

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20212 - חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2,1

מספר השאלות: 7

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: ב' 2007

מועד אחרון להגשה: 30.3.2007

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

חשב את הגבולות הבאים ונמק כל שלב.

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \ln n - 7 \sin n^2}{n - 3 + \cos n}$

ב. $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln \left(x + \frac{1}{n} \right) - \ln x \right)$

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin 1 + 2 \sin \frac{1}{2} + 3 \sin \frac{1}{3} + \dots + n \sin \frac{1}{n} \right)$

ד. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

שאלה 2 (10 נקודות)

תהי (a_n) סדרה חשבונית אינסופית בעלת הפרש d , $a_n \neq 0$ לכל n .

חשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right)$

שאלה 3 (10 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[0,1]$.

נגדיר סדרה (a_n) על-ידי $a_n = \int_{1/n}^{2/n} f(x) dx$ לכל n .

הוכח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = f(0)$

שאלה 4 (20 נקודות)

א. נתון $a_n \rightarrow a$, $a > 0$, $a_n > 0$ לכל n .
הוכח כי אם $b_n \rightarrow b$ או $a_n^{b_n} \rightarrow a^b$ (נמק כל שלב!).

ב. חשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2} \right)^{3n/2}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- א. אם $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.
- ב. אם $a_n > 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים ולא גדול מ-1.
- ג. אם $|a_n| \not\rightarrow \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ קיים אז $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1$.
- ד. אם (a_n) לא חסומה אז עבור אינסוף n -ים מתקיים $|a_{2n}| \geq |a_n|$.

שאלה 6 (10 נקודות)

חשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \frac{3}{n^2 + 3} + \dots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$.

שאלה 7 (10 נקודות)

תהי (a_n) סדרה חיובית המתכנסת לגבול סופי a .

נגדיר (b_n) על-ידי $b_n = \left(\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k a_k \right)^{1/2}$.

חשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20212 - חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2,3

מספר השאלות: 7

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: ב' 2007

מועד אחרון להגשה: 13.4.2007

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי (a_n) מוגדרת באינדוקציה על-ידי: $0 < a_1 < 1$, $a_{n+1} = a_n - a_n^3$ לכל $n \geq 1$.
(8 נק') א. הוכח כי (a_n) מתכנסת וחשב את גבולה.

(4 נק') ב. חשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(8 נק') ג. הוכח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2 = \frac{1}{2}$ (רמז: משפט שטולץ VII.20)

שאלה 2 (15 נקודות)

תהי (a_n) מוגדרת באינדוקציה על-ידי $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n}$ לכל n טבעי.
הוכח כי (a_n) מתכנסת וחשב את גבולה.

שאלה 3 (10 נקודות)

נגדיר (a_n) על-ידי: $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ כאשר $f(x) = 2x^2 - x + 1$.
האם קיים a כך ש- (a_n) מתכנסת לגבול סופי? נמק!

שאלה 4 (10 נקודות)

תהי (a_n) סדרה מתכנסת ותהי (b_n) סדרה מקיימת $a_n \leq b_n$ כמעט לכל n .

הוכח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

שאלה 5 (10 נקודות)

תהי (a_n) סדרה בעלת שני גבולות חלקיים בלבד, 1 ו-3.

הסדרה (b_n) מוגדרת על-ידי $b_n = |2 - a_n|$ לכל n .

הוכח כי (b_n) מתכנסת וחשב את גבולה.

שאלה 6 (15 נקודות)

תהי (a_n) סדרת קושי שאיבריה שייכים לקטע סגור I והפונקציה $f(x)$ רציפה ב- I .

נגדיר $b_n = f(a_n)$. הוכח כי (b_n) סדרת קושי.

האם ניתן לוותר על התנאי שהקטע I סגור? נמק.

שאלה 7 (20 נקודות)

שאלה זו ופתרונה באים להמחיש את השימוש באינטגרלים מסוימים ובהגדרתם לפי רימן

(ראה נספח באינפי I) לחישוב גבולות של סדרות מסוימות.

(8 נק') א. תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a, b]$. הוכח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

(2 נק') ב. הבע את $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ כאינטגרל מסוים, בהנחה ש- $f(x)$ רציפה בקטע המתאים.

(10 נק') ג. חשב את הגבולות של הסדרות הבאות:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \quad (i)$$

$$b_n = \frac{2}{n^{\frac{1}{n}} e^{n+2}} + \frac{2}{n^{\frac{1}{n}} e^{n+4}} + \dots + \frac{2}{n^{\frac{1}{n}} e^{n+2n}} \quad (ii)$$

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20212 - חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 1, 2, 3, 4

מספר השאלות: 20

משקל המטלה: 2 נקודות

סמסטר: ב' 2007

מועד אחרון להגשה: 27.4.2007

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאלתא

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלה 1

נתון: הסדרה (a_n) מתכנסת לגבול סופי a .

קבע ביחס לכל אחד מהמשפטים הבאים אם הוא נובע בהכרח מהנתון:

1. $(a_n - a)$ היא סדרה אפסה.

2. הסדרה (b_n) חסומה כאשר $b_n = a_n^2 + \sin(a_n^n)$.

3. לא קיים $\varepsilon > 0$ כך שעבור אינסוף n -ים מתקיים $|a - a_n| > \varepsilon$.

כל המשפטים הנובעים בהכרח מהנתון הם:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 2,1 ה. 1,3 ו. 2,3 ז. 3,2,1

סמן "ח" אם אף אחד מהמשפטים לא נובע מהנתון.

שאלה 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n+a} \cdot \sqrt{n+b}) =$$

א. 0 ב. $-\infty$ ג. $-\sqrt{ab}$ ד. $-a-b$ ה. $-\frac{a+b}{2}$

סמן "ו" אם בין התשובות א-ה אין תשובה נכונה.

שאלה 3

יהיו $a_1, a_2, \dots, a_k$ מספרים חיוביים.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}{k}} =$$

א. 1

ב. $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

ג. $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

ד. ∞

ה. הסדרה לא מתכנסת (אפילו במובן הרחב)

סמן "ו" אם בין התשובות א-ה אין תשובה נכונה.

שאלה 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n+2}} + \frac{1}{\sqrt{4n+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n+2n}} \right) =$$

א. 0

ב. $\frac{1}{2}$

ג. 1

ד. ∞

ה. הסדרה לא מתכנסת (אפילו במובן הרחב)

סמן "ו" אם בין התשובות א-ה אין תשובה נכונה.

שאלה 5

הסדרה (x_n) מוגדרת באינדוקציה על-ידי: $x_1 = 2007$, $x_{n+1} = \frac{x_n + 9}{x_n - 1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$$

א. 2

ב. $1 + \sqrt{10}$

ג. $1 - \sqrt{10}$

ד. ∞

ה. הסדרה לא מתכנסת (אפילו במובן הרחב)

סמן "ו" אם בין התשובות א-ה אין תשובה נכונה.

שאלה 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2} =$$

- א. 0 ב. $\frac{1}{4}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. 1 ה. 2 ו. ∞

סמן "ז" אם הסדרה לא מתכנסת (אפילו במובן הרחב).

סמן "ח" אם בין התשובות א-ז אין תשובה נכונה.

שאלה 7

כל הגבולות החלקיים של הסדרה $a_n = \frac{2n+1}{n-1} \cos^2 \frac{\pi n}{4} + 2 \sin \frac{\pi n}{2}$ הם :

- א. $-1, 3$
 ב. $0, 1, 2$
 ג. $-1, 0, 2, 3$
 ד. $-1, 0, 1, 2, 3$
 ה. $-\infty, 0, +\infty$

סמן "ו" אם בין התשובות א-ה אין תשובה נכונה.

שאלה 8

תהי (a_n) הסדרה המוגדרת על-ידי $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n \cdot n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cos n\pi$.

הם בהתאמה: $\overline{\lim} a_n$, $\underline{\lim} a_n$

א. $2e, 0$

ב. $e + \frac{1}{e}, \frac{1}{2e}$

ג. $e - \frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}$

ד. $e + \frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}$

סמן "ה" אם בין התשובות א-ד אין תשובה נכונה.

בכל אחת מהשאלות 9-17 מופיעים שני משפטים, 1 ו-2.

- סמן:** א - אם רק משפט 1 נכון.
ב - אם רק משפט 2 נכון.
ג - אם שני המשפטים נכונים.
ד - אם שני המשפטים אינם נכונים.

שאלה 9

1. אם $a_n \rightarrow 1$ אז $(a_n)^n \rightarrow 1$.
2. אם $(a_n)^n \rightarrow 1$ אז $a_n \rightarrow 1$.

שאלה 10

1. תהי $b_n = \cos a_n$, אם (a_n) מתכנסת אז גם (b_n) מתכנסת.
2. תהי $b_n = \sin(2a_n)$, הסדרה (b_n) מתכנסת אם ורק אם הסדרה (a_n) מתכנסת.

שאלה 11

1. אם (a_n) מתכנסת אז (a_n^2) מתכנסת.
2. אם (a_n^2) מתכנסת אז (a_n) מתכנסת.

שאלה 12

1. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_n) = 0$ אז (a_n) סדרה מתכנסת.
2. אם (a_n) סדרה מתכנסת אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_n) = 0$.

שאלה 13

- תהיינה (a_n) ו- (b_n) סדרות מונוטוניות עולות.
1. $(a_n - b_n)$ מונוטונית עולה.
2. $(a_n \cdot b_n)$ מונוטונית עולה.

שאלה 14

תהינה $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות אי-שליליות בקטע $[1, \infty)$.
 נסמן $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

1. אם $\int_1^\infty f(x)dx$, $\int_1^\infty g(x)dx$ מתכנסים אז $\int_1^\infty M(x)dx$ מתכנס.
2. יתכן ש- $\int_1^\infty f(x)dx$, $\int_1^\infty g(x)dx$ מתבדרים ו- $\int_1^\infty m(x)dx$ מתכנס.

שאלה 15

1. האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ מתכנס.
2. האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$ מתכנס.

שאלה 16

1. האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ מתכנס.
2. האינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$ מתכנס.

שאלה 17

נתון שהפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט ב- $[a, \infty)$.

1. $f(x)$ חסומה ב- $[a, \infty)$.
2. האינטגרל $\int_a^\infty f(x) \sin x dx$ מתכנס בהחלט.

שאלה 18

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^5 + 2}} dx \quad \text{האינטגרל}$$

א. מתכנס בהחלט.

ב. מתכנס בתנאי.

ג. מתבדר.

הארה: אינטגרל **מתכנס בתנאי** אם הוא מתכנס אך לא מתכנס בהחלט.

שאלה 19

$$\int_0^1 \frac{\sin(e^{\frac{1}{x}})}{x} dx \quad \text{האינטגרל}$$

א. מתכנס בהחלט.

ב. מתכנס בתנאי.

ג. מתבדר.

שאלה 20

$$\int_1^{\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx \quad \text{האינטגרל} \quad \text{מתכנס אם ורק אם:}$$

א. $q \geq p$

ב. $q < p$

ג. $q + 1 < p$

ד. $q + 1 < \max\{p, 0\}$

ה. $p > 1$

ו. $q < -1$

ז. $p > 1$ וגם $q < -1$

סמן "ח" אם בין התשובות א-ז אין תשובה נכונה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20212 - חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידה 4

מספר השאלות: 6

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: ב' 2007

מועד אחרון להגשה: 4.5.2007

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

לגבי כל אחד מהאינטגרלים הבאים קבע אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר, ונמק את קביעתך.

הארה: אינטגרל מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אך לא מתכנס בהחלט.

א. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

ב. $\int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$

ג. $\int_2^\infty \frac{\cos(x^2)}{x \ln x} dx$

שאלה 2 (15 נקודות)

מצא את כל הערכים של α ו- β עבורם מתכנס האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha (1-x^2)^\beta}{\cos x - 1} dx$$

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי $f(x)$ רציפה ב- $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$.

הוכח כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} (f(x+1) - f(x)) dx$ מתכנס וחשב אותו.

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכח או הפרך את הטענות הבאות :

א. אם $f(x)$ רציפה ב- $[0, \infty)$ והאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס אז $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x^2} f(t)dt = 0$.

ב. קיימות פונקציות $f(x), g(x)$ כך ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ ו- $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנסים בתנאי, אך

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx \text{ מתכנס בהחלט.}$$

שאלה 5 (15 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[0, \infty)$ כך שהאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט וקיים גבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ (סופי או אינסופי).}$$

הוכח שהאינטגרל $\int_0^\infty f(x)f(x^2)dx$ מתכנס.

שאלה 6 (15 נקודות)

תהיינה $f(x), f'(x), g(x)$ פונקציות רציפות ב- $[a, \infty)$,

$\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס, $f(x)$ מונוטונית וחסומה ב- $[a, \infty)$.

הוכח שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20212 - חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

מספר השאלות: 6

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: ב' 2007

מועד אחרון להגשה: 18.5.2007

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10 נקודות)

העזר בפיתוח טיילור מתאים על מנת לחשב את $\sqrt[4]{83}$ כך שהשגיאה לא תעלה על $0.5 \cdot 10^{-3}$.
(כלומר בדיוק של 3 ספרות אחרי הנקודה).

שאלה 2 (15 נקודות)

מצא את פולינום מקלורן מסדר 3 של הפונקציה $f(x) = (1+x)^{1/x}$.
הדרכה: אל תחשב נגזרות של f , זוהי דרך מייגעת! תשתמש בכך ש- $f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$.

שאלה 3 (20 נקודות)

העזר בפיתוח מקלורן מסדר מתאים על מנת לחשב את הגבולות הבאים, נמק כל שלב!

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt - \tan x}{2x(1 - \cos x)}$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - \sin \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n}}{\ln(n^2 - 1) - 2 \ln n}$

שאלה 4 (15 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה בעלת נגזרת שנייה חסומה בקטע $[-a, a]$, ויהיו M_0 ו- M_2 חסמים כלהלן:

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f''(x)| \leq M_2 \quad \text{לכל } x \text{ בקטע.}$$

הבע את $f(a)$ ו- $f(-a)$ בעזרת פיתוח טיילור של $f(x)$ סביב $t \in (-a, a)$ כלשהו

והוכח כי לכל $t \in (-a, a)$ מתקיים:

$$|f'(t)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{t^2 + a^2}{2a} M_2.$$

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ רציפה ב- $[0, 1]$ וגזירה פעמיים ב- $x = 0$.

השתמש בפיתוח מקלורן של $f(x)$ כדי להוכיח כי

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{1}{t^2} f(t) dt = f(0).$$

שים לב: לא נתון ש- $f(x)$ גזירה פעמיים בסביבה של $x = 0$.

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים ב- $\mathbf{R}$ וקיים $M > 0$ כך ש- $|f''(x)| \leq M$ לכל x .

$$h = \sqrt{\frac{2|f(0)|}{3M}} \quad \text{ניח ש- } f(0) \neq 0 \text{ ונסמן}$$

הוכח שאם $f(x)$ לא מונוטונית ב- $(-h, h)$ אז ל- $f(x)$ אין אפסים ב- $(-h, h)$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20212 - חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

מספר השאלות: 20

משקל המטלה: 2 נקודות

סמסטר: ב' 2007

מועד אחרון להגשה: 1.6.2007

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאלתא

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות 1-7 מופיעים שני משפטים שמסומנים ב-1 ו-2. קבע לגבי כל אחד מהם אם הוא נכון או לא.

סמן: א - אם רק משפט 1 נכון.

ב - אם רק משפט 2 נכון.

ג - אם שני המשפטים נכונים.

ד - אם שני המשפטים אינם נכונים.

בכל אחת מהשאלות 8-18

סמן: א - אם הטור מתכנס בהחלט.

ב - אם הטור מתכנס בתנאי.

ג - אם הטור מתבדר.

ד - אם בין התשובות א-ג אין תשובה נכונה.

שאלה 1

1. אם $\sum a_n$ טור מתכנס ו- (b_n) סדרה חסומה, $b_n \geq 0$ או $\sum a_n b_n$ מתכנס.
2. אם $\sum a_n$ טור חסום ו- (b_n) סדרה חסומה, אז $\sum a_n b_n$ טור חסום.

שאלה 2

תהיינה (a_n) , (b_n) שתי סדרות של מספרים חיוביים.

1. אם לכל n מתקיים $a_n b_n \geq \frac{1}{n}$, אז לפחות אחד מהטורים $\sum a_n$, $\sum b_n$ הוא טור מתבדר.
2. אם $\sum a_n$, $\sum b_n$ מתבדרים אז קיים $\alpha > 0$ כך שכמעט לכל n מתקיים $a_n b_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$.

שאלה 3

1. אם (a_n) סדרה חיובית יורדת אז הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.
2. אם (a_n) סדרה חיובית אפסה אז הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

שאלה 4

1. אם $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט אז $\sum a_n^3$ מתכנס.
2. אם $\sum a_n^3$ טור מתבדר אז $\sum a_n$ מתבדר.

שאלה 5

1. אם $\sum_{k=1}^{2n} a_k \leq 2$ לכל n אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum_{k=1}^{2n} a_k \rightarrow 2$ כאשר $n \rightarrow \infty$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

שאלה 6

1. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ אז הטור $\sum a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum a_n$ טור של איברים חיוביים, $c_n < 1$ לכל n ו- $\frac{a_{n+1}}{a_n} < c_n$ לכל n אז $\sum a_n$ מתכנס.

שאלה 7

1. אם $a_n > 0$ לכל n ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, $a_n \neq 0$ לכל n , אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

שאלה 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n} (n+1)!}{n^{n+1}}$$

שאלה 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{2n+1}$$

שאלה 11

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} (n+1)}{(n-1)^2 \ln(n+2)}$$

שאלה 10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}$$

שאלה 13

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!(e^n - n)}{n^n}$$

שאלה 12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - n \sin \frac{1}{n}}$$

שאלה 15

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{\ln n} \right)^2$$

שאלה 14

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)}{\ln^3 n}$$

שאלה 17

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$$

שאלה 16

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \cdot \ln(\cos \frac{1}{n})$$

שאלה 18

כאשר (a_n) מוגדרת באינדוקציה על-ידי $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$ לכל n . $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

שאלה 19

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\alpha - 1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{הטור}$$

- א. מתכנס לכל $\alpha < 1$.
 - ב. מתכנס אם $0 < \alpha < 1$.
 - ג. מתכנס בתנאי לכל $0 \leq \alpha < 1$.
 - ד. מתכנס בתנאי אם $\alpha = 0$.
 - ה. מתכנס בהחלט לכל $0 \leq \alpha < 1$.
- סמן "ו" אם בין התשובות א-ה יש כמה תשובות נכונות.
סמן "ז" אם בין התשובות א-ה אין תשובה נכונה.

שאלה 20

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{מתכנס, אז הטור} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \quad \text{של הסדרה } (a_n) \quad \text{הטור}$$

- א. בהכרח מתכנס בהחלט.
 - ב. בהכרח מתכנס אך יכול לא להתכנס בהחלט.
 - ג. יכול להתבדר.
- סמן "ד" אם בין התשובות א-ג אין תשובה נכונה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20212 - חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 8.6.2007

סמסטר: ב' 2007

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

קבע לגבי כל אחד מהטורים הבאים אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.
נמק את שיקולך.

א. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos 2n \cdot \frac{n}{(n^2-1)\ln^2 n} + \cos(\pi n) \cdot \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \right)$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ כאשר u_1 מספר ממשי שרירותי ו- $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$ לכל $n \geq 1$.

שאלה 2 (15 נקודות)

מצא את כל הערכים של α עבורם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ מתכנס בהחלט ואת אלה עבורם הוא מתכנס בתנאי.

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי (a_n) סדרה חיובית המקיימת $\frac{n-1}{n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n}{n+1}$ לכל $n \geq 1$.

א. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

ב. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

שאלה 4 (15 נקודות)

א. הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ מתכנס ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ אז הטור $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots$ מתכנס.

ב. הראה שלא ניתן לוותר על הדרישה $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ בסעיף א'.

ג. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתבדר בעל איברים חיוביים כאשר $a_n \rightarrow 0$.

הוכח כי הטור $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \dots$ מתכנס בתנאי וחשב את סכומו.

שאלה 5 (20 נקודות)

הוכח או הפוך את הטענות הבאות:

א. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס אז גם הסדרה (a_n) מתכנסת.

ב. אם (a_n) סדרה אפסה אז יש לה תת סדרה (a_{n_k}) כך שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ מתכנס בהחלט.

שאלה 6 (15 נקודות)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתבדר, $a_n > 0$ לכל n .

נסמן ב- S_n סדרת הסכומים החלקיים של הטור, כלומר $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

הוכח: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ מתבדר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20212 - חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 8,7

מספר השאלות: 15

משקל המטלה: 2 נקודות

סמסטר: ב' 2007

מועד אחרון להגשה: 22.6.2007

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאלתא

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות 1-9 מופיעות שלוש טענות.

- סמן:**
- א - אם רק טענה 1 נכונה.
 - ב - אם רק טענה 2 נכונה.
 - ג - אם רק טענה 3 נכונה.
 - ד - אם רק טענות 1,2 נכונות.
 - ה - אם רק טענות 1,3 נכונות.
 - ו - אם רק טענות 2,3 נכונות.
 - ז - אם כל הטענות 1,2,3 נכונות.
 - ח - אם בין הטענות 1-3 אין אף טענה נכונה.

בכל אחת מהשאלות 11-15 מופיעות שתי טענות.

- סמן:**
- א - אם רק טענה 1 נכונה.
 - ב - אם רק טענה 2 נכונה.
 - ג - אם שתי הטענות 1,2 נכונות.
 - ד - אם בין הטענות 1,2 אין אף טענה נכונה.

שאלה 1

תהי (f_n) סדרת פונקציות המוגדרות ב- $[0,1]$ על-ידי:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$$

1. (f_n) מתכנסת ב- $[0,1]$ לפונקציה הגבול $f(x) = x$.

2. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

שאלה 2

תהי (f_n) סדרת פונקציות המוגדרות על-ידי:

$$f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$$

1. (f_n) מתכנסת בקטע $[0,1]$.
2. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$.
3. אם $b > 1$ אז (f_n) לא מתכנסת ב- $[0,b]$.

שאלה 3

תהי $(f_n(x))$ סדרת הפונקציות המוגדרות לכל $x \geq 0$ על-ידי:

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}, \quad f_1(x) = \sqrt{x}$$

1. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$.
2. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $[1,2007]$.
3. קיימים $0 < a < b$ כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ הוא מספר רציונלי.

שאלה 4

הסדרה (f_n) מוגדרת ב- $(-\infty, \infty)$ על-ידי:

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n} \cdot \sin x}{nx^2 + 2}$$

1. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $[0, \infty)$.
2. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $[0, \pi]$.
3. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

שאלה 5

תהי (f_n) סדרת פונקציות המוגדרות בקטע $[0, \infty)$ על-ידי:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x \right) & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \end{cases}$$

1. (f_n) מתכנסת נקודתית ב- $[0, \infty)$.
2. (f_n) מתכנסת במידה שווה בכל קטע מהצורה $[a, \infty)$ כאשר $a > 0$.
3. (f_n) מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

שאלה 6

תהי (f_n) סדרת פונקציות המוגדרות על-ידי:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2 x^2}$$

1. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $(-\infty, \infty)$.

2. (f'_n) מתכנסת במידה שווה ב- $(-\infty, \infty)$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$ לכל x .

שאלה 7

תהי $f(x)$ מוגדרת על-ידי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ ונגדיר $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1. תחום ההגדרה של $F(x)$ הוא $\mathbf{R}$.

2. $F(x)$ אינה רציפה בתחום הגדרתה.

3. $F(\pi) = 0$.

שאלה 8

תהי $f(x)$ מוגדרת על-ידי:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1-x}{x} \right)^n$$

1. $f'(x) = \frac{x}{2x-1}$ לכל x בתחום הגדרתה של $f(x)$.

2. תחום התכנסות הטור הוא $\left(\frac{1}{2}, \infty \right)$.

3. הטור מתכנס במידה שווה ב- $[1, \infty)$.

שאלה 9

תהי $f(x)$ מוגדרת על-ידי:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$$

1. $f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}$ לכל $x > 0$.

2. טור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$ מתכנס במידה שווה ב- $[0, 1]$.

3. $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x e^{-nx} dx$

שאלה 10

תחום ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n-1)^2 \ln(n+2)} x^n$ הוא :

- א. $x = 0$ ב. $(-1, 1)$ ג. $(-1, 1]$ ד. $[-1, 1)$ ה. $[-1, 1]$ ו. $[0, 1)$ ז. $(-\infty, \infty)$
 סמן "ח" אם בין התשובות א-ז אין תשובה נכונה.

שאלה 11

1. אם הטור $\sum u_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[m, m+1]$ לכל m שלם, אז הוא מתכנס במידה שווה בקטע $[-a, a]$ לכל a ממשי.
 2. אם הטור $\sum u_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-a, a]$ לכל a ממשי, אז הוא מתכנס במידה שווה ב- $\mathbf{R}$.

שאלה 12

1. אם רדיוס התכנסות של כל אחד מהטורים $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ הוא 2 אז הטור $\sum a_n b_n x^n$ מתכנס עבור $x = 3$.
 2. אם הטור $\sum a_n x^n$ מתכנס עבור $|x| < R$ ו- $|b_n| \leq n^2 |a_n|$ לכל n , אז גם הטור $\sum b_n x^n$ מתכנס עבור $|x| < R$.

שאלה 13

1. טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1) \sin \frac{x}{n+1}}{x} - \frac{n \sin \frac{x}{n}}{x} \right)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[1, +\infty)$.
 2. הפונקציה $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{x^2 + \ln n}$ רציפה ב- $\mathbf{R}$.

שאלה 14

1. טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 2^{2n}}$ מתכנס במידה שווה בתחום התכנסותו (הרגילה).
 2. טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(1+1/n)^{n^2}} x^n$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-1, 1]$.

שאלה 15

1. לכל $0 \leq a < b$ מתקיים $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \ln(nx+1)}{n^3} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{(n+1) \ln(nx+1)}{n^3} dx$.
 2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \ln(nx+1)}{n^3}$ מתכנס במידה שווה ב- $[0, \infty)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20212 - חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 8,7

מספר השאלות: 6

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: ב' 2007

מועד אחרון להגשה: 29.6.2007

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי $(f_n(x))$ סדרת פונקציות המוגדרות ב- $[0, \infty)$ על-ידי

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$$

א. האם (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $[0, \infty)$?

ב. האם לכל $0 \leq a < b$ מתקיים $\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$?

נמק היטב את תשובותיך!

שאלה 2 (10 נקודות)

תהי $g(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$,

$f_n(x)$ מוגדרות ב- $\mathbb{R}$ על-ידי $f_n(x) = g(x + \frac{1}{n})$, לכל n ולכל x .

הוכח כי $(f_n(x))$ מתכנסת במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

שאלה 3 (20 נקודות)

לגבי כל אחד מהטורים הבאים מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{2n}}{n \cdot 4^n}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} d(n)x^n$ כאשר $d(n)$ כמות המחלקים של מספר n .

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכח או הפרך :

א. הפונקציה $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right)$ רציפה ב- $\mathbb{R}$.

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{1/(2n+1)} - x^{1/(2n-1)})$ מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1]$.

שאלה 5 (20 נקודות)

נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$.

א. הוכח כי f גזירה אינסוף פעמים ב- $\mathbb{R}$ ומצא את טור מקלורן (טור חזקות סביב 0) של f .

ב. מצא את תחום ההתכנסות של טור החזקות שקבלת בסעיף הקודם.

שאלה 6 (15 נקודות)

מצא את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (n+1)}{n!}$.

הדרכה: היעזר בטור חזקות.