f(x)$ מוגדרת ב- $\mathbf{R}$. נגדיר $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$ לכל n ולכל x .

הוכח: אם $(g_n(x))$ מתכנסת לאפס במידה שווה ב- $\mathbf{R}$, אז $f(x) = 0$ לכל x ממשי.

שאלה 3

א. מצא את תחום ההתכנסות ואת סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

השתמש בתוצאה שקבלת על מנת לחשב את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{2^n}$.

ב. תהי (a_n) סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n = \frac{3}{2}$.

הוכח כי $a_n \rightarrow 0$.

הדרכה: הוכח קודם כי הסדרה (na_{n+1}) יורדת החל ממקום מסוים.

שאלה 4

א. הוכח או הפרך על-ידי דוגמה נגדית:

(i) אם הטור $\sum a_n$ מתכנס אז הטור $\sum a_n \sin n$ מתכנס בהחלט.

(ii) אם הטור $\sum a_n$ מתבדר והסדרה (a_n) מונוטונית ואפסה אז הטור $\sum a_n \sin n$ מתכנס בתנאי.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה בעלת נגזרת שלישית בקטע $[-1,1]$ ומקיימת

$$f'(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(0) = f(-1) = 0$$

הוכח כי קיימת נקודה c בקטע $[-1,1]$ כך ש- $f^{(3)}(c) \geq 3$.

שאלה 5

א. חשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n + n \cos n)^{\frac{1}{2n + n \sin n}}$.

ב. קבע אם הטענה הבאה נכונה או לא:

אם $f(x)$ רציפה ב- $[a, \infty)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{2x} f(t) dt = 0$ אז האינטגרל $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס.

בהצלחה!..